FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS XII.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXCIV.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM. MDCCCI.

r16.90309 april 28

TABLE DES MATIÈRES.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXCIV.

I.	Changemens arrivés dans l'Académie:	Page
	I. Changement du Chef - - - - - - - - -	3
	II. Membres décédés - - - - - - - - -	ibid.
	III. Membres nouveaux - - - - - - - - -	16
II.	Gratifications:	
	I. Prolongation du congé de Mr. Pallas - - - -	19
	II. Croix de St. Vladimir à Mr. Inochodzof - - -	ibid.
III.	Nouvelles acquiſitions:	
	I. Pour la Bibliothèque - - - - - - - -	19
	II. Pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle - - - - -	21
	III. Pour le Cabinet de Curioſités - - - - - -	29
	IV. Pour le Jardin botanique - - - - - - -	32
	V. Pour le Médailler - - - - - - - -	33
IV.	Mémoires et autres ouvrages manuſcrits préſentés à l'Académie - - - - - -	ibid

V. Obſervations, expériences et notices intéreſſantes faites et communiquées à l'Académie: Page
I. Charbons de terre à Kalouga - - - - - - - 35
II. Nouvelle eſpèce de râmes - - - - - - - ibid.
III. Voyage au Japon - - - - - - - - 36
IV. Expériences acouſtiques - - - - - - - - 38
V. Sable prétendu métallique - - - - - - - 38
VI. Inflammation ſpontanée d'une compoſition métallique - - 39
VI. Rapports préſentés et lus dans les conférences académiques:
I. Sur l'uſage du thermomètre dans la navigation - - - 40
II. Sur les conducteurs électriques aux magazins à poudre - - 42
III. Sur une éruption vaſeuſe dans l'île de Taman - - - 44
IV. Sur les matières à diſſoudre ou à délayer dans l'eau pour éteindre les incendies - - - - - - - - 46
VII. Leçons publiques - - - - - - - 50
VIII. Ouvrages publiés - - - - - - - - 51
IX. Prix adjugé - - - - - - - - 52
X. Nouvelles queſtions propoſées - - - - - 54
XI. Extraits des Mémoires contenus dans ce volume:
I. Claſſe de Mathématique et de Phyſico-Mathématique - - 59
II. Claſſe de Phyſique - - - - - - - - 80
III. Claſſe d'Aſtronomie et de Météorologie - - - - 90
XII. Mémoires de Sçavans étrangers, lus et approuvés par l'Académie.
I. Fumariae quatuor novae ſpecies e regno Japonico, deſcriptae et delineatae a Carolo Petro Thunberg - - - 101

NOVA

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS
TOMVS XII.

Mathematica et Phyſico-mathematica.

Leonh. Euleri De inſigni uſu Calculi Imaginariorum in analyſi - - - - - - - - Pag. 3

Ejusdem. De formulis ſpeciei $mxx + nyy$ ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus - - - - 22

Ejusdem. De reſolutione poteſtatis polynomialis cujuscunque $(1 + x + x^2 + x^3 + \&c.)^n$ - - - 47

Ejusdem. Specimen transformationis ſingularis ſerierum 58

Ejusdem. Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non ſolum ipſas, ſed etiam quascunque earum poteſtates per ſeries concinnas exprimendi - - - - - - - 71

Ejusdem. De corporibus cylindricis incurvatis - - 91

Ejusdem. Inveſtigatio trianguli, in quo diſtantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur - - - - - - - - 101

Dan.

Dan. Melanderhjelm. Integratio ſormulae differentialis
$$N^{nx} x^m \partial x (a + bx + cx^2 + \&c.) \times (e + fx + gx^2 + \&c.)^p (h + rx + tx^2 + \&c.)^q,$$
in qua N eſt numerus cujus logarithmus hyperbolicus eſt unitas, quantitates vero n, m, a, b, c, e, f, g, h, r, t, p, q quaelibet datae 114

Nicolai Fuſs. Summatio plurium ſerierum ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatarum - - - - - 125

Ejusdem. Recherches ſur quelques cas d'équilibre dans les fils parfaitement flexibles - - - 145

F. T. Schubert. Trigonometria ſphaerica e Ptolemaeo 165

S. Gurieſ. Mémoire ſur la ſolution des principaux problèmes qu'on peut propoſer dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe 176

Steph. Rumovski. Integratio aequationis
$p^3 vv \partial v = nv \partial p + np \partial v (1 - p) (2 - p)$ 192

F. T. Schubert. Problemata ex doctrina ſphaerica 196

W. L. Krafft. Eſſai ſur les nombres premiers - 217

Ejusdem. Sur les liſtes des mariages, des naiſſances et des morts de la ville de St. Petersbourg. Mémoire IV. contenant le période depuis 1791 jusqu'à 1796. 246

Phyſica.

Phyſica.

Tob. Lowitz. Expoſitio novorum experimentorum circa frigus artificiale - - - - - - - - Pag. 275

Ejusdem. Hyacinthorum Sibiricorum, a Cel. *Laxmanno* detectorum, analyſis chemica - - - - 300

Baſil. Severgin. Expoſition ſyſtématique des pierres de roche compoſées, qui ſe trouvent dans les différentes parties de la Ruſſie - - - 307

Joh. Lepechin. Typha Laxmanni. 335

Nicol. Oſeretskovski. Obſervata de Salmone ſalare Oceani ſeptentrionalis - - - - - - - - 337

B. Fr. J. Hermann. Déſcription de la Topaze de Sibérie 344

Ejusdem. Expériences ſur l'acier damaſſé - - - 352

Nicol. Oſeretskovski. De ovo perforato - - - - - 364

Joh. Lepechin. Alca Kamtchatica - - - - - 369

Baſil. Severgin. Obſervationes quaedam circa lapides calcareos - - - - - - - - - - - 372

Joh. Theoph. Koelreuter. Mirabil. Jalaparum hybridarum continuata deſcriptio - - - - - - 378

B. Fr. J. Hermann. Mémoire ſur la pierre de poix, ou Piſſite de Sibérie - - - - - - - 399

Tob. Lowitz. Silicis Topazii Sibirici examen chemicum 406

Aſtro-

Aſtronomica et Meteorologica.

Steph. Rumovski. Tentamen inveſtigandi parallaxin Lunae ex eclipſi ſolis, quae contigit A. 1793 die $\frac{23\ \text{Martii}}{3\ \text{Aprilis}}$ - - - - - - - - - - - Pag. 415

Mauritii Henry. Obſervations de quelques étoiles qui culminent à peu de diſtance du Zénith, pour ſervir à vérifier la hauteur du pôle de l'obſervatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg - - - - - - - - 448

Th. Fr. Beitler. Obſervations aſtronomiques des eclipſes des Satellites de Jupiter, faites à Mitau, dans le Gouvernement de Courlande, à l'Obſervatoire du Gymnaſe académique, avec une lunette achromatique de Dollond à triple objectif, grandiſſant 80 fois et ayant une ouverture de 41 lignes du pied de Paris - - - - 457

Mauritii Henry. Obſervations faites avec le quart-de-cercle mural de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, dans le courant de l'année 1798 - - - - - - - - - - 466

Steph. Rumovski. Obſervatio tranſitus Mercurii per diſcum Solis, habita in Obſervatorio Petropolitano anno 1799 die $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$ tempore civili - - 493

Petri

Petri Inochodzof. Summarium obſervationum meteorologicarum, in urbe Kamyſchin ad Wolgam, ſub latitudine 50° 5′, 6″ et longitudine 63°, 4′, ab Octobri 1770 ad Auguſtum 1774 inſtitutarum et cum reſpondentibus Petropolitanis collatarum 497

J. A. Euler. Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année MDCCXCIV, d'après le nouveau ſtile - - - - - - 508

Ejusdem. Extrait des obſervations météorologiques, faites en MDCXCCIV d'après le nouveau ſtile, par Mr. le Conſeiller d'État et Chevalier *Stritter* à Moscou - - - - - - - - 526

** HISTOI-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES
ANNÉE MDCCXCIV.

I.
Changemens arrivés dans l'Académie.

I. *Changement de Chef.*

L'un des évènemens les plus remarquables qui ſoyent arrivès à l'Académie dans le courant de cette année, et dont nous ayons à rendre compte, en traçant l'hiſtoire de ce période, c'eſt le changement de Chef, ſurvenu au mois d'Août 1794. S. E. Madame la Princeſſe *de Daſchkaw* ayant demandé et obtenu de SA MAJESTÉ IMPERIALE un congé de deux ans, la direction de l'Académie fut confiée, pendant ſon abſence, à Mr. *Paul de Bakounin*, Gentilhomme de la Chambre de S. M. I.

II. *Membres décédés.*

L'Académie a fait, dans le commencement de cette année, deux pertes qui lui ont été très ſenſibles. La mort lui a enlevé deux membres ordinaires dignes de ſes regrèts, l'un à cauſe des longs et importans ſervices qu'il lui a rendus pendant plus de 27 ans, et l'autre par les eſpérances

 qu'il

qu'il avait données d'être longtems utile à l'Académie par ſes connoiſſances, ſon zèle et ſon activité.

1) Mr. *Baſile Zouyeff*, Aſſeſſeur de Collèges et Académicien ordinaire pour la claſſe d'Hiſtoire naturelle, mourût le 8 Janvier de cette année. Nous allons tranſcrire ici le précis de la vie du défunt, dont nous ſommes redevables à Mr. l'Académicien *Severguine*.

Précis de la vie

de Monſieur *Baſile Zouyeff*.

Baſile Zouyeff, Académicien, Profeſſeur en Hiſtoire naturelle, Aſſeſſeur de Collèges et membre de la Societé économique libre de St. Pétersbourg, naquit à St. Pétersbourg le 1 de Janvier 1754, d'une famille honnète, quoique peu titrée.

Il paſſa ſa plus tendre jeuneſſe au Gymnaſe de l'Académie, où il fut élevé, avec les autres élèves de l'Académie, aux frais de la Couronne. Il avoit à peine achevé ſes humanités, qu'il fut admis à l'expédition phyſique que Mr. l'Académicien *Pallas* fit alors, par ordre de SA MAJESTÉ IMPERIALE, dans les différentes provinces de la Ruſſie.

Il paſſa ſix ans à cette expédition avec Mr *Pallas* et gagna bientôt, par ſes talens et par ſon application aux études, la faveur de ce célèbre Naturaliſte, qui l'avoit employé dans pluſieurs excurſions particulières dont on trouve les réſultats dans le troiſième Tome de ſes Voyages.

Après

Après que Mr. *Pallas* eut fini ſes voyages, Mr. *Zouyeff* fut envoyé à Leide, pour y achever ſes études et ſe perfectionner dans les langues, dont il avoit déjà acquis des connoiſſances ſolides dans ſa patrie.

Après avoir fini ſes études à Strasbourg il paſſa en Hollande, d'où il revint à St. Pétersbourg. L'Académie le fit examiner, et il ſubit cet examen à la ſatisfaction des Académiciens. Il préſenta enſuite une diſſertation: *Idea metamorphoſeos inſectorum ad caetera animalia applicata*, ſur laquelle il fut nommé le 12 d'Octobre 1779 Adjoint de l'Académie pour la claſſe phyſique, et attaché à Mr. l'Académicien *Pallas*.

Ses talens et ſon caractère franc et noble lui firent bientôt gagner la bienveillance du Directeur et l'eſtime des Académiciens. Entre les années 1781 et 1782 il fit, par ordre de l'Académie, un voyage phyſique dans les provinces méridionales de la Ruſſie, à Cherſon et dans la Crimée, d'où il revint le 7 Octobre 1782. Il enrichit les cabinets de l'Académie de quelques productions remarquables de ces contrées, et lui expoſa pluſieurs obſervations qu'il avoit faites pendant ſon voyage. Il fut nommé dans la même année membre de la Société économique libre de St. Pétersbourg.

Les écoles normales ayant été formées depuis, il y fut placé en qualité de Profeſſeur, pour enſeigner l'Hiſtoire naturelle aux jeunes élèves qu'on avoit fait venir de différens Séminaires de l'Empire, et qui devoient remplir dans la ſuite les fonctions de maîtres d'Hiſtoire naturelle dans les écoles normales, établies dans les différens gouverne-

mens,

mens de la Ruſſie. Il ſe diſtingua auſſi dans cette place par beaucoup de zèle et d'attachement aux devoirs qu'on lui impoſoit. Il s'étoit engagé entre autres par ordre de *Sa Majeſté Impériale*, à faire un Abrégé d'Hiſtoire naturelle pour l'uſage de cet inſtitut, qu'il acheva bientôt et qui fut imprimé depuis anonymement. Il fut encore l'éditeur d'un ouvrage périodique que l'inſtitut publia pendant quelques années, ſous le titre de *Растущій Виноградъ*, et qui contient des pièces ſur différens ſujets, en vers et en proſe, tant de lui que de pluſieurs autres. On y trouve entre autres *ſur la formation des montagnes* &c. *) En 1784 il fut nommé Aſſeſſeur de Colléges.

Il ſe ſignala toujours par ſon aſſiduité & ſon zèle à l'Académie, ce qui le fit nommer en 1787 Académicien et Profeſſeur en Hiſtoire naturelle. Il préſenta et lut pluſieurs mémoires qui ſe trouvent inſérés dans les Acta de l'Académie et qui décèlent tous beaucoup de talens et des connoiſſances ſolides. Il avoit encore reçu de la nature le don d'une mémoire extraordinaire.

Quoique d'une conſtitution forte et vigoureuſe, il fut attaqué en 1792 d'une fièvre chaude, à la ſuite d'un refroidiſſement, maladie de laquelle il ne guérit qu'imparfaitement et qui lui fit perdre le plus beau don de la nature, la mémoire. Il reſta dans cette ſituation juſqu'à la fin de l'année 1793

---

*) On a de lui quelques pièces encore dans le Journal académique qu'on publia ſous le nom de *Ежемѣсячныя Сочиненія*.

1793 avec un état de ſanté toujours ſoible, deſorte qu'à la fin de cette année il redevint malade à la ſuite d'un nouveau refroidiſſement; il perdit l'uſage de la langue quelques jours avant ſa mort et mourût enfin le huit de Janvier de l'année 1794, aux viſs regrèts d'une ſamilie aimable & de tous ceux qui l'ont connu. Ainſi la mort enleva à la fleur de ſon âge, ayant à peine atteint 40 ans, un homme qui, par ſa conſtitution & par ſes connoiſſances, promettoit d'être encore long tems utile aux ſciences & partant auſſi à l'Académie.

2) Mr. *Gaſpard Fréderic* Wolff, Docteur en Médecine & Académicien ordinaire pour l'Anatomie, mourût d'une Apoplexie ſéreuſe le 22 Février de cette année. Engagé au ſervice de l'Académie en 1766, il arriva à St. Pétersbourg au commencement de l'année 1767, & y apporta une réputation déjà bien établie comme Anatomiſte & Phyſiologue profond, réputation qu'il ſoutînt & augmenta dans la ſuite par le grand nombre d'excellens Mémoires répandus dans les nouveaux Commentaires & dans les Actes & nouveaux Actes de l'Académie. Il s'étoit dejà rendu célèbre par ſa profonde diſſertation ſur la génération, & par la controverſe qu'il eut ſur ce ſujet, avec l'immortel *Haller* qui, non obſtant la diverſité de leurs opinions, l'honora toujours de ſon eſtime & de ſon amitié. Aimé et eſtimé de ſes confrères, autant pour ſon ſavoir que pour ſa droiture & ſa douceur, il mourût dans la 61 année de ſon âge, regretté de toute l'Académie dont il a été pendant 27 ans un membre actif & laborieux. Ni la famille du défunt, ni les papiers qu'on a trouvés après ſa mort, n'ont rien fourni dont on eût pu compoſer un précis un peu plus circonſtancié da ſa vie. Mais l'uniformité de la vie d'un ſavant ſolitaire & retiré, qui n'a vecu, pour

ainſi

ainſi dire, que dans ſon cabinet, donne ſi peu de matiere à la Biographie, que nous n'avons apparement que peu de choſe à regretter de ce côté là. La partie vraiment intéreſſante & utile de la vie d'un tel ſavant eſt renfermée dans ſes ouvrages: c'eſt par ceux là que la mémoire eſt transmiſe à la poſtérité. Ainſi, au défaut d'une biographie du défunt, nous donnerons ici la liſte de ſes ouvrages académiques qui vaudra un éloge, parcequ'elle ſera ſentir, mieux que ne feroient de belles phraſes, la grandeur de la perte que l'Académie a ſoufferte par la mort, toujours prématurée, d'un homme qui a tant fait pour l'avancement de la ſcience qu'il avoit profeſſée.

Liſte des Mémoires
de Mr. l'Académicien *Wolff.*

De formatione inteſtinorum praecipue, tum et de amnio ſpurio aliisque partibus embryonis gallinacei, nendum viſis, obſervationes, in ovis incubatis inſtitutae. (*Nov. Comm. T. XII.*)

De formatione inteſtinorum, obſervationes in ovis incubatis inſtitutae. (*Nov. Comm. T. XIII.*)

Ovum ſimplex gemelliferum. (*Nov. Comm. T. XIV.*)

De leone obſervationes anatomicae. (*Nov. Comm. T. XV.*)

De corde leonis. (*Nov. Comm. T. XVI.*)

Deſcriptio vituli bicipitis, cui accedit commentatio de ortu monſtrorum. (*Nov. Comm. T. XVII.*)

De ſtructura veſiculae felleae leonis. (*Nov. Comm. T. XIX.*)

De foramine ovali, eiusque uſu in dirigendo motu ſanguinis. Obſervationes novae. (*Nov. Comm. T. XX.*)

De orificio venae coronariae magnae. (*Acta* 1777. *P.* 1.)

Deſcriptio veſiculae felleae tigridis, ejusque cum leonina et humana comparatio. (*Acta* 1778. *P.* 1.)

De

De inconſtantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraeſentandam exemplaribus. (*Acta* 1778. *P.* 2.)

De veſiculae felleae humanae ductusque humani cyſtici et choledochi ſuperficiebus internis. (*Acta* 1779. *P.* 1.)

De finibus partium corporis humani generatim; ſpeciatim de uſu plicarum, quae in veſiculis felleis nonnulorum corporum inveniuntur. (*Acta* 1779. *P.* 2.)

De pullo monſtroſo, quatuor pedibus, totidemque alis inſtructo. (*Acta* 1780. *P.* 1.)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio prima:* de regionibus et partibus quibusdam in corde, tunica exuta, notabilibus. (*Acta* 1780 *P.* 2.)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio ſecunda*: De textu cartilagineo cordis; ſive de filis cartilagineo oſſeis, eorumque in baſi cordis diſtributione. (*Acta* 1781. *P.* 1.)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio tertia*: De fibris externis ventriculi dextri. (*Acta* 1781. *P.* 2.)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio quarta*: De fibris externis ventriculi ſiniſtri. (*Acta* 1782. *P.* 2.)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio quinta*: De actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri. (*Nova Acta Tom. I.*)

Explicatio trium tabularum anatomicarum ad quinque priores diſſertationes, de ordine fibrarum cordis, pertinentium. (*Ibid.*)

De ordine fibrarum cordis. *Diſſertatio ſexta*, quae repetitas et novas obſervationes de fibris ventriculorum externis continet. *Pars prior.* Ventriculus dexter. (*Nova Acta Tom. II.*)

Explicatio tabularum de ordine fibrarum cordis IV. et V. (*Ibid.*)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio ſexta.. Pars poſterior.* Ventriculus ſiniſter. (*Nova Acta Tom. III.*)

De ordine fibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio ſeptima.* De ſtratis fibrarum in universum (*Ibid.*)

Explicatio tabulae VI (*). (*Ibid.*)

(*) Les explications des tables ſuivantes appartenant à cette ſuite de Diſſertations: *De ordine fibrarum cordis*, n'ont pas encore été publiées. On ne les a trouvé qu'incomplettes parmi les manuſcrits du défunt. Mais nous les donnerons, telles qu'elles ſont, à la ſuite de cette liſte.

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio octava.* De ſibris mediis ventriculi dextri. *Pars prior.* (*Ibid.*)

Diſſertationis octavae de ſibris mediis ventriculi dextri, *Pars poſterior.* (*Nova Acta Tom. IV.*)

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio IX.* De actione ſibrarum mediarum ventriculi dextri. (*Nova Acta Tom. V.*)

Deſcriptio aortae ſupra modum extenſae, ſimulque in ſedibus diverſis oſſiſicatae. (*Ibid.*)

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio X.* De ſtrato ſecundo ſibrarum ventriculi ſiniſtri. *Pars prima.* (*Nova Acta Tom. VI.*)

De tela quam dicunt celluloſa, obſervationes. (*Ibid.*)

De tela dicta celluloſa, obſervationes continuatae: Cutis, ſubſtantia ſubcutanea, adeps. (*Nova Acta Tom. VII.*)

Obſervationum de tela dicta celluloſa, continuatio ſecunda. Celluloſa muſculorum. (*Ibid.*)

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio X. Pars 2.* De ſtrato ſecundo ſibrarum ventriculi ſiniſtri. (*Nova Acta Tom VIII.*)

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio X. Pars 3.* De ſtrato ſecundo ſibrarum ventriculi ſiniſtri. (*Nova Acta Tom. IX.*)

De ordine ſibrarum muſcularium cordis. *Diſſertatio X. Pars 4.* De ſtrato ſecundo ſibrarum ventriculi ſiniſtri. (*Nova Acta Tom. X.*)

Von der eigenthümlichen und weſentlichen Kraſt der vegetabiliſchen ſowol, als auch der animaliſchen Subſtanz, als Erläuterung zu zwo Preisſchriſten über die Nutritionskraſt. St. Petersburg, 1789.

Nous avons dit dans la note (page 9) que l'explication des tables pour les diſſertations de feu Mr. *Wolff: De ordine ſibrarum muſcularium cordis*, finit à la ſeptième, et qu'on n'a trouvé parmi les papiers du défunt qu'un fragment de la continuation de cette explication. L'Académie ayant cru que les Anatomiſtes aimeroient encore mieux avoir ce fragment tel qu'il eſt, que de n'en avoir rien du tout: elle a réſolu de le faire inſérer dans ce Volume, et nous ne croyons pouvoir le placer plus convenablement qu'à la ſuite de cette liſte.

Expli-

Explicatio
Tabularum anatomicarum VII, VIII et IX.
ad diſſertationes de ordine fibrarum cordis VIII, IX X, et XI pertinentium, quibus fibrae ſtrati ſecundi ventriculorum exponuntur.

Tab. VII.

Cordis ejusdem, cujus fibrae externae Tabulis IV. V. et VI. repraeſentantur, ſiſtit ſtratum fibrarum ſecundum ventriculi utriusque in ſuperficie ſuperiori.

A. B. C. D, Ventriculus dexter.

A. B. Ejus margo poſterior, cui arteria pulmonalis inſidet. Orificium arterioſum.

A. C. Margo baſilaris.

C. D. Margo anterior.

C. Angulus dexter.

D. Apex ventriculi dextri.

B. F. Margo ſiniſter ventriculi dextri.

B. E. Pars hujus marginis, qua dexter ventriculus ſiniſtro non adnatus eſt, qua latus ergo ſiniſtrum coni arterioſi efficitur.

E. F. Pars ejusdem, qua ſiniſtro ventriculo dexter adhaeret, eaque ratione crenam efficit.

E. Principium crenae.

F. Ejus finis.

F. G. H. I. F. Ventriculus ſiniſter.

G. H. Ejus margo poſterior, cui ſinus venarum pulmonalium inſidet. Orificium venoſum, magnam partem tectum ab arteria pulmonali.

H. Pars gibboſa ventriculi, ſeu angulus cordis ſiniſter.

H. I. Margo ventriculi ſiniſter.

I. Apex ventriculi.

I. F. Margo ventriculi anterior, ſeu ea marginis ventriculi pars, quae apici et ſini crenae intereſt.

K. Auricula dextra.

L. Siniſtra. Reliqua, quae figuram, regiones parteſque varias cordis in ſuperiori ſuperficie, concernunt, ex Tab. I. et IV. repetenda.

M. Arteria pulmonalis.

N. Ejus ramus ſiniſter.

O. Dexter.

P. Aorta.

Q. Arteria innominata, in adſcendentem ramum anteriorem, carotidem dextram, et curvatum poſteriorem, ſubclaviam arteriam dextram, diviſa.

R. Carotis ſiniſtra.

S. Subclavia ſiniſtra.

T. Aorta deſcendens.

V. Arteria coronaria dextra, uti ex adipe cordis emergit.

W. Vena cava ſuperior.

a. b. A. Adductor arteriae pulmonalis minor, ſive dexter, ortus in ſuperficie baſilari (*Tab. VIII. r. t. w. x.*), flexus ſuper marginem baſilarem (*Tab. VIII. w. x. Tab. VII. a. A.*), inſertus in baſin arteriae pulmonalis (*b. A.*)

a. b. c. d. e. f. g. h. Adductor arteriae pulmonalis major, ſive anterior, ortus in ſuperficie baſilari, flexus ſuper marginem baſilarem (*a. e. g.*), inſertus in anteriorem partem baſis arteriae pulmonalis (*d.*) in crenam (*f. h.*)

a. b. c. d. e. f. Ejus portio ſuperior ſeu poſterior.

e. g. h. Portio ejus inferior ſeu anterior.

i. Fibrae obliquae, quibus illae portiones conjunguntur.

k. c. b. Muſculus circumflexus ſiniſter ex ſtrato externo relictus, ortus a baſi arteriae pulmonalis (*k. b.*), flexus circa marginem ſiniſtrum coni arterioſi, in hujus poſteriorem ſuperficiem inſertus. Circumflexus ſtrati medii prorſus huic ſimilis eſt.

l. m. n. o. p. Faſcia marginalis, ſeu portio fibrarum angularium prima, orta

orta in ſuperficie inferiori, flexa circa angulum ventriculi (*m. n.*), progrediens parallela margini baſilari, eumque tegens (*m. l.*), inſerta mediantibus transverſis (*p. q. r.*) in crenam.

l. m. Fibrae, quae marginem progrediendo tegunt.

o. Earum inſertio in portionem inferiorem adductoris majoris.

p. Maxima fasciae pars in transverſam ſerratim inſerta.

q. r. s. t. Transverſae fasciae ſuperiores vel poſteriores.

v. n. w. Portio fibrarum angularium ſecunda, quae orta ex ſtria ſuper marginem ad (*n. v.*) flexa, ſub primam angularem (*l. m. n. o. p.*) ſe inſinuat.

x. v. w. y. Portio fibrarum angularium tertia, orta ex ſtria ſub angularem primam ad (*w. y.*) pariter ſe recipiens.

z. x. 1. Fascia ventralis prima, a ſtria orta, flexa ſuper marginem ad *z. x.* inſerta in transverſales poſteriores ad *1.*

2. z. 3. 4. Fascia ventralis ſecunda, orta a ſtria ſuper marginem (*2. Z.*) flexa, in transverſales poſteriores (4) inſerta.

5. 2. 12. 9. Fascia ventralis tertia, ſeu perforata, orta ex ſtria, ad marginem in lacinias (2. 5. 12.) deſcendens, largosque efficiens hiatus, in cavitatem *b.* ventriculi penetrantes et occupatos fibris internis retiformibus.

6. 7. 8. 10. 11. Fibrae internae retiformes, quibus hiatus paſſim occupantur, foraminibus tamen relictis in cavitatem ventriculi penetrantibus.

12. 22. 23. Fibrae ſolitariae ventrales, ultimae hujus ſtrati fibrae in ſuperiori ſuperficie, cum regio tota apicis ſolis fibris externis (12. *T. D*) tegatur.

13. 14. 15. 20. 21. Fibrae tranverſae inferiores ſeu anteriores, productae a fibris ventriculi internis, in crenam inſertae.

16. 17. Foramina relicta inter fibras, oris quaſi ligamentoſis, albis cincta, in quae fibrae carneae inſeruntur.

18. Fibrae ſingulares, ex cavitate ventriculi emergentes et denuo ſe demergentes in illam.

19. Fibrae

19. Fibrae ventriculi internae retiformes.

20 21. Fibrae transverſae anteriores.

22. Cavitas ventriculi. Fibrae externae in hac parte remotae ſunt, nec mediae ad eam usque ſe extendunt.

23. Ultima in hac ſuperiori ſuperſicie medii ſtrati fibra, ſolitaria.

24. Fibrae internae retiformes.

25. Foramen inter fibras relictum.

26. 27. 28. *H. G. E.* Ordo ſecundus fibrarum ſeu funiculi in ſtrato ſecundo ventriculi ſiniſtri, ortus a ſilo cartilagineo ſiniſtro, a baſi aortae, a ſepti parte poſtrema, quo usque hoc cono arterioſo tegitur, ad principium crenae (*E.*) usque; flexus circa marginem ventriculi (*H.* 28.), inſertus in ſtriam (*Tab. IX. p. x. s. q.* 2 3.).

27. *H.* Portio harum fibrarum, quae a filo cartilagineo oritur.

26. 27. Portio earum altera, a baſi aortae (*Tab. VIII. a.*) orta.

28. 26. *E B.* Tertia earundem portio, a poſtrema parte ſepti, ab aorta ad principium crenae usque (*Tab. VIII. d. K i.*) orta.

28. 30. 31. 32. *E.* Fibrae interpoſitae, emergentes maximam partem ex puncto (*E.*), inter funiculos procedentes et tertium ordinem fibrarum diſperſae inde variis modis, flexae circa marginem (28. 34.), recipientes ſe in inferiori ſuperficie ſub funiculos (*Tab. IX. x.* 4. *z.*).

28. 30. Portio harum fibrarum, quae ſub ſequenti faſciculo (30. 31.) prodeunt ſub praecedentes funiculos ſe recipiunt.

30. 31. Faſciculus harum fibrarum, cujus fibrae, ex puncto (*E.*) ortae, parallelae fere progrediuntur, in inferiori ſuperficie autem ſub funiculos pariter ſe recipiunt.

31. 32. Duo faſciculi, quos fibrae ſingulari modo contortae efficiunt: ſtructura minime conſtans.

Interpoſitae, ſi ad tertium ordinem referuntur, hic ſimili prorſus ratione ad praecedentes funiculos ſe habent, ac quartus in hoc ſtrato ad tertium ordinem, et tertius in ſtrato externo ad ſecundum. Nimirum ipſae interpoſitae, quae notabilium fibrarum tertii ordinis partem efficiunt, ſub

ſub praecedentem ordinem ſecundum, ut magna pars ordinis quarti in hoc ſtrato ſub tertium, et totus ordo tertius ſub ſecundum in ſtrato externo, ſe recipiunt. Neque faſciculus deficit interpoſitis ſingularis, (*e. E.* 28.) ultimus ordinis praecedentis, ſub quem ſe recipiant, analogus procurrente majori in ſtrato externo et minori (37. 38. 39. 40.) in hoc ſtrato ſecundo.

33. 34. 35. *f.* 36. 37. 38. 39. 40. Ordo tertius fibrarum ventriculi ſiniſtri in ſtrato ſecundo, ortus a media parte crenae, flexus circa marginem (34. 40. *Tab. IX.* 4. 11.), inſertus in ſtriam (*Tab. IX.* 6. 10. 12. 15.)

34. 33. Prima portio flexa circa marginem (*Tab. IX.* 4. 5.), recipiens ſe partim ſub faſciculos una cum interpoſitis, partim in ſtriam inſerta. (*Tab. IX.* 6.)

35. 33. Altera portio, flexa circa marginem (*Tab. IX.* 5. 7.), ſub priorem ſe recipiens (*Tab. IX.* 9.)

35. 36. 39. Tertia portio, tenuis circa marginem flexa (*Tab. IX.* 7. 8.), ad ſtriam perducta (*Tab. IX.* 10.)

37. 38. 39. 40. Portio quarta, faſciculus annularis, ſive procurrens brevis in ſtrato ſecundo, ſub quem ſe fibrae ordinis quarti, fere omnes in ſuperiori, partim in inferiori ſuperficie (*Tab. IX.* 16. 17.) recipiunt. Hic craſſus carneus funiculus admodum eminet prae reliqua cordis parte, regione apicis (40. 48.). Imprimis in regione (40. 45.), profundiorem foveam efficit, quam funiculus procurrens brevis ſtrati externi, dum tenuiori latiorique parte cum hujus ſtrati funiculo ex eadem parte crenae (37. 38.) ortus, tereti craſſaque cauda verſus apicem deſcendit, replet, eaque ratione aequalem efficit ventriculi ſuperficiem externam.

37. 38. Pars latior et tenuior funiculi, qua a crena oritur, in duas portiones 37 et 38. diviſa, quarum illa 37 huic 38 adnexa.

32. Pars craſſior, fere rotunda, quaſi cauda, qua circa marginem funiculis ſe

ſe flectit, et planior rurſum per inferiorem ſuperficiem (*Tab. IX.* 8. 11. 15. 12. 15.) tranſverſim progreditur, in ſtriam inſertus.

40. Fovea, quam cauda funiculi procurrentis brevis ſtrati externi replet. Hae fibrae (40) primae in inferiori ſuperficie et, quod rarius in eadem, admodum laxae, a caeterisque ſolutae, ſub laxum pariter in hac parte annularem funiculum ſe recipiunt. (*Tab. IX.* 13.)

40. 41. 47. 48. 52 Ordo quartus fibrarum, ortus a crena (41. 44.) et faſciculis terminalibus ſuperiori 47. & medio 50. flexus circa marginem (40 *I. Tab. IX.* 11. 20.), recipiens ſe partim ſub faſciculum annularem (*Tab. IX.* 16. 17.), partim inſertus in crenam (*Tab. IX.* 18.), partim in aperturam ventriculi ſe recipiens (*Tab. IX.* 23. 24.)

41. Prima faſcia, quarum quinque hunc ordinem efficiunt, orta a crena, recipiens ſe ſub funiculum annularem in ſuperiori ſuperficie.

42. 43. Faſcia ſecunda, pariter orta a crena ſub priorem faſciam (42) et ſub funiculum annularem - - - -

---

III. Membres nouveaux.

L'Académie a eu l'occaſion de s'aſſocier, dans le courant de cette année, pluſieurs Savans diſtingués qui, ayant bien mérité des ſciences en général, ou de l'Académie en particulier, ſoit en lui communiquant des Mémoires eſtimables ou des notices intéreſſantes, ſoit en lui rendant d'autres ſervices agréables, avoient paru dignes de cette diſtinction littéraire ou au chef, ou au corps entier des Académiciens.

Reçu au nombre des membres honoraires regnicoles, par le chef, le 15 Mai.

Mr. *Nikon Karpinsky*, Conſeiller de Cour, Docteur en Médecine, Profeſſeur d'Anatomie & de Chirurgie à l'école de Chirur-

Chirurgie de St. Pétersbourg, & membre du Collège de Médecine.

Reçu au nombre des Membres honoraires externes, par le chef, le 19 Mai.

Mr. *George Fréderic Wehrs*, Conſeiller & Agent de diverſes Cours d'Allemagne & Directeur de la feuille d'affiches à Hanovre, membre de la ſociété Royale d'Agriculture à Zelle & de la ſociété libre économique de St. Pétersbourg, recommandé par ſon activité & par ſa diſpoſition à rendre des ſervices agréables à l'Académie.

Reçu au nombre des Membres externes, à la pluralité des voix, le 28 Juillet, par le Corps des Académiciens.

Mr. *Jean Elert Bode*, Aſtronome et Membre de l'Académie Royale des Sciences et belles Lettres de Pruſſe, à Berlin.

Mr. *George Chriſtophle Lichtenberg*, Conſeiller de Cour et Profeſſeur ordinaire en Philoſophie à l'Univerſité de Göttingue.

Mr. *George Simon Klügel*, Profeſſeur ordinaire de Mathématiques et de Phyſique à l'Univerſité de Halle.

Mr. *François de Zach*, Major au ſervice de S. A. S. Mſgr. le Duc de Saxe Gotha et Directeur de l'obſervatoire de Seeberg, à Gotha.

Mr. *Jean Fréderic Gmelin*, Conſeiller de Cour, Docteur en Médecine et Profeſſeur ordinaire en Philoſophie et Médecine à Göttingue.

Mr. *Emanuel Kant*, Profeſſeur ordinaire en Philoſophie à l'Univerſité de Königsberg.

Mr. *Eberhard Auguſte Guillaume Zimmermann*, Conſeiller de Cour et Profeſſeur de Phyſique à Brunſvic.

Mr. *Abel Burja*, Profeſſeur de Mathématique à l'Académie Royale militaire à Berlin.

Mr. *Juſte Chrétien Loder*, Conſeiller et Médecin de la Cour de Weymar, Docteur en Médecine et Profeſſeur ordinaire d'Anatomie et de Chirurgie à l'Univerſité de Jena.

Mr. *Charles Fréderic Hindenbourg*, Profeſſeur extraordinaire de Philoſophie et de Mathématique à l'Univerſité de Leipzig.

Mr. le Baron *Charles de Meidinger*, Secrétaire Impérial et Royal au Tribunal de Juſtice de la Baſſe-Autriche à Vienne.

Mr. *Gottlieb Conrad Chrétien Storr*, Docteur en Médecine et Profeſſeur d'Hiſtoire naturelle à l'Univerſité de Tubingue.

Mr. *Guillaume Henry Sébaſtien Bucholtz*, Docteur en Médecine de la Cour de Saxe-Weimar et Conſeiller des Mines à Weimar.

Reçu au nombre des Correſpondans.

Mr. *Erneſt Florent Fréderic Chladni*, Docteur en Philoſophie et en Droit à Wittenberg en Saxe; reçu le 22 Mai 1794.

Mr. *Jean Lehmann*, Employé au Département des Affaires étrangères; reçu le 10 Juillet.

Mr. *Jean Jérome Schröter*, Grand-Bailli à Lilienthal près de Brème; reçu le 28 Juillet.

II. Grati-

II.
Gratifications.

SA MAJESTÉ IMPÉRIALE accorda très gracieuſement à Mr. le Conſeiller d'Etat et Chevalier *Pallas* une prolongation d'une année du terme de ſon congé de douze mois, expiré le 31 Décembre de l'année paſſée, le diſpenſant, pour ce terme encore, de ſes fonctions académiques et lui laiſſant la jouiſſance de ſes appointemens.

Mr. le Conſeiller de Cour *Inochódzoff* fut décoré le 22 Septembre de l'ordre de St. Volodimir de la 4 claſſe à la récommendation du Directeur de l'Académie, préſentée au Chapitre de cet ordre.

III.
Nouvelles acquiſitions.

Dans le courant de cette année la Bibliothèque, le Cabinet d'Hiſtoire naturelle et de Curioſités, le Médailler et le Jardin botanique ont fait différentes acquiſitions, provenans d'ouvrages imprimés, de productions naturelles, de curioſités, de graines et ſemences et de médailles, qui ont été envoyées et préſentées à l'Académie.

I. La Bibliothèque.

Indépendamment de l'achat d'un grand nombre d'ouvrages importans et précieux, fait cette année, elle a été augmentée des ouvrages ſuivans préſentés à l'Académie.

 De

De la part de la Société des arts et des ſciences établie à Batavia:

Verhandelingen van het Bataviaſch Genotſchap. VI Deel. Te Batavia 1792.

De la part de l'éditeur:

Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1796. Berlin 1793.

Sammlung aſtronomiſcher Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten, herausgegeben von J. E. Bode. Erſter Supplement-Band zu deſſen aſtronomiſchen Jahrbuche. Berlin 1793.

De la part de S. E. Mr. le Prince *Demetrius de Golitzin:*

Traité ou Déſcription abrégée et méthodique des mineraux; préſenté à l'Académie Impériale et Royale des Sciences et belles lettres de Bruxelles. Maſtricht 1792.

Défenſe de Mr. de Buffon contre les attaques injuſtes et indécentes de Mr. de Luc et Sage. Par Mr. le Prince Demetrius de Golitzin. A la Haye 1793.

De la part de l'auteur, Mr. le Conſeiller privé et Chevalier *Mouſin-Pouchkin.*

Историческое изслѣдованіе о мѣстоположеніи древняго Россійскаго Тмутараканскаго Княженія. С. П. 1794. 4.

De la part de l'auteur, Mr. le Conſ. de Cour *Ebell* à Hanovre:

Die Bleyglaſur des irdenen Küchengeſchirrs als eine unerkannte Hauptquelle vieler unſerer Krankheiten &c. Hanover 1794. 8.

De la part de l'auteur, Mr. l'Abbé *Saverio Scroſani:*

Saggio ſopra il commercio generale delle Nazioni d'Europa, con l'aggiunta del commercio particolare della Sicilia. In Venezia 1792. 8.

La vera ricchezza delle Campagne, oſſia Corſo d'Agricoltura. In Venezia 1793. 8.

De la part de la Société Electorale météorologique à Manheim:

Ephemerides Societatis meteorologicae *Palatinae.* Manhemii 1793. Obſervationes anni 1789.

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni 1790. Mannhemii 1793. in 4.

De

De le part de l'Académie Electorale des Sciences et belles lettres de la même ville:

Hiſtoria et Commentationes Academiae Ele toralis ſcientiarum et elegantiorum litterarum Theodoro-Palatinae. Tom. VII. hiſtoricus. Mannhemii 1794. in 4.

De la part du Rev. Père *Ermenegildo Pini*, Barnabite et Prof. de Chymie et de Minéralogie à Milan:

Opuſcoli di Ermenegildo Pini, inſeriti nelle Memorie della Società Italiana, in 4. 1792.

Sulle rivoluzioni del globo terreſtre, provenienti dall' azione delle acque, memoria geologica. in 4.

Addizione al ſaggio di una nuova teoria della terra, in riſpoſta al eſſame fattone dal Sgr. de Luc, in 4. Milano 1792.

Memoria mineralogica ſulla montagna ed i contorni di San Gottardo, in 8. Milano 1783.

Sulla metachimica, oſſia ſulla nuova teoria e nomenclatura chimica. Lettera del P. E. Pini al Sgr. Conte Marco Carburi, in 8. Milano 1793.

Riſpoſta ai libretti che ſi publicheranno contro la lettera del P. Pini, ſulla metachimica al Sgr. Conte M. Carburi, opuscoletto da un antimetachimico, in 8. Milano 1794.

De la part de Mr. le Conſ. de Cour *Guthrie*, Médecin du Corps Impérial des Cadets de Terre:

A table of Gems of the firſt and ſecond orders, in 8.

De la part de Mr. l'Académicien *Severguine*:

Начальныя основанія естественной Исторіи. Царство произрастѣній, 3 Vol. in 8. reliés.

II. Le Cabinet d'Hiſtoire naturelle

a été enrichi 1) de 154 quadrupèdes et oiſeaux, apportés par le Capitaine de la Flotte *Joſeph Billings*, Chef d'une expédition ſecrète dans l'Océan oriental, & remis à l'Académie par ordre de S. M. I. par Mr. le Conſeiller d'Etat & Chevalier *Pallas*. En voici la liſte:

No. 1.

No. 1 et 2. *Aquila leucoptera.* Eſpèce nouvelle des isles entre Kamtchatka et l'Amérique.

— 3. *Aquila leucocephala.* De la côte occidentale de l'Amérique.

— 4. *Aquila nobilis.*

— 5. *Aquila Chryſaetos, major.*

— 6. *Aquila Albicilla.*

— 7. *Falco Haliaetus.*

— 8. *Falco albus*; de Kamtchatka.

— 9. *Falco palumbarius, junior.*

— 10. *Falco Subbuteo,*

— 11 et 12. *Stryx ulula,*

— 13. *Stryx virgata.*

— 14. *Corvus Corone*; de Kamtchatka.

— 15. 15'. *Corvus Caryocatactes.*

— 16 et 17. *Corvus Stelleri*; nouvelle eſpèce du Continent de l'Amérique.

— 18. *Corvus Pica*; de Kamtchatka.

— 19. *Turdus ferrugineus*; de l'Amérique.

— 20. *Picus tridactylus*; mas.

— 21. *Picus varius medius*; ſoemina.

— 22. *Picus varius minor*; mas.

— 22b *Picus varius minor*; ſoemina.

— 23. *Tetrao Urogallus*, ſemelle; de Kamtchatka.

— 24. *Tetrao Lagopus*; habitu aeſtivo.

— 25. *Tetrao Bonaſia.*

— 26 et 27. *Loxia Enucleator*; les deux ſexes.

— 28 et 29. *Loxia Pyrrhula*; les deux ſexes.

— 30. *Fringilla Lapponica.*

— 31. *Fringilla Montifringilla*; variété.

— 32. *Emberiza Schoeniclus.* P.

— 33. *Emberiza Aureola.* P.

— 34. *Emberiza pusilla.* P.

No. 35.

No. 35 et 36. *Emberiza montana*; les deux ſexes.
— 37. *Sitta Europaea.*
— 38. *Hirundo urbica*; variété.
— 39. *Alauda arvenſis*; de l'Amérique.
— 40. *Motacilla flaveola.*
— 41. *Motacilla naevia*; de l'Amérique.
— 42. *Charadrius (Trynga L.) varius.*
— 43. *Charadrius pluvialis.*
— 44 et 45. *Charadrius apricarius.*
— 46 — 49. *Charadrius (Trynga L.) interpres.*
— 50. *Haematopus Oſtralega.*
— 51 et 52. *Haematopus nigra*; nouvelle eſpèce.
— 53. *Scolopax Phaeopus.*
— 54. *Scolopax Totanus.*
— 55. *Scolopax Lapponica.*
— 56. *Scolopax rubiginoſa*; deux exemplaires.
— 57 et 58. *Scolopax Gallinago.*
— 59 — 63. *Trynga pugnax*; variétés.
— 64 et 65. *Trynga Guinetta.*
— 66. *Trynga alpina.*
— 67 et 68. *Tryngae* ſpecies.
— 69. *Trynga glareola.*
— 70 et 71. *Trynga ſalina* P.
— 72. *Phalaropus ruficollis.*
— 73 et 74. *Phalaropus ferrugineus.*
— 75. *Scolopax fuliginoſa* P.
— 76 et 77. *Larus cachinnans* P.; de l'Amérique.
— 78. *Ejusdem ſpecimen primi anni.*
— 79 - 81. *Larus Riſſa*; de l'Océan oriental.
— 82. *Larus naevius.*
— 83 et 84. *Larus atricilla.*
— 85. *Larus paraſiticus.*

No. 86.

No. 86. *Procellaria glacialis.*
— 87 et 88. *Procellaria aequinoctialis.*
— 89. *Procellaria cana*; nouvelle eſpèce.
— 90 et 92. *Procellaria nigra.*
— 92. *Pelecanus violaceus*; nouvelle eſpèce.
— 93 et 94. *Pelecanus bicriſtatus*; nouvelle eſpèce, l'une et l'autre de l'Océan oriental.
— 95. *Cepphus arcticus.*
— 96. *Cepphus ſeptentrionalis.*
— 97 - 99. *Cepphus Lomvia.*
— 100. *Cepphus Grylle.*
— 101. *Cepphus hypoleucus*; nouvelle eſpèce.
— 102. *Colymbus cucullatus.*
— 103. *Colymbus minutus.*
— 104. *Diomedea exulans*; varietas primaeva.
— 105 et 106. *Alca Torda.*
— 107 et 108. *Alca cirrhata*; nouvelle eſpèce.
— 109. *Alca criſtatella*; nouvelle eſpèce.
— 110 - 112. *Alca ſenex*; nouvelle eſpèce.
— 113. *Alca myſtacea*; nouvelle eſpèce.
— 114. *Alca Alle.*
— 115 et 116. *Anas canagica*; nouvelle eſpèce.
— 117 et 118. *Anſer Canadenſis.*
— 119. *Anas ſpectabilis.*
— 120. *Anas Stelleri*; nouvelle eſpèce.
— 121. *Anas falcata*; nouvelle eſpèce.
— 122. *Ejusdem foemina.*
— 123 et 124. *Anas hiſtrionica.*
— 125 - 126. *Anas hyemalis.*
— 127. *Anas Marila.*
— 128 et 129. *Anas acuta*; les deux ſexes.
— 130 et 131. *Anas glocitans*; les deux ſexes.

Nr. 132

No 132 et 133. *Anas Crecca*; les deux ſexes,
— 134. *Anas nigra.*
— 135 - 137. *Anas Penelope*; les deux ſexes.
— 138. *Anas Clangula.*
— 139. *Anas Boſchas*; la femelle.
— 140 et 141. *Anas latiroſtris*; les deux ſexes.
— 142 et 143. *Mergus Merganſer*; les deux ſexes.
— 144. *Mergus Serrator.*
— 145 et 146. *Mergus Serrator*; la femelle.
— 147. *Mergus albellus*; la femelle.
— 148. *Mus citillus*; de Kamtchatka.
— 149. *Sciurus volans.*
— 150 et 151. *Sciurus ſtriatus.*
— 152. *Sorex Europaeus*; de Kamtchatka.
— 153 et 154. *Deux peaux de veau marin.*

3) D'une collection de Teſtacées et autres productions naturelles du regne animal et végétal, trouvées dans la mer du Japon, par le Lieutenant *Adam Laxmann*, que ſon Père, Mr. le Conſeiller de Cour *Laxmann* a envoyées au Muſée académique. Cette collection conſiſtoit en 60 coquilles et autres productions marines, 18 animaux et inſectes conſervés dans de l'eſprit de vin, un herbier de 65 plantes alpeſtres, autant de Zoophites et plantes marines. Voici la liſte, avec les noms en langue Japonaiſe et en caractères Ruſſes, telle qu'elle a été donnée par Mr. *Laxmann* et corrigée par Mr. l'Ajoint *Sewaſtianof*.

Enumeratio Teſtaceorum

aliorumque tam regni animalis quam vegetabilis Oceani Japoniam alluentis productorum, Subcenturione Imperiali, *Adamo Laxmanno* in itinere, anno MDCCXCIV lectorum, adjectis nominibus Japonorum.

1. Ъ камн. Ova iae Rajae clavatae, vulgo mures marini dicti.
2. Казнгай. Patellae vulgatae ſpecimina duo non ſplendida.
3. Закунгай. Oſtrea pecten.
4. Меnry Сурнгаr. Donax ſcortum.
5. Гбихакана. Cancer ſquilla, vel potius ejus reliquae prorſus mutilatae.
6. Нзонь гаи. Oſtreae Pallii valvae dextrae.
7. Нзоцубугаи. Chiton tuberculatus.
8. Ганн. Turbines et murices ſerpulis obducti, minuti.
9. Каннгай. Oſtrea edulis, fucis obducta, et Oſtrea malleus.
10. Хнmоде. Aſteriae papposae et rubeae, cum echino orbiculo.
11. Ахнporaй. Pholades dactyli.
12. Камн сурнгаr. Solenes ſiliquae.
13. Цубу номн. Nerita frondoſa.
14. Курогай. Tellinae albidae.
15. Закузнигай. Venus reticulata.
16. Сакана. Syngnathus acus, ſpecimina duo.
17. Юнокай. Teſta coriacea cochleariformis.
18. Мань знигай. Venus reticulata.
19. Арабнгай. Halictides tuberculatae.
20. Нзомоно. Nidus Hirundinis eſculentae.
21. Н нгай. Arca Noae.
22. Керенмъ Millepora polymorpha et madrepora ſavoſa.
23. Цубу. Buccina, Murices et Neritae.

24. Кани.

24. Каки. Lepades, Buccinis er Neritis inſidentes.
25. Низи. Mytilus edulis.
26. Казе. Echini eſculenti.
27. Томама. Trochi minuti.
28. Тона. Mytilus edulis et ſtagnalis.
29. Уминокуса. Spongiae duarum ſpecierum.
30. Вакамѣ. Fucus quercifolius.
31. Намако. Vermes cucumeres marini dicti.
32. Вакамѣ. Fucus ſaccharinus.
33. Исонокуза. Fucus filamentoſus.
34. Небутогай. Patellarum fragmenta.
35. Ика. Sepia loligo ſale condita.
36. Кай vel Гаи. Helices minutiſſimae.
37. Оминомомо. Actinia ſenilis.
38. Цузингай. Sertularia verticillata.
39. Исонокуса. Serpula conglomerata.
40. Исопошакусыгай. Serpulae teſtae, Oſtreae annexae.
41. Мехрагай. Donax et Arca.
42. Хамагосуки. Ova Buccini.
43. Товамингуза. Sertularia pumila et Fluſtra ſecuriſrons.
44. Каруси. Alcyonii ſpecies hepatiformis, Морской хлѣбъ.
45. Онищубу. Murex ramoſus.
46. Иша Ишагуза. Murices conici laevigati.
47. Умино араимомо. Sapo marinus, alcyonii ſpecies.
48. Омино куза. Fucus cartilagineus.
49. Таварангуса. Fucus veſicularis.
50. Кобунокуза. Fucus tenuifolius.
51. Сусумингай. Pholades dactyli.
52. Шужумингай. Tellinae variae.
53. Тонгани моци. Madrepora calca

54. Исонкаки. Spongia balanos includens.
55. Ханадамбукъ. Fucorum ſpecies. Морская малина;
56. Хизики. Sertularia Abietina.
57. Тоа миикузэ. Radix cujuſdam ſuci.
58. Сунгигуза. Sertularia cypreſſina.
59. Омииохокѣгуза. Corallina officinalis.
60. Хокуди. Agaricus praeparatus. Японской трутъ.]

In ſpiritu vini.

1. Ваками. Sipunculus nudus.
2. Айнами. Perca orientalis.
3. Гези геза. Radius aſteriae ciliatae vermem referens.
4. Хамо. Ammodites Tobianus.
5. Хазъ. Blennii ſpecies.
6. Ире. Foetus Rajae clavatae cum vitello; egregium ſpecimen.
7. Ками сури закапя. Ophidii ſpecies obſoleta.
8. Blennius Pholis.
9. Segia Loligo; ſpecimina duo.
10. Pholas dactylus et Solen ſiliqua.
11. Cancer Eremita et Bernardus.
12. Fluſtra ſecu ifrons.
13. Sertularia verticillata.
14. Aſteria papposa, neonata.
15. Turbo neritoides.
16. Blennius Lumpenus.

Herbarium vivum
hocce itinere collectum continet:

LXV Plantas alpeſtres et paucas hortenſes.
LXV Folia Japonica zoophyta ſucosque exhibentia.

3) Le

3) Le Cabinet de Minéralogie a reçu en outre, de la part du Rev. Pèr *Ermenegildo Pini*, les pièces ſuivantes du mont St. Gothard:

No. 1. Une empreinte de poiſſon, ſur une pierre marneuſe griſe.
— 2. Zéolithe.
— 3. Cyanite ou Schoerl bleu prismatique dans du Talc argentin.
— 4. Talc argentin, avec du Mica noirâtre et de Schoerl prismatique.
— 5. Mandelſtein, avec de petites boules de Calcedoine.
— 6. Feldſpath jaune rougeâtre avec du Feldſpath criſtalliſé.
— 7. Une Adularia taillée et polie pour une bague.

4) De la part de S. E. M. la Princeſſe:

Trois exemplaires bien conſervés de la Gorgonia, plante marine du genre des Corallins.

5) De la part de Mr. le Conſ. de Cour *Laxmann*.

Un petit chien monſtrueux à ſix pieds, trois de devant et trois de derrière.

6) De la part de Mr. le Général *Euler*.

Deux morceaux du *Plumbago* qu'on trouve à Nislot en Finlande.

III. Le Cabinet de Curioſités

1) a été enrichi d'un grand nombre d'habillemens, d'armes d'utenſiles et autres inſtrumens et nippes, apportés par le Capitaine *Billings* des isles et du continent de l'Amérique ſeptentrionale et du pays des Tchouktchi, et envoyés au Muſée, par ordre de S. M. I., au nombre de 78 pièces, ſavoir:

No. 1. 2. 3. Un habit Lamoute très orné, avec le poitrail garni d'une plaque d'argent et le bonnet.
— 4. Un habit d'hyver des Tchouktchis fait de peau de rennes.
— 5. Les bottes appartenant à cet habit, et
— 6. 7. 8. La ceinture et les ornemens de la tête.

No. 9.

No. 9. Le bonnet appartenant au même habit.

— 10. Un habit élégant et richement orné des habitans d'Ounalachka, fait de peaux d'ours marins fort jeunes.

— 11. Le chapeau de bois appartenant à cet habit.

— 12. Une perruque.

— 13. Une ceinture de femme brodée et une ceinture d'homme ordinaire.

— 14. Une creſſerelle de becs d'oiſeau, dont ces peuples ſe ſervent à la danſe.

— 15 et 16. Deux chemiſes à pluye, faites de boyaux d'animaux marins, l'une toute neuve.

— 17. Une pièce de vêtement des isles Aléoutiennes.

— 18. Une natte d'Ounalachka.

— 19. Une corbeille ou panier fait de racines, dont les inſulaires de Kadiak ſe ſervent pour porter l'eau.

— 20. Un panier fait de tuyaux d'herbes, pour cueillir des bayes.

— 21. Habillement de peaux de rennes des habitans de Kadiak.

— 22. Habillement de la baye de Sandwich fait de peaux de Souslik.

— 23. Une creſſerelle dont les mêmes inſulaires ſe ſervent en danſant.

— 24 et 25. Deux chapeaux des habitans de l'Amerique près de Sandwich's Sound, faits de racines.

— 26. Un habit de cuir des mêmes.

— 27. Un harnois de bois artiſtement travaillé, du même pays.

— 28. Un carquois, avec 4 flêches de cuivre du même pays.

— 29. Un faiſceau de 5 flêches à pointes d'os avec deux arcs, de l'Amérique.

— 30. Six petits harpons, pour la guerre et la chaſſe de petits animaux marins, des isles de l'Amérique.

— 31. Trois pièces de bois dont les habitans ſe ſervent pour lancer, à la main, les ſusdits harpons.

— 32. Un petit harpon garni d'une veſſie.

No. 33 et 34. Deux grands harpons armés de pointes d'os pour la chaſſe aux baleines et aux lions de mer.

— 35. Des harpons à pointes d'ardoiſe pour le même uſage.

— 36. Un arc des Américains vis-à-vis des Tchouktchis.

— 37. Un poignard de fer, du travail des Tchouktchis.

— 38. Une timballe des magiciens Tchouktchis.

— 39. La même d'un magicien de Kadiak.

— 40. Une natte tiſſue, vêtement de guerre des habitans de Prince William's Sound.

— 41. Beſicles, ou garde-vues des Tchouktchis et des inſulaires.

— 42. Une fronde des Tchouktchis.

— 43-49. Toutes ſortes d'inſtrumens des Tchouktchis, faits de dents de vache marine.

— 50. Un peigne des mêmes.

— 51 et 52. Etuis à épingles de leurs femmes.

— 53. Inſtrumens pour faire des filets, de la même nation.

— 54. Navette pour faire des filets à baleine.

— 55. Garde-main, dont les Aléoutiens ſe ſervent, pour ne pas bleſſer la main, en lançant leurs javelines.

— 56. Modèle d'un petit traineau des Américains.

— 57. Bracelet de fer des femmes Tchouktchis.

— 58. Dix eſpèces d'ornemens de bonnets entaillés, des îles Aléoutiennes.

— 59. Pendans d'oreilles et dents pour paſſer dans la lèvre percée, des îles de l'Amérique.

— 60. Dent de Caſtor pour aiguiſer les flèches armées de cailloux.

— 61. Couleurs et pinceaux des femmes d'Amérique.

— 62. Un ſac couſu de boyaux, d'Ounalachka.

— 63. Un idole de bois, de Kadiak.

— 64. L'idole d'un Dieu de la chaſſe des inſulaires, repréſentant une loutre.

No. 65,

No. 65. Un tablier à jouer, dont les enfans des Tchouktchis ſe ſervent.
— 66. Une eſpèce de damier des Tchouktchis.
— 67. Etui en forme de loutre, pour garder des pointes de flèches et autres bagatelles.
— 68. Des lignes avec les hameçons.
— 59. Des filets pour la pêche de loutres.
— 70. Des filets pour la pêche de gros poiſſons.
— 71: Des courroyes, ou bandes de cuir fort longues, pour de grands hameçons et harpons.
Les tout des îles du l'Amérique.
— 72. Poids d'os qu'on attache aux filets de pêcheur.
— Cigaro eſpagnol qu'on a trouvé chez les inſulaires de la Baye de Sandwich.
— 74. Ligne et amure d'harpon pour la pêche de la baleine.
— 75. Trois plats et trois cuillières de bois, des Americains.
— 76. Un morceau de bois odoriférant, dont il aborde des arbres entiers à Ounalachka.
— 77. Un arc des îles Kouriles.
— 78. Tablettes de bouillon, faites de chair de baleine, que les Tchouktchis machent quand ils ont faim.

2) De la part de Mr *Laxmann* le même Cabinet a reçu pluſieurs curioſités Kouriles, Aleoutes et Japonoiſes, patins ou ſouliers à raquettes, nacelles, chandèles de cire végétale &c. rapportées par ſon fils, de retour de ſon voyage au Japon.

IV. *Le Jardin botanique*

a reçu pluſieurs envoys de graines et ſémences cueillies 1.) par Mr. le Conſeiller d'Etat et Chevalier *Pallas*, pendant ſon voyage le long du Volga, aux monts Caucaſes et en Tauride; 2.) par Mr. le Conſeiller de Cour *Laxmann*, dans le Gou-

Gouvernement d'Irkoutzk et ailleurs; 3.) par ſon fils pendant ſon voyage au Japon dans les îles de l'Océan oriental. Pluſieurs de ces ſémences ont été ſemées dans le Jardin botanique, et les plantes qu'on en a recueillies ont été décrites déjà en partie par Mr. l'Académicien et Chevalier *Lepechin*, telles que les nouvelles eſpèces de *Polygonum*, d'*Epilobium*, de *Typha*, et d'autres, dont on trouve la déſcription dans les derniers Tomes des *Nova Acta*.

V. Le Médailler académique

a reçu une médaille en or, frappée à l'occaſion des nouvelles acquiſitions faites en Pologne, du poids de 52 Solotniks 24 parties et de la valeur de 188 Rbl. 18 Cop., que le Département des monnoyes a envoyé à l'Académie, pour être conſervée au Cabinet des médailles.

IV.

Mémoires et autres ouvrages manuſcrits préſentés à l'Académie.

Obſervations météorologiques, faites à Moscou, par Mr. le Conſeiller de Colléges et Chevalier *Stritter*, et envoyées régulièrement chaque mois de l'année 1794.

Le 5 *May.* Obſervations météorologiques, faites à Saratof en 1793, par Mr. le Conſeiller de Cour *Mayer*, Docteur en Médecine et Correſpondant de l'Académie.

Le 3 *Mars.* Obſervations météorologiques, faites à Ouſtyoug Weliky, dans le cours de l'année 1793, par Mr. le Chirurgien Major *Fries*, Correſpondant de l'Académie.

Le 27 *Octobre.* Obſervations météorologiques, faites dans la même ville, par le même, depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobre 1794.

Le 23 *Janvier.* Дневныя записки употребляемыя при описанїи рѣкъ Ини, Чарышы, Кокусуна, Камуни, большаго Хайръ, Кумини и Бухтармы, со всѣми впадающими рѣчками, Оберъ-Гиттенфервалтеромъ *Петровымъ Шангиновымъ.*

Le 13 *Février.* Tables mortuaires des trois derniers mois de 1793, pour St. Pétersbourg, envoyées par le St. Synode.

Le 27 *Mars.* Liſtes mortuaires de Kalouga pour cinq années conſécutives; envoyées par Mr. le Conſeiller de Cour *Sokolof.*

Le 9 *Juin.* О морошечномъ Квасѣ предохранительномъ отъ цынги; de la part de Mr. *Kreſtinin* à Archangel.

Le 23 *Juin.* Methode nouvelle et infaillible d'eſſayer l'or et l'argent, par rapport à la Métallurgie et aux monnoyes, pour la ſûreté commune du public de tous les états; par Mr. le Baron *Charles de Meidinger.*

Le 3 *Juillet.* Recherches ſur les équations aux différences partielles du premier ordre à trois variables, lorsque ces différences ne ſont que linéaires; par Mr. *Jean Trembley.*

Le Juillet. Traité minéralogique ſur l'ambre jaune; par Mr. *Jean Lehmann,* employé au Département des affaires étrangères et fils du célèbre Chymiſte.

Le 14 *Août.* Историческoй опытъ о внѣшней торговлѣ Государя Императора Петра Великаго, отъ 1693 года по 1719 годъ; de la part de Mr. *Kreſtinin,* correſpondant à Archangel.

Le 16 *Octobre.* Deſcriptio Caenopteridis; auctore *C. P. Thunberg.*

Mr. le Conſeiller de Collèges et Chevalier *Stritter* a envoyé la continuation de ſes matériaux pour la Bibliothèque ancienne Ruſſe; (Продолженїе древней Россійской Вивлїоѳики) par feuilles detachées.

V. Ob-

V.

Obſervations, Expériences et Notices intereſſantes communiquées à l'Académie.

I. *Charbon de Terre découvert à Kalouga.*

Mr. le Conſeiller de Cour *Sokolof*, dans une lettre adreſſée à la Conférence, datée de Borowsk le 6 Décembre de l'année paſſée et luë le 16 Janvier de cette année, mande que, quoique la bonne qualité des charbons de terre qu'il a trouvés aux environs de Kalouga, ait deja été conſtatée par des épreuves faites publiquement, en préſence de la nobleſſe de la Province, il avoit pourtant cru devoir le ſoumettre à de nouveaux eſſais, afin de s'aſſûrer de l'effet de ce foſſile dans la fonte des mines de fer. Qu'ayant été appellé pour cette fin de Kalouga à Borowsk, le Prince *Pierre Dolgorouky* avoit fait faire des expériences, dont le ſuccès avoit ſurpaſſé ſon attente; vu que ce charbon de terre avoit fondu en 3½ minutes de tems une maſſe de quatre poudes de fer de fonte. et qu'un des fondeurs les plus expérimentés, qu'on avoit fait venir de Toula, pour diriger cette fonte, avoit atteſté que ces charbons de Kalouga pourroient être employés dans les fonderies tout auſſi bien que les meilleurs charbons de bois; deſorte qu'on retireroit de leur exploitation un profit très conſidérable.

II. *Nouvelle eſpèce de rames.*

Dans une lettre écrite en Italien, adreſſée au Secrétaire des Conférences, datee de Hermannſtadt en Tranſylvanie

varie le 11 Decembre 1793 et luë le 23 Janvier de cette année, Mr. *Giuſeppe de Theſco* mande avoir inventé une nouvelle eſpèce de rames, d'une conſtruction très ſimple, et qui promettent de grands avantages tant du côté de la manoeuvre que de celui de la viteſſe des vaiſſeaux, en les faiſant aller tant avec que contre le courant. Il croit ſon invention ſurtout utile à la Marine Ruſſe, et en offre la découverte contre une récompenſe proportionnée à l'importance de l'objet. La Conférence jugea convenable d'envoyer une traduction en langue Ruſſe de la lettre de Mr. *Theſco* au Collège Impérial de l'Amirauté.

III. Voyage au Japon.

Dans une lettre d'Irkoutzk, adreſſée au Secrétaire des Conférences en date du 30 Novembre de l'année paſſée & luë à l'Académie dans la ſéance du 27 Janvier, Mr. le Conſeiller de Cour *Laxmann* notifie le retour de ſon fils, le Lieutenant *Adam Laxmann* à Ochotzk. Cet officier avoit été chargé par le Gouvernement de reconduire dans leur patrie quelques Japonois qui avoient échoué ſur les côtes des îles Kouriles, d'où ils s'étoient rendus à Irkoutzk et parmi leſquels ſe trouva auſſi le marchand *Kodoyou* qui en 1791 avoit accompagné Mr. *Laxmann* le Père à St. Péterſbourg.

D'après cette lettre Mr. le Lieutenant *Laxmann* avoit quitté la rade d'Ochotzk le 13 Septembre 1792 & y étoit retourné le 9 Septembre 1793, après un voyage de 361 jours. Ayant atteint le 8 Octobre 1792 la pointe la plus orientale de la 2e des îles Kouriles, il y paſſa l'hiver dans un port nommé *Kimoro*, & employa tout le tems de ſon ſéjour dans cette

cette île à faire l'enquête et la déſcription du pays. Ayant apris qu'il appartient à la domination Japonoiſe, il expédia un exprès au gouvernement le plus proche, pour faire annoncer ſon arrivée & les motifs de ſon voyage. D'après Mr. *Laxmann* toutes les déſcriptions & cartes que nous avons de ces îles & de leurs côtes ſont très défectueuſes: il apprit que l'île, où il avoit paſſé l'hyver & qu'on trouve dans les cartes ſous le nom de *Jéſo*, nom que les Japonois donnent à la Chine, s'appelle du nom de ſon principal port *Atkis*, & appartient au gouvernement de Matmaï. Le 4 Juin il mit à la voile & entra le 5 Juillet dans le port de Chacodad, où il reſta jusqu'au 13. Ce jour là il quitta le vaiſſeau & ſe mit en chemin pour aller par terre à la ville de gouvernement *Matmaï*, où il arriva le 16. Comme le gouverneur de Matmaï avoit écrit, dès l'arrivée de l'exprès de Mr. *Laxmann*, à la Cour de Jédo, l'Empereur y envoya deux officiers de la cinquième claſſe (Schen-Inſchi), qui arrivèrent encore avant Mr. *Laxmann* à *Matmaï*, pour lui témoigner la ſatisfaction de l'Empereur ſur le motif de ſa miſſion, mais plus encore pour empêcher la continuation de ſon voyage. Mr. *Laxmann* reſta donc à Matmaï jusqu'au 26 Juillet & revint à Chacodad le 30, & après s'y être pourvu de toutes les choſes néceſſaires pour ſon retour, il quitta la rade de ce port le 11 Aout. Le 2 Septembre il vit les rochers volcaniques de Markan, 25 Verſtes à peu près au nord d'Ochotzk & entra dans ce port le 9 Septembre, n'ayant perdu, pendant tout le voyage, qu'un ſeul matelot, mort du ſcorbut à *Nimoro*, & un vieux Japonois, nommé *Koïtz*. Durant ſon ſéjour à Matmaï Mr. *Laxmann* eut trois audiences auprès du Gouverneur & reçut trois écrits: le premier contenoit la loi, en vertu de laquelle, de tems immémorial, il eſt défendu à tout étranger d'aborder

dans

dans tout autre port que celui de Nangaſaki; le ſecond étoit une quitance ſur la livraiſon des ſujets Japonois qu'il avoit ramenés; & le troiſième, ſigné de l'Empereur & muni de trois ſceaux impériaux, contenoit la permiſſion d'envoyer annuellement un vaiſſeau marchand Ruſſe au port de Nangaſaki.

IV. *Expériences acouſtiques.*

L'auteur de l'ouvrage eſtimé: *Endeckungen über die Theorie des Klanges*, publié à Leipzig en 1787 & dédié à l'Académie *Impériale* des Sciences. Mr. *Erneſt Florent Fréderic Chladni*, Docteur en Philoſophie & en Droit à Wittenberg, étant venu cette année à St. Pétersbourg, & ayant déſiré de montrer à l'Académie les expériences intéreſſantes & nouvelles, décrites dans l'ouvrage mentionné, de même que ſon nouvel inſtrument de Muſique, connu ſous le nom d'*Euphon*: il fut invité de ſe rendre à l'Académie le 31 Mai, où il repéta, avec une adreſſée admirable, en préſence de tous les Académiciens & Adjoints, la plûpart des expériences ingénieuſes décrites dans ſa théorie du ſon, en faiſant voir les différentes configurations du ſable fin, produites à coups d'archet différemment appliqués, par les vibrations des plaques et disques de verre, fixés et tenus en différens points.

V. *Sable prétendu métallique.*

Mr. *Gerngroſs*, Conſeiller de Collèges et Préſident du premier Département du Magiſtrat à Pskow, dans une lettre adreſſée à l'Académie et lue dans la ſéance du 7 Juillet, mande qu'on trouve aux environs de Pskow un ſable métallique qui donne, par la fonte, un corps métallique dont

dont il envoye un échantillon, ainſi que du ſable même. La Conférence remit l'un et l'autre à Mr. l'Académicien *Lowitz* qui, l'ayant examiné, rapporta à la ſéance du 14 Août, avoir trouvé que le ſable métallique, que Mr. *Gerngroſs* a pris pour une production minéralogique naturelle, n'eſt autre choſe que de la limaille de cuivre jaune, contenant 51 parties de cuivre ſur 49 parties de zinc.

VI. Inflammation ſpontanée d'une compoſition métallique.

Dans une courte notice, préſentée le 11 Septembre, Mr. l'Académicien *Lowitz* fit part à la Conférence du phénomène nouveau de l'inflammation ſpontanée d'une compoſition métallique d'autant plus remarquable qu'elle s'eſt opérée ſans y employer du ſoufre que les Chymiſtes ont cru jusqu'ici eſſentiel pour engendrer l'inflammation ſpontanée des mélanges métalliques. Mr. *Lowitz* fit la ſolution d'une compoſition métallique de cuivre, de zinc et d'étain, au moyen d'un fer battu poli, et après avoir édulcoré avec de l'eau, le précipité métallique obtenu par cette opération, il le verſa ſur du papier coulant et le mit, après que l'eau eut paſſée, dans une coupelle, ſur du ſable chaud dont la température étoit cependant beaucoup au deſſous de celle de l'eau bouillante. Au moment où cette maſſe commença à ſecher, elle s'enflamma ſubitement, en ſa préſence, au point que le papier coulant s'embraſa. Mr. *Lowitz* ſe propoſe de pourſuivre ſes recherches ſur ce phénomène nouveau et d'en préſenter les réſultats ultérieurs à l'Académie.

VI. Rap-

VI.

Rapports préſentés et lus dans les Conférences académiques.

I. *Uſage du Thermomètre dans la navigation.*

L'Académie avoit reçu en 1793 un Mémoire de Mr. *Jonathan Williams: On the uſe of the thermometre in navigation*, dans lequel l'auteur prouve, par des expériences du célèbre *Franklin* et par d'autres obſervations, que l'eau de mer, dans le voiſinage des bancs de ſable et des rochers cachés, a une température ſenſiblement différente de celle des endroits plus profonds, et que cette obſervation pourroit être d'une grande utilité aux navigateurs. Sur un rapport favorable qui lui avoit été fait de ce Mémoire par Mr. l'Académicien *Schubert*, l'Académie avoit réſolu, dans ſa ſéance du 18 Février 1795, de communiquer ce Mémoire au Collège de l'Amirauté, en lui propoſant de faire vérifier, par des Officiers de Marine, les obſervations de Mr *Williams*, et le 19 Décembre elle reçut une lettre de communication du dit Collège, accompagnée des rapports que le Collège avoit reçus de L. L. E. E. Mrs. les Vice-Amiraux et Chevaliers *Gibs* et *Chanykof*, Mrs. les Contre-Amiraux et Chevaliers *Makarof* et *Tett* et des Capitaines de la Flotte Mrs. *Timachof*, *Pekin*, *Boiſſof* et *Tchitchagof*, à qui le Collège avoit fait diſtribuer 30 thermomètres faits ſelon les idées de Mr. *Williams*, en les chargeant d'examiner l'utilité de cet inſtrument pour l'objet en queſtion. Tous ces rapports, avec les obſervations de S. E. Mr. l'Amiral et Chevalier *de Krouſe*, ayant été remis, pendant les vacances de

de *Noël* à Mrs. les Académiciens *Roumovski* et *Krafft*, ces Meſſieurs donnèrent, dans la première ſéance de cette année, tenue le 9 Janvier, le réſumé ſuivant du réſultat de ces expériences.

I. Sept de ces rapports rejettent entièrement l'uſage du thermomètre, pour découvrir en mer l'approche de bas fonds. Seulement S. E. Mr. l'Amiral et Chevalier *de Krouſe*, et Mr. le Capitaine de la Flotte *Tchitchagoſ*, quoiqu'ils fuſſent à peu près du même ſentiment que les autres, ajoutent que peut être dans des mers inconnues, pendant la bonace, ou bien le vaiſſeau étant en panne, ce moyen pourroit devenir de quelque utilité. S. E. Mr. le Vice-Amiral et Chevalier *Gibs* obſerve que ce projet a déja été examiné et rejetté en Angleterre.

II. Il réſulte de toutes les expériences inſtituées et des obſervations faites et communiquées à l'Académie, que le thermomètre ne ſçauroit être employé avec avantage en mer pour l'objet en queſtion, par les raiſons ſuivantes:

1.) Selon les obſervations de Mr. le Contre-Amiral *Makaroſ* le thermomètre indique tantôt une plus grande chaleur de l'eau de mer à l'approche de bas fonds que dans l'eau profonde, tantôt la même chaleur en deux endroits de profondeur très différente, tantôt une température différente à la même profondeur du fond.

2.) Tous les obſervateurs ont trouvé que, pour peu que le vaiſſeau ſe meuve, les thermomètres, loin de plonger à la profondeur requiſe, ſurnagent et ſe tiennent à fleur d'eau, lors même qu'on y attache un poids de cinq livres.

3) Tous s'accordent auſſi à ſoutenir que le procédé demande beaucoup trop de tems, de ſorte que le malheur peut être arrivé, avant que le thermomètre ait pu indiquer le danger.

Au reſte tous les thermomètres ont été trouvés, après les expériences, remplis plus ou moins d'eau.

L'Académie ayant entendu ce rapport de Mrs. les Académiciens *Roumorski* et *Krafft* elle opina que la première des trois objections mentionnées pourroit bien ne pas décider entièrement contre Mr. *Williams*, qui a obſervé lui-même que dans des mers étroites telles que la Baltique la différence de température eſt peu trop conſidérable et ſujette à trop de variations, pour donner des concluſions exactes; mais elle trouva que les deux autres objections ſont plus graves et laiſſent peu d'eſpérance que dans des mers plus étendues le projet de Mr *Williams* pût jamais devenir utile aux navigateurs, qui préféreront toujours, et avec raiſon à l'uſage de ſes thermomètres, les moyens plus ſûrs et plus expéditifs employés jusqu'à préſent pour s'aſſûrer de l'approche des bas fonds.

II. Conducteurs électriques aux magazins à poudre.

La Chancellerie d'Artillerie et de Fortification ayant reçu l'ordre de faire garantir contre les effets de la foudre tous les magazins à poudre qui ſe trouvent dans les forteresſes de l'Empire, en y plaçant des conducteurs; elle s'adreſſa à l'Académie *Impériale* des Sciences, pour la prier de conférer avec les membres de la dite Chancellerie ſur les endroits les plus convenables à l'emplacement des conducteurs

ducteurs et ſur la meilleure manière de les conſtruire. La Conférence ayant entendu, dans ſa ſéance du 28 Avril de cette année, la lecture de la lettre de la Chancellerie, elle nomma Mrs les Académiciens *Roumovski*, *Euler* et *Krafft*, qui avoient déjà été conſultés autrefois en des cas pareils. Ces Académiciens convinrent d'abord de faire demander à la Chancellerie d'Artillerie et de Fortification les plans et les profils de tous les magazins à poudre, avec la déſcription de leur local, relativement aux bâtimens qui les entourent à une diſtance de cent toiſes pour le moins, et au ſol où ils ſont conſtruits. Auſſi firent-ils demander la permiſſion de viſiter ſur les lieux mêmes les magazins à poudre qui ſe trouvent dans la Forterеſſe de St. Pétersbourg et aux environs de la ville. En conſéquence de cette demande l'Académie reçut le 2 Juin 46 rouleaux, contenans 106 plans et profils des magazins à poudre qui ſe trouvent dans les départemens de Finnlande, de Livonie, de Kief, d'Aſtrachan et ſur les lignes de Sibirie, de l'Irtych et de Kolyvan, avec la promeſſe que les autres ſuivront dans peu, et avec la prière de prévenir la Chancellerie d'Artillerie et de Fortification du jour et de l'heure où Meſſieurs les membres du Comité établi voudront ſe rendre à la Forterеſſe et aux autres magazins aux environs de la ville, afin qu'elle puiſſe donner les ordres néceſſaires aux intendans de ces magazins. Après avoir reçu ces plans le Comité les examina dans des Conférences particulières, tenues le 5, 9, 12, 19 et 21 Juin, fit ſes remarques ſur chacun en particulier et dreſſa une inſtruction générale; et s'étant rendu le 12 et 15 aux magazins à poudre de la Forterеſſe, d'Ochta et de la Zélénaya, il dreſſa auſſi une inſtruction particulière et détaillée pour

 ces

ces magazins-là, et remit le 26 les deux inſtructions et les plans qui lui avoient été communiqués, à la Chancellerie d'Artillerie et de Fortification, où Mr l'Académicien *Roumovski* fit la lecture des deux inſtructions et répondit aux queſtions et aux doutes des membres de la Chancellerie.

III. Eruption vaſeuſe dans l'île de Taman.

Dans un rapport de Mr l'Académicien et Chevalier *Pallas*, daté d'Eliſabetgrad le 29 Juillet et lû en Conférence le 25 Août de cette année, rempli de notices intéreſſantes ſur ſon voyage en Crimée, ſe trouve une deſcription de l'éruption vaſeuſe arrivée ſur l'île de Taman au mois de Février, portant en ſubſtance ce qui ſuit:

Toute l'île de Taman, ſi j'en excepte quelques côteaux de peu d'élévation, n'a point de montagnes, et reſſemble par là, et par ſes lits de marne, à la prèsqu'île de Kertch. Mais l'une et l'autre, et particulièrement l'île de Taman, poſſède des ſingularités d'un autre genre, ſavoir des ſources abondantes de ſel et pétrole et des gouffres regorgeans un limon fluide, comme on en trouve peu. J'en ai obſervé trois ſur la prèsqu'île de Kertch et cinq à Taman. Parmi les derniers ſe trouve auſſi celui qui, au mois de Février paſſé, commença à vomir du feu, et qu'on prit alors pour un volcan naiſſant. Mais ce n'eſt qu'un gouffre limoneux dont les effets ont été plus en grand, attendu qu'il a vomi, avec fracas et éruption de feu, en ſix coulées différentes, pour le moins cent mille toiſes cubiques d'une maſſe vaſeuſe homogène et de couleur uni-

uniforme. La gerbe de feu n'a duré qu'une-demi-heure, mais la fumée a encore été viſible le lendemain, après quoi le limon a continué à couler doucement, ſans bruit et ſans chaleur. Il eſt évident que la cauſe et l'effet de ce phénomène n'ont rien de volcanique. 1) parceque la matière vaſeuſe, rendue par l'éruption, étoit froide, comme dans tous les autres gouffres vaſeux, et mêlée ſeulement de bulles d'air; 2) parceque les fragmens de ſchiſte marneux, calcaire et ſablonneux arrachés des couches ſupérieures n'ont ſubi aucun changement; 3) et ſurtout parce qu'il s'y trouve, quoiqu'en petite quantité, des cryſtaux et des lames de Pyrite qui pareillement n'ont ſouffert aucun changement. À préſent non ſeulement tout le limon débordé s'eſt durci, mais le gouffre même eſt rempli tellement de ce limon deſſèché, qu'on peut marcher deſſus. En approchant l'oreille de la terre on entend, dans l'intérieur de la montagne, un bruit ſourd ſemblable au bouillonnement d'une énorme chaudière d'eau bouillante. La montagne qui a joué ce rôle eſt ſitué ſur la côte ſeptentrionale du golfe de Taman qui touche la Severnaya Koſſa, en langue Tatare Koukou-Obo; et l'on y voit des veſtiges d'anciennes éruptions ſemblables. L'une des hauteurs les plus voiſines de la Fortereſſe de Taman doit avoir montré des éruptions de feu avant l'occupation de l'île par les Ruſſes; et c'eſt ainſi, ſelon la tradition des habitans que s'annonce ordinairement la naiſſance de nouveaux gouffres vaſeux. On voit à préſent ſur la hauteur mentionnée trois monticules de limon deſſèché aſſez hautes et ſans aucune végétation, et au pied de deux de ces monticules, ſur la partie la plus élevée de la hauteur mentionnée ſe trouvent de petits lacs ſalés ſentant la pétrole. Sur la pente de la colline, vers Temroukskoy-Liman

Liman il y a encore un petit gouffre vaſeux, et un autre plus grand, tous deux en pleine activité, régorgeant encore leur limon liquide et pouſſant, avec beaucoup de fracas de leurs entrailles, des bulles de gaz élaſtique de la groſſeur d'une tête.

IV. Matières à diſſoudre ou à délayer avec l'eau, pour éteindre promptement les incendies.

L'Académie ayant reçu de la Suède l'annonce des moyens découverts par Mr. l'Apothicaire *Nils Nyſtröm*, pour éteindre promptement le feu le plus violent: il fut réſolu dans la ſéance du 20 Janvier, 1) de refaire en petit les expériences avec les matières indiquées; 2) de faire traduire cette annonce en langue Ruſſe et de l'inſérer dans les Новыя ежемѣсячныя Сочинения. Mrs. les Académiciens *Krafft* et *Lowitz* ſe chargèrent de la répétition des expériences, et Mr. le Conſeiller de Cour *Protaſſof* de la traduction et publication de l'annonce. Le 25 Septembre Mrs. *Krafft* et *Lowitz* communiquèrent à la Conférence le réſultat de leurs expériences, en lui préſentant le rapport ſuivant:

Les différentes matières que Mr. *Nyſtröm* propoſe de diſſoudre dans l'eau ou de délayer avec l'eau dont on veut ſe ſervir pour éteindre promptement le feu, ſont ou ſimples ou compoſées.

Les matières ſimples ſont ſur 100 parties d'eau:

1)	Leſſive forte de cendres -	6	- - - -
2)	Potaſſe bien broyée - -	8	- - - -
3)	Sel commun ſec bien broyé	10	- - - -
4)	Vitriol de fer ſec bien broyé	10	- - - -
5)	Forte ſaumure de hareng	15	- - - -
6)	Alun pulveriſé - -	12	- - - -
7)	Argille ſeche bien broyée	20	- - - -

Les

Les matières compoſées ſont, ſur 100 parties d'eau

1) Argile, vitriol et ſel commun, de chaque drogue $\frac{1}{2}$ parties.
2) Leſſive forte de cendres et argile, de chaque ingrédient 6 parties.
3) Réſidu ſec et bien broyé de la diſtillation d'eau forte, et argile, de chacun 5 parties.
4) Du même reſidu et de la ſaumure d'hareng, de chacun 5 parties.

L'eau imprégrée de telle ou telle autre des onze matières rapportées, eſt, ſelon l'auteur, à peu près également efficace, cependant les matières compoſées lui paroiſſent avoir quelque préférence.

Après que nous nous eumes procuré les matières ci-deſſus indiquées, nous en fimes les mélanges dans les proportions préſcrites et le 19 de ce mois nous commerçames nos expériences en préſence de Mr. *Winterberger* Apothicaire de la grande Apothicairie. Nous primes, pour chaque expérience ſix buches de bois ſec de bouleau de la même grandeur et autant de douves de vieux tonneaux d'huile de térébenthine, que nous fimes allumer ſur un foyer et dès que tout le bûcher étoit embraſé, nous y verſames de l'une de nos ſolutions jusq'à ce que le feu étoit entièrement éteint, en notant, après chaque expérience la quantité d'eau imprégnée qu'il a ſalu pour éteindre le braſier. Pour produire complettement cet effet, il a ſalu

1)	De l'eau pure - - -	24 onces.
2)	De la ſolution de vitriol. -	22 —
3)	De la ſolution de ſel commun	8 —
4)	Solution de potaſſe	6 —

5) Solu-

5)	Solution d'alun - - -	7	onces.
6)	Leſſive de cendre - - -	9	—
7)	Eau argilleuſe - - -	10	—
8)	Saumure de hareng - -	8	—
9)	Argile et leſſive de cendre -	6	—
10)	Argile, ſel commun et vitriol	12	—
11)	Argile et réſidu d'eau forte -	6	—

Toutes ces expériences furent repétées de la même manière, en allumant ſeulement des douves de tonneaux de térébenthine. La violence du feu exigea ici conſtamment une plus grande quantité des ſolutions ſusdites mais dans le fond les réſultats furent parfaitement conformes à ceux des expériences précédentes.

A l'égard de la promtitude de l'effet produit par la moindre quantité de matière extinctive, il nous a paru que ces expériences prononçoient en faveur de la potaſſe, du ſel commun et du mélange d'argile et de réſidu d'eau forte, mais décidément en faveur de la potaſſe.

Afin de ſavoir auſſi laquelle de ces trois ſolutions préférablement efficaces garantiroit le bois le plus longtems contre l'inflammation, nous fimes encore les expériences ſuivantes, chacune avec dix douves bien ſèches de vieux tonneaux de même grandeur, en obſervant le tems néceſſaire pour leur inflammation et leur combuſtion complette.

1) Dix douves ſèches furent conſumées par le feu en 13 minutes de tems.

2) Trem-

2) Trempées dans de l'eau pure elles s'enflammèrent après 2 minutes et furent entièrement conſumées par le feu 14 minutes après l'inflammation.

3) Mouillées avec la ſolution de ſel commun elles s'inflammèrent après 6 minutes et furent conſumées après 13 minutes, à compter de l'inflammation.

4) Trempées dans le mélange aqueux d'argile et de réſidu d'eau forte, elles s'enflammèrent après 2 minutes et furent conſumées par le feu 14 minutes après l'inflammation.

5) Trempées dans la ſolution de potaſſe elles s'enflammèrent après 8 minutes et ſe conſumèrent 23 minutes après l'inflammation.

Les mêmes expériences furent repétées avec des bûches de bois de bouleau, ſoit après les avoir tenu plongées quelques minutes dans les leſſives ou de ſel commun ou de potaſſe, ſoit après les avoir laiſſé pendant 24 heures dans ces deux ſolutions, et en les expoſant à l'action du feu ou humides ou ſechées. Les réſultats furent aſſez conformes à ceux des expériences précédentes, avec la ſeule différence que le bois trempé brula plus lentement. On n'eſt pas, à la vérité, dans des expériences de cette nature, aſſez maître des circonſtances, pour oſer s'attendre, lorsqu'on les répète ſouvent, à un parfait accord dans les tems obſervés de combuſtion, néanmoins la préférence de la potaſſe fut auſſi confirmée par ces dernières expériences.

Ainſi la potaſſe ſe diſtingue non ſeulement comme moyen efficace dans l'extinction du feu, mais elle garantit auſſi les matières combuſtibles, expoſées à ſon action, le plus longtems contre une nouvelle inflammation, propriété qui, dans les in-

cendies, fait gagner du tems, pour mettre partout des bornes à l'effet déſtructeur de la flamme.

Ce n'eſt pas que nous prétendions qu'on s'en tienne uniquement à la potaſſe, à l'excluſion des autres drogues propoſées par Mr. *Nyſtröm*. On pourra ſans doute, au défaut de la potaſſe, qu'on ne peut pas avoir partout aſſez facilement et à un prix aſſez bas, avoir recours aux autres ingrédiens propoſés, et en attendre un bon effet, à l'excluſion cependant du vitriol de fer qui, dans toutes nos expériences, s'eſt montré conſtamment peu efficace.

Au reſte, quoique les moyens d'extinction indiqués par Mr. *Nyſtröm* contre les incendies ne ſoyent pas abſolument nouveaux, ils ne ſont pas auſſi univerſellement connus qu'ils mériteroient de l'être; et en y rendant attentif le public on ſera ſûr d'avoir contribué au bien général.

VII.

Leçons publiques.

Le public connoît déjà par l'Hiſtoire de l'Académie de 1784, qui précède le ſecond Tome des *Nova Acta*, le nouvel établiſſement de quatre leçons publiques en langue Ruſſe, et il ſçait, par l'Hiſtoire des années ſuivantes, avec quelle régularité ces leçons ont été continuées. Auſſi cette année deux Académiciens et deux Adjoints de la nation donnèrent, en langue Ruſſe, chacun deux fois par ſemaine, pendant les quatre mois d'été, des leçons publiques aſſidument fréquentées.

Mr.

Mr. l'Académicien *Kotelnikof* donna un cours de Géométrie, d'Algèbre et de Méchanique, qu'il commença le 11 Mai et finit le 19 Septembre.

Mr. l'Académicien et Chevalier *Ozeretzkovski* donna un cours d'Hiſtoire naturelle, qu'il commença le 8 Mai et finit le 19 Septembre.

Mr. l'Adjoint *Kononof* un cours ds Phyſique expérimentale, commencé le 12 Mai et fini le 29 Septembre.

Mr. le Adjoint *Zacarof* un cours de Chymie théorétique, ſelon le ſyſtème de *Lavoiſier*, commencé le 13 Mai et fini le 23 Septembre.

VIII.
Ouvrages publiés.

L'Académie publia, dans le courant de cette année, outre pluſieurs Mémoires, ouvrages périodiques et traductions en langue Ruſſe, les ouvrages proprement académiques ſuivans:

1) Nova Acta Academiae *Imperialis* Scientiarum Petropolitanae. Tomus VIII. Praecedit Hiſtoria ejusdem Academiae ad annum MDCCXC. Petropoli 1794.

Ce volume contient, outre quelques petits Mémoires de Savans étrangers, inſérés dans la partie hiſtorique, treize Mémoires de Mathématique, ſept de Phyſique et d'Hiſtoire naturelle et trois d'Aſtronomie et de Météorologie.

2) *Leonhardi Euleri* Inſtitutionum Calculi integralis Tomus IV, continens Supplementa partim inedita, partim jam in Operibus Academiae *Imperialis* Scientiarum Petropolitanae impreſſa. Petropoli 1794.

Ce Supplément appartient proprement à la nouvelle édition du Calcul intégral de feu Mr. *Euler*, que l'Académie a publiée, et dont le premier et ſecond volume ont paru en 1792 et le troiſième en 1793.

IX.

Prix adjugé.

L'Académie, dans ſon Programme du 16 Février 1791 et du 1 Janvier 1792, avoit promis un prix de cent Ducats d'Hollande au Savant qui aura le mieux répondu à la queſtion ſuivante de Géographie phyſique:

„Ex obſervationibus acus magneticae antiquis et re„centioribus definire ſtatum globi noſtri terraquei ma„gneticum, id eſt polorum telluris magneticorum „poſitiones, vires, motus: indeque pro initio ſaeculi „XIX. conſtruere mappam terrae magneticam, obſer„vationibus, tam in terra firma quam mari factis, con„ſentaneam et conſimilem illi, quam pro ſaeculi XVIII. „initio conſtruxit *Edm. Halley*; ex utriusque denique, „et quotquot praeſtantiores extant aliarum comparatione „de flexibus meridianorum magneticorum et curvarum „declinationis, et de legibus imprimis variationum, „quas iſtae lineae, ratione ſive poſitionis ſive etiam „curvedinis forſan ſuae, ſucceſſu temporis ſubeunt, ex„perientiis conformia elicere judicia, eaque uſui nau„tico applicare.‟

Le terme de rigueur, fixé pour la réception des Mémoires, étant expiré le 31 Décembre de l'année paſſée, l'Aca-

l'Académie n'avoit encore reçu qu'un ſeul Mémoire: *Tentamen reſolvendi problema geographico-magneticum, ab Academia Scientiarum Imperiali Petropolitana propoſitum*, avec une carte magnetique et la deviſe: *In arduis tentaſſe non ultima laus eſt.* Ce Mémoire fut communiqué à S. E. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel et Chevalier *Aepinus* et à Mr. l'Académicien et Chevalier *Krafft*, qui, après avoir lu et examiné le mappemonde magnetique, en portèrent le jugement ſuivant que Mr. l'Académicien *Krafft* expoſa à la Conférence dans la ſéance du 6 Décembre.

Comme le Mémoire en queſtion eſt inſuffiſant pour juger de la juſteſſe des principes qui ont guidé l'auteur dans la conſtruction de ſa carte, où d'ailleurs les méridiens magnetiques, ou les courbes de déclinaiſon paroiſſent avoir été tracées avec beaucoup d'exactitude, à en juger d'après la comparaiſon avec les obſervations les plus récentes faites ſur la declinaiſon de l'aiguille aimantée en pluſieurs endroits du vaſte Empire de Ruſſie; le ſentiment de Mrs. le examinateurs eſt:

1) De ne donner à l'auteur que la moitié du prix, c'eſt à dire cinquante Ducats d'Hollande, après qu'il ſe ſera fait connoître, ou aura conſenti à l'ouverture de ſon billet qui reſtera cacheté en attendant;

2) De faire imprimer le Mémoire et graver la carte qui, ſans être poſitivement approuvée par l'Académie, ſera diſtribuée et repandue dans le public, afin que les perſonnes qui ſeront à portée de la comparer avec les obſervations faites ſur la déclinaiſon, en pluſieurs parties de la ſurface de la terre, puiſſent en examiner la juſteſſe.

3) De

3) De payer l'autre moitié du prix, lors qu'on aura trouvé que les obſervations, qu'on a eu le tems de raſſembler, s'accordent ſuffiſamment avec les déclinaiſons magnétiques marquées ſur la carte.

L'Académie ayant unanimement accédé à ce ſentiment de Mrs. *Aepinus* et *Krafft*, il fut réſolu de le rendre public par la voye d'un Programme qu'on ſera imprimer au commencement de l'année prochaine.

X.

Nouvelles queſtions propoſées.

Dans la ſéance du 22 Décembre il fut arrêté de propoſer deux nouvelles queſtions pour 1796, dans le même tems qu'on publiera l'adjudication du demi-prix mentionné, ſavoir une queſtion indéterminée de Mécanique et une autre queſtion de Chymie, déterminée. Mais comme le programme ne pouvoit plus être imprimé cette année, à cauſe des vacances de Noël, il fut réſolu de publier préalablement l'annonce ſuivante, par un ſupplement aux gazettes allemandes:

I. L'Académie *Impériale* des Sciences, eſpérant qu'une queſtion indéterminée ſera plus propre à faire naître des inventions utiles et des recherches importantes, elle a réſolu de promettre un prix de cinquante Ducats d'Hollande à celui qui, avant le 31 Décembre 1795, lui aura préſenté l'invention mécanique la plus importante et la plus utile en fait de machines, ou bien auſſi à celui qui lui aura envoyé, avant ce terme, le meilleur Mémoire théorétique ſur un ſujet quelconque de Mécanique.

II. La

II. La leſſive du ſang eſt une des plus utiles productions chymiques, non ſeulement parce qu'elle ſert à la fabrication du bleu de Pruſſe ſi recherché, mais encore, parce qu'elle fournit au Chymiſte un des réactifs et moyens de décompoſition les plus néceſſaires. Les recherches faites par les plus habiles Chymiſtes nous ont appris que le principe colorant de la leſſive du ſang réſide dans un acide particulier très compliqué; mais la nature de cet acide, ou plûtot celle de ſon principe colorant, nous eſt encore entièrement cachée. Nous ſavons encore qu'outre le ſang toute autre ſubſtance reductible en charbon eſt propre, en quelque façon, à produire de la leſſive du ſang. Mais la ſeule méthode uſitée jusqu'ici pour préparer la leſſive du ſang, par la calcination, paroît être défectueuſe, parceque la matière colorante, ayant une ſi grande facilité à ſe décompoſer, eſt détruite, en grande partie, par le feu, dans cette violente opération, ce qui non ſeulement fait avorter quelquefois l'opération, mais empêche auſſi la ſaturation parfaite de la leſſive du ſang, ſaturation qui par la voye humide réuſſit toujours, comme nous voyons dans la leſſive de ſang de Maquer, tirée du bleu de Pruſſe. Ces conſidérations engagent l'Académie à inviter les Chymiſtes à décider, par des recherches ultérieures et des expériences nouvelles, les points ſuivans:

1) Quelle eſt la nature de la leſſive du ſang? l'acide phoſphorique et l'alcali volatil en ſont-ils des parties conſtituantes eſſentielles, ou ſeulement acceſſoires?

2) La-

2) Laquelle des trois parties conſtituantes du ſang ſi faciles à ſégréger, la ſéreuſe, la lymphatique ou la fibreuſe eſt la plus riche en ſubſtance colorante et la plus propre à la ſaturation de l'alcali? Ce point décidé, on ſe veroit peut être en état de ſubſtituer au ſang avec avantage une autre ſubſtance.

3) On déſire ſurtout une méthode plus avantageuſe de préparer, par la voye humide, la leſſive du ſang primordiale.

EX-

EXTRAITS
DES MÉMOIRES
CONTENUS
DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De inſigni uſu Calculi Imaginariorum in Calculo integrali.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Lorsque Z indique une fonction de z telle que l'Intégrale $\int Z \partial z = V$ puiſſe être exprimée ſoit algébriquement, ſoit par des logarithmes ou des arcs de cercle, en ſubſtituant à la place de z une quantité imaginaire quelconque

$$z = y(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta);$$

la fonction Z prendra la forme $Z = M + N.\sqrt{-1}$; l'intégrale V ſe revêtira auſſi d'une forme pareille

$$V = P + Q.\sqrt{-1}$$

et il y aura $\int M\partial y = P\cos\theta + Q\sin\theta$

$$\int N\partial y = Q\cos\theta - P\sin\theta$$

deſorte que, lorsque les quantités P et Q ſeront trouvées, on ſera en état d'aſſigner les valeurs de M et N, ce qui n'aura aucune difficulté, toutes les fois que l'Intégrale V ſera algébrique; mais lorsqu'elle renferme des logarithmes ou des arcs circulaires, il n'eſt pas ſi facile de trouver les valeurs de P et Q, parceque la réduction de V à la forme $P + Q\sqrt{-1}$ rencontre quelquefois d'aſſez grandes

diſſicultés. L'objet de ce Mémoire eſt de faciliter cette reduction, en faiſant voir que

$$l\,(a+b\sqrt{-1}) = l\,(\sqrt{aa+bb}) + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{A\,tg}\,\frac{b}{a},$$

$$l\,\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{A\,tg}\,\frac{b}{a},$$

$$l\,a\,(\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\sin\alpha) = l\,a + \alpha\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A\,tg}\,(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{A\,tg}\,\frac{2a}{1-aa-bb} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{(1+b)^2+aa}{(1-b)^2+aa}$$

$$\mathrm{A\,tg}\,a\,(\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\sin\alpha) = \tfrac{1}{2}\mathrm{A\,.\,tg}\,\frac{2a\cos\alpha}{1-aa} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{1+2a\sin\alpha+aa}{1-2a\sin\alpha+aa}.$$

Ces transformations ſervent de baſe à une ſuite de problémes, où une fonction donnée Z de z eſt reduite à la forme $A + B\sqrt{-1}$, après avoir mis $z = y\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$. L'intégration de la formule différentielle $\frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}}$, ſervant d'exemple de l'utilité de ces reductions dans le calcul intégral, termine le Mémoire.

II.

De formulis ſpeciei $mxx + nyy$, ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus.

Auctore *L. Eulero*, pag. 22.

Lorsque m et n ſont des nombres poſitifs, ſi un nombre N eſt contenu de deux manières différentes dans la forme $mxx + nyy$, de ſorte que $N = maa + nbb$ et $N = mcc + ndd$, en reduiſant la fraction $\frac{a \pm c}{b \pm d}$ à ſes moindres termes $\frac{p}{q}$, de même que la fraction $\frac{mpp}{nqq} = \frac{r}{s}$, dans le cas que $r + s$ eſt un nombre impair il ſera facteur du nombre N; s'il eſt pair, ſa moitié $\frac{r+s}{2}$ ſera facteur de ce nombre N. De là il ſuit que tout nombre contenu plus d'une

d'une façon dans la forme $mxx + nyy$ ſera un nombre *compoſé* ou *non-premier*.

Cependant il faut ſe garder d'en conclure que tous les nombres qui ne ſont contenus que d'une ſeule manière dans la forme $mxx+nyy$ ſoyent premiers; car il y a très certainement une infinité de valeurs pour m et n, pour lesquelles la formule $mxx+nyy$ renferme des nombres compoſés, quoiqu'ils n'y ſoyent contenus que d'une ſeule maniere; tandis qu'il y en a d'autres nombres m et n, pour lesquelles la formule $mxx + nyy$ renferme des nombres compoſés, quoiqu'ils n'y ſoyent contenus que d'une ſeule manière; tandis qu'il y en a d'autres nombres m et n, pour lesquelles la propoſition inverſe mentionnée a évidemment lieu. Il eſt donc intéreſſant de connoître les valeurs de m et n qui rendent la formule $mxx+nyy$ telle qu'un nombre qui n'y eſt contenu que d'une ſeule façon, ſoit premier. C'eſt le ſujet qui a occupé feu Mr. *Euler* dans le préſent Mémoire, où il donne une table de ces nombres m et n qu'il appelle nombres *congrus* et dont il y démontre les propriétés remarquables ſuivantes:

1) Si la formule $mxx + nyy$ eſt congrue, la formule $mnxx + yy$ le ſera auſſi, et *vice verſa*.

2) Dans la ſuite des nombres congrus mn il ne ſe trouve d'autres nombres quarrés que 1, 4, 9, 16 et 25.

3) Lorsque un nombre congru eſt de la forme $4\alpha - 1$, ſon quadruple $4(4\alpha - 1)$ ſera auſſi un nombre congru.

4) Si i eſt un nombre impair, et que $4i$ eſt un nombre congru, ſon quadruple $16i$ ſera auſſi un nombre congru.

5) A

5) λ étant un nombre quelconque, ſi $\lambda\lambda i$ eſt un nombre congru, i même ſera auſſi un nombre congru.

6) Si un nombre congru eſt de la forme $3\alpha - 1$, ſon noncuple $9(3\alpha - 1)$ ſera auſſi un nombre congru.

7) Si un nombre impair de la forme $4\alpha + 1$ eſt congru, ſon quadruple $4(4\alpha + 1)$ ne ſçauroit l'être.

8) Si un nombre congru eſt de la forme $4\alpha + 2$, ſon quadruple $4(4\alpha + 2)$ le ſera auſſi.

9) Si i marque un nombre impair et que $8i$ eſt un nombre congru, ſon quadruple $32i$ ne ſçauroit être tel.

10) Et ſi $16i$ eſt un nombre congru, ſon quadruple $64i$ ne ſçauroit l'être.

11) i étant un nombre congru d'une forme quelconque; ſi $i + aa = pp < 4i$, p étant nombre premier, ſon quadruple $4i$ ne ſçauroit être un nombre congru.

Parmi les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10000 Mr. *Euler* n'a pu trouver que 65 nombres congrus, et il lui paroît vraiſemblable qu'il n'y en a pas d'avantage; ce qui feroit d'autant plus remarquable que dans toute l'Analyſe on ne connoît jusqu'ici aucune ſuite de nombres qui conſiſtât en un nombre de termes fini.

III. De

III.

De evolutione poteſtatis polynomialis cujuscunque $(1+x+x^2+x^3+x^4+\&c.)^n$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

Tous les Géomètres connoiſſent la ſignification des caractères $(\frac{n}{0})$, $(\frac{n}{1})$, $(\frac{n}{2})$, $(\frac{n}{3})$, &c. dont feu Mr. *Euler* s'eſt ſervi pour indiquer les coëfficiens de la n^{me} puiſſance du Binome, et les grands avantages qu'il a retiré de ce ſymbolisme, pour découvrir pluſieurs propriétés remarquables de ces coëfficiens. Dans le préſent Mémoire ſon deſſein a èté de déterminer les coëfficiens de la n^{me} puiſſance du Trinome qu'il déſigne par les caractères $(\frac{n}{0})^3$, $(\frac{n}{1})^3$, $(\frac{n}{2})^3$, &c. au moyen de ceux du Binome $(\frac{n}{0})^2$, $(\frac{n}{1})^2$, $(\frac{n}{2})^2$, &c. de même que les coëfficiens du Quadrinome, par ceux du Trinome, et ainſi de ſuite.

Pour effectuer ceci il développe le Trinome $(1+x(1+x))^n$, et comme le terme général de cette puiſſance développée eſt $(\frac{n}{\alpha})^2 x^\alpha (1+x)^\alpha$, en développant $(1+x)^\alpha$ le terme général ſera $(\frac{\alpha}{\beta})^2 x^\beta$. Ainſi le coëfficient du terme $x^{\alpha+\beta}$ ſera $(\frac{\alpha}{\beta})^2 (\frac{n}{\alpha})^2$; de ſorte que, pour obtenir le coëfficient $(\frac{n}{\lambda})^3$ de la puiſſance x^λ dans le Trinome $(1+x+xx)^n$ développé, on n'a qu'à donner à α et β toutes les valeurs en nombres entiers qui rendent $\alpha+\beta=\lambda$, et on aura

$$(\frac{n}{\lambda})^3 = (\frac{\lambda}{0})^2 (\frac{n}{\lambda})^2 + (\frac{\lambda-1}{1})^2 (\frac{n}{\lambda-1})^2 + (\frac{\lambda-2}{2})^2 (\frac{n}{\lambda-2})^2 + \&c.$$

D'une manière ſemblable l'auteur procède pour trouver le coëfficient $(\frac{n}{\lambda})^4$ de la puiſſance x^λ dans le Quadri-

nome

nome développé $(1 + x + x^2 + x^3)^n$, et le coëfficient $(\frac{n}{\lambda})^5$, du même terme x^λ dans le Quinome $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^n$, ce qui le conduit enfin à l'expreſſion générale du coëfficient $(\frac{n}{\lambda})^{\theta+1}$ du terme x^n dans le Polynome développé

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^\theta)^n,$$

qui eſt

$$(\tfrac{n}{\lambda})^{\theta+1} = (\tfrac{n}{\lambda})^2 (\tfrac{\lambda}{0})^\theta + (\tfrac{n}{\lambda-1})^2 (\tfrac{\lambda-1}{1})^\theta + (\tfrac{n}{\lambda-2})^2 (\tfrac{\lambda-2}{2})^\theta + \&c.$$

IV.

Specimen transformationis ſingularis ſerierum.

Auctore *L. Eulero*, pag. 58.

Les ſéries, dont il eſt queſtion dans ce Mémoire, ſont compriſes ſous la forme générale:

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{\Pi (a+1)(b+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{\Pi (a+2)(b+2)}{3(c+2)} x^3 + \&c.$$

où Π marque dans chaque terme le coëfficient du terme précédent: elle devient une expreſſion finie toutes les fois que a ou b eſt un nombre entier négatif, et elle a cela de remarquable qu'en mettant $s = z(1-x)^{c-a-b}$, $c - a = \alpha$, $c - b = \beta$, z ſera exprimé par une ſérie parfaitement ſemblable à la propoſée, ſavoir:

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c} x + \frac{\Pi (\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{\Pi (\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)} x^3 + \&c.$$

L'Analyſe qui a conduit l'Auteur à cette transformation ſinguliere conſiſte à transformer la ſérie propoſée en une équation différentielle du ſecond degré, opération qui s'effectue facilement et qui donne

$$x(1-x)\frac{dds}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{ds}{dx} - ab = 0.$$

Or

Or en mettant $s = (1 - x)^n z$, on trouve

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial z}{z} - \frac{n \partial x}{1-x} \text{ et } \frac{\partial \partial s}{s} = \frac{\partial \partial z}{z} - \frac{2n\partial x \partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}$$

et ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation différentielle du ſecond degré, on obtient

$$x(1-x)\frac{\partial \partial z}{z} + [c + (a+b-2c-1)x]\frac{\partial z}{z} - (c-a)(c-b) = 0.$$

ou bien, à cauſe de $c - a = \alpha$, $c - b = \beta$,

$$x(1-x)\frac{\partial \partial z}{z} + [c - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{\partial z}{z} - \alpha\beta = 0$$

équation qui ſe déduit auſſi de la précédente, en changeant s, a et b en z, α et β. En faiſant donc le même changement dans la ſérie propoſée il en réſultera l'autre ſérie et la relation mutuelle entre les deux ſéries eſt la même qui ſubſiſte entre les deux équations différentielles, ſavoir $c - a = \alpha$, $c - b = \beta$ et $s = (1 - x)^n z$, où l'expoſant $n = c - a - b$.

L'auteur déduit auſſi la ſeconde ſérie d'une manière directe de la dernière équation différentio-différentielle; et il termine ſon Mémoire par faire voir le grand avantage qu'on peut retirer de cette transformation pour la démonſtration rigoureuſe d'un Théorème de Calcul intégral qu'il avoit trouvé autrefois par une ſimple conjecture et qui eſt ici complettement démontré, ſavoir que :

$$\left(\frac{i+n}{i}\right)(1 - aa)^{-n}\int \Delta^n \partial\Phi \operatorname{coſ} i\Phi =$$
$$\left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1 - aa)^{n+1}\int \Delta^{-n-1} \partial\Phi \operatorname{coſ} i\Phi,$$

où $\Delta = 1 + aa - 2a \operatorname{coſ} \Phi$. (Voyez ſur ce Théorème le Mémoire: *Demonſtratio Theorematis inſignis per conjecturam eruti, in Inſtit. Calc. Integr. Tomo IV. Supplem. pag. 257.*

V.

Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non ſolum ipſas, ſed etiam quascunque earum poteſtates per ſeries concinnas exprimendi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 71.

Feu Mr *Euler* avoit déjà traité cette même matière dans un Mémoire antérieur à celui-ci, qui ſe trouve dans le Tome XV. des nouveaux Commentaires ſous le titre: *Obſervationes circa radices aequationum*, où il avoit donné une ſerie infinie, exprimant la n^{me} puiſſance de la plus grande racine de l'équation algébrique d'un degré quelconque

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \&c.$$

Dans le préſent Mémoire il eſt revenu ſur le même ſujet; or il y traite non ſeulement une équation beaucoup plus générale

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \&c.$$

mais la méthode même qu'il y employe, pour trouver, par une ſérie infinie, la n^{me} puiſſance de la racine x, eſt auſſi plus directe et plus facile; cependant elle n'eſt pas de nature à pouvoir s'en faire une idée préciſe, ſans entrer dans des détails que les Analyſtes aimeront mieux lire dans le Mémoire même, où nous nous voyons obligé de renvoyer.

VI. De

VI.

De corporibus cylindricis incurvatis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 91.

Le cylindre droit étant engendré par le mouvement du centre de la baſe ſur une ligne droite, le plan de la baſe reſtant toujours perpendiculaire à cette ligne; de même un corps cylindrique ployé ou courbé ſera engendré, ſi le centre de la baſe eſt mû dans une ligne courbe quelconque, de manière que le plan de la baſe conſerve, dans chaque point, une poſition perpendiculaire à la tangente menée par ce même point de la courbe de ſorte que toutes les ſections du corps cylindrique, faites perpendiculairement à la courbe qui en eſt l'axe ſoyent des cercles. L'équation entre les trois coordonnées x, y, z pour un point de la ſurface de ce corps ſe déduit des expreſſions générales $x = t - \frac{s\sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + ss}}$ et $y = u + \frac{\sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + ss}}$, où t et u ſont les coordonnées de de la courbe directrice, $s = \frac{\partial u}{\partial t}$ et a le rayon du cercle générateur, comme l'Auteur avoit déjà fait voir dans un Mémoire: *Inveſtigatio ſuperficierum quarum Normales ad datum planum productae ſint omnes inter ſe aequales.* (V. Nova Acta Tom. X. pag. 41.)

Dans le préſent Mémoire feu Mr. *Euler* a donné plus d'extenſion à cette idée, en conſidérant au lieu du cercle, une courbe quelconque, dont un point ſe promène le long d'une ligne courbe quelconque comme directrice, de manière que le plan de la figure reſte toujours perpendiculaire à la tangente menée par chaque point de la directrice où le plan ſe trouve alors. La Directrice eſt ſuppoſée d'abord ſituée

dans un ſeul et même plan, mais l'auteur fait voir dans la ſuite que les mêmes concluſions ont lieu, lors même que la directrice eſt une courbe à double courbure. Ces concluſions ſont: que la ſurface et la ſolidité de pareils corps cylindriques, pliés à volonté, peut être déterminée au moyen de la fameuſe règle de *Guldin*, c'eſt-à-dire, en multipliant l'arc de la courbe génératrice, et ſa ſurface, par le chemin qu'à décrit le centre de gravité de la figure. en obſervant toutefois que là où le chemin du centre de gravité n'à point de courbure, il faut avoir recours à la réſolution du mouvement en progreſſif et gyratoire autour d'un axe paſſant par le centre de gravité. Car de cette manière la direction du mouvement, non ſeulement du centre de gravité, mais de tous les points de la figure génératrice, ſera dans chaque point de la courbe directrice perpendiculaire au plan de la figure mue condition qui eſt neceſſaire, pour qu'on puiſſe appliquer la règle de *Guldin* à la recherche de la ſurface et de la ſolidité du corps en queſtion.

VII.

Inveſtigatio trianguli, in quo diſtantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 101.

Ce Mémoire, qui ſera plaiſir au petit nombre d'Amateurs de l'Analyſe indéterminée, contient une très belle ſolution du problème énoncé dans le titre: là voici en peu de mots: Soyent les cotés du triangle cherché $= a$, $= b$, $= c$, et les droites tirées de leurs milieux vers les angles oppoſés réſpectivement f, g, h. Prenez à volonte deux nombres

bres q et r et cherchez $M = \frac{5qq - rr}{4qq}$ et $N = \frac{5rr - 9qq}{4rr}$. Reduiſez la fraction $\frac{(M-N)^2-4}{4(M+N)}$ à ſes moindres termes et nommez le numérateur x et le dénominateur y, et vous aurez le côté $2a = qx + (M - N)qy$ et la ligne $f = rx - \frac{1}{2}(M - N)ry$. Faites $p = x + y$ et $s = x - y$, et vous aurez les côtés $2b = pr - qs$ et $2c = pr + qs$; et les lignes $g = \frac{3pq + rs}{2}$ et $h = \frac{3pq - rs}{2}$.

VIII.

Integratio formulae differentialis $N^{nx} x^m \partial x (a + bx + cx^2 + kx^3 + \&c.)(e + fx + gx^2 \&c.)^p \times (h + rx + tx^2 + \&c.)^q$, in qua N eſt numerus, cujus logarithmus hyperbolicus eſt unitas, quantitates vero $n, m, a, b, c, k, l, e, f, g, h, r, t, p, q$ quaelibet datae.

Auctore *Daniele Melanderhielm*, pag. 114.

L'illuſtre Académicien Suédois, de qui l'Académie tient le préſent Mémoire, obſerve avec raiſon, qu'au défaut d'un ſyſtême complet de calcul intégral, cette partie des Mathématiques, qui fraye le chemin à la ſolution des plus importans problèmes de Mécanique et d'Aſtronomie phyſique, ne ſçauroit être perfectionnée et complettée, qu'autant que ceux qui donnent leur tems et leurs ſoins à des recherches de cette nature concourent chacun de ſon côté à l'enrichir, en rendant publiques les intégrations qui leur ont reuſſi, ſans en excluré celles qui pourroient ne pas paroître d'une importance majeure.

Parmi

Parmi les fonctions différentielles à une variable les plus difficiles à intégrer et pour lesquelles on a le moins de régles, ſont celles qui ſont affectées de puiſſances à expoſant variable du nombre qui eſt la baſe des logarithmes hyperboliques, et telle eſt celle qui fait le ſujet de ce Mémoire. Pour trouver l'Intégrale de cette formule très générale, Mr. le Chevalier *de Melanderhielm* fait uſage de la méthode des Indéterminées, où la principale difficulté conſiſte ordinairement dans le choix des formes, avec leſquelles il faut inſtituer la comparaiſon à faire, pour avoir la valeur des Indéterminées introduites dans le calcul, difficulté que l'auteur du Mémoire a ſçu ſurmonter avec beaucoup de ſagacité et d'adreſſe.

XI.

Summatio plurium ſerierum ex ſinibus et coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatarum.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 125.

Toutes les fois que la ſomme de cette ſérie infinie eſt connue: $Az^{m} + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + Dz^{m+3n} +$ &c. on peut auſſi trouver les ſommes S et T des deux ſéries ſuivantes:

$A \operatorname{coſ} m\psi + B \operatorname{coſ} (m+n)\psi + C \operatorname{coſ} (m+2n)\psi$ &c. $= S$

$A \operatorname{ſin} m\psi + B \operatorname{ſin} (m+n)\psi + C \operatorname{ſin} (m+2n)\psi$ &c. $= T$

Car en mettant $\operatorname{coſ}\psi + \sqrt{-1}\operatorname{ſin}\psi = p$ et $\operatorname{coſ}\psi - \sqrt{-1}\operatorname{ſin}\psi = q$, à cauſe de $\operatorname{coſ}\mu\psi + \sqrt{-1}\operatorname{ſin}\mu\psi = p^{\mu}$ et $\operatorname{coſ}\mu\psi - \sqrt{-1}\operatorname{ſin}\mu\psi = q^{\mu}$, on aura

S +

$$S + T\sqrt{-1} = Ap^m + Bp^{m+n} + Cp^{m+2n} + \&c. = P$$
$$S - T\sqrt{-1} = Aq^m + Bq^{m+n} + Cq^{m+2n} + \&c. = Q$$

où P et Q ſont connus par hypothèſe, et par conſéquent auſſi $S = \frac{P+Q}{2}$ et $T = \frac{P-Q}{2\sqrt{-1}}$.

La ſeule difficulté qu'on rencontre, lorſqu'on veut faire l'application de cette méthode générale à la ſommation des ſéries compoſées des ſinus ou des coſinus d'arcs qui conſtituent une progreſſion arithmétique, conſiſte à donner à P − Q la forme $Q\sqrt{-1}$, c'eſt-à-dire, une forme telle qu'on puiſſe le diviſer par $\sqrt{-1}$, pour que les imaginaires ſe détruiſent et que la ſomme T ſe préſente ſous une forme réelle. Car ſouvent la différence P − Q ſe préſente ſous une forme réelle & la ſomme T ſous une forme imaginaire, et il faut avoir recours à des reductions et transformations aſſez recherchées pour arriver à ce but. L'auteur de ce Mémoire en donne pluſieurs exemples dans une ſuite de problèmes où non ſeulement il a l'occaſion d'employer de pareilles reductions et transformations de plus d'une eſpèce, mais qui, indépendamment de cet objet, ont encore un interêt particulier, entant qu'ils fourniſſent la ſommation d'un grand nombre de ſéries remarquables, en partie nouvelles et en partie ſommées par d'autres Géomètres et au moyen d'autres méthodes.

X. Re-

X.

Recherches ſur quelques cas d'équilibre dans les fils parfaitement flexibles.

Par Mr. *Nicolas Fuſs*, pag. 145.

Ce Mémoire doit ſa naiſſance au projet d'un pont ſuspendu par des chaines verticales à quatre chaines tendues d'un bord de la Neva à l'autre, dont la déscription avoit été préſentée à l'Académie. Mr. *Fuss* ayant été chargé d'examiner ce Mémoire, il s'attacha principalement à la recherche de la force des chaines tendues, en examinant ſi elles ſeroient en état de porter le poids requis ſans ſe rompre. Pour cet effet il falloit connoitre la tenſion dans chaque point, et ſurtout aux extrémités, ce qui fit naitre la ſolution de ce problème: Si chaque élément d'une chaine (ou corde) ſuspendue aux extrémités d'une ligne horiſontale, porte, outre ſon propre poids, encore un poids proportionnel à l'élément correſpondant de la ligne horiſontale, trouver la courbe que la chaine formera dans l'état d'équilibre et la tenſion dans chaque point.

Mais avant de paſſer à la ſolution de ce problème l'auteur a jugé bon d'entreprendre la ſolution du problème ſuivant beaucoup plus général: Si à chaque élément d'un fil parfaitement flexible, ſuspendu dans deux points quelconques ſont appliquées des forces quelconques, déterminer la figure que le fil aura, lorsqu'il ſera en équilibre. Ce problème eſt réſolu de deux manières: premièrement en faiſant uſage du principe des momens, et enſuite au moyen de celui

celui des tenſions, àfin de pouvoir déterminer celle-ci. Après quoi l'auteur fait voir le parfait accord de ces deux ſolutions tant en général qu'en particulier, en les appliquant l'une et l'autre au problème connu de la chainette. Il paſſe de là au problème ci-deſſus énoncé et termine le le Mémoire par l'application de ce dernier problème à l'examen du projet qui lui en a ſuggéré l'idée.

XI.

Trigonometria ſphaerica e *Ptolemaeo.*

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 165.

L'auteur de ce Mémoire déduit d'un ſeul Théorème, dont *Ptolemée* s'eſt ſervi pour réſoudre quelques cas qui ſe préſentent dans un Triangle ſphérique rectangle (*Almag. Liv. I. Ch. 12.*), la ſolution de tous les problèmes de la Trigonométrie ſphérique. Cette methode, plus ſimple et plus courte qu'aucune autre, lui a paru mériter quelque attention, ne fut-ce que pour revendiquer au fondateur de l'Aſtronomie, l'honneur d'avoir fondé pareillement une autre ſcience qu'on peut regarder comme la ſource de celle-là.

XII.

Mémoire ſur la ſolution des principaux problèmes qu'on peut propoſer dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe.

Par Mr. *S. Gourieff*, pag. 176.

L'auteur de ce Mémoire ayant cru remarquer que la méthode, dont les Géomètres ſe ſervent, pour déterminer la

tangente de l'angle de courbure, la ſoûtangente, le rayon oſculateur, la rectification, la quadrature, la ſurface et la ſolidité des corps de révolution, ou Conoïdes curvilignes, et le centre de gravité, pour des lignes courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe, eſt différente de la méthode qu'ils employent lorsque les ordonnées ſont priſes parallèles entr'elles: ſon intention eſt, dit-il, de dériver ici tout cela des mêmes principes, qui ont lieu dans les courbes à ordonnées parallèles, c'eſt ce qu'il effectue conformément à ſon but, qui eſt d'éviter toute idée de l'infini, et de ne point faire uſage des triangles caractériſtiques infiniment-petits, qu'on employe dans la méthode ordinaire avec un avantage ſi marqué, mais acheté, ſelon les rigoriſtes, aux dépens de la rigueur géométrique.

La route directe que l'auteur a ſuivie, le conduit avec aſſez de facilité, qui ſe fait ſentir ſurtout dans la détermination du centre de gravité des eſpaces curvilignes, aux formules générales connues, dont il éclaircit l'uſage par des applications ſucceſſives à la Quadratrice de *Dinoſtrate*, à la Spirale d'*Archimède*, à la Conchoïde de *Nicomède* et aux ſections coniques.

XIII.

Integratio formulae

$$p^3 v v \partial v = n^3 v \partial p + n^3 p \partial v \, (1 - p)(2 - p).$$

Auctore *Steph. Rumovski.* pag. 192.

C'eſt un Mémoire de feu Mr. *L. Euler: De motu quodam maxime memorabili, ſatis quidem ſimplici, at ſolutu difficillimo,* inſéré dans le Tome V des *Nova Acta,* qui a donné

donné à Mr. *Roumovski* l'occaſion de traiter cette équation différentielle, au ſujet de laquelle le grand Géomètre que nous venons de citer, avoit dit qu'aucune voye ne ſçauroit conduire à ſon intégrale, à moins qu'on ne tombât, par hazard, ſur un multiplicateur qui la rendit intégrable, et dont il n'avoit trouvé l'intégrale lui-même que par une voye indirecte. Le chemin que l'auteur du préſent Mémoire a ſuivi pour y arriver, conſiſte dans les ſubſtitutions ſuivantes: $v = \sqrt{nu}$; $p = \frac{2}{1+q}$, $q = su$, $u = \frac{1}{r}$, moyennent lesquelles l'équation ſe transforme en celle-ci: $2\partial r - \frac{r\partial s}{1 \mp s} = \frac{s\partial s}{1 \pm s}$ qui devient intégrable multipliée par $\frac{1}{\sqrt{1 \pm s}}$, l'intégrale étant $\frac{r}{\sqrt{1 \mp s}} = \frac{2 \pm s}{\sqrt{1 \pm s}} + 2c$, et en changeant la conſtante et reſtituant p et v: $\frac{ppvv - n(1-p)^2}{[n(p-1) - pvv]^2} = C$.

XIV.

Problemata ex doctrina ſphaerica.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 196.

La baſe d'un triangle ſphérique étant donnée, avec le rapport des ſinus ou coſinus des autres cotés, ou bien des ſinus ou coſinus de leurs moitiés, il s'agit de trouver le ſommet du triangle. Voila les quatre problèmes qui ſont le ſujet de ce Mémoire. L'auteur fait voir, que les ſommets de tous les triangles ſatisfaiſans au premier problème ſe trouvent dans une courbe *à double courbure* interſection de la ſphère avec un cone dont la baſe eſt une *ellipſe*, qui eſt projettée ſur le plan de la baſe donnée dans une *hyperbole*; que ceux des triangles ſatisfaiſans au ſecond problème ſont dans un *grand cercle* perpendiculaire à la baſe; qu'enfin les

ſommets des triangles du troiſième et quatrième problème ſont compris dans deux *cercles* de la ſphère égaux et parallèles entr'eux et perpendiculaires à la baſe donnée.

XV.

Eſſai ſur les nombres premiers.

Par Mr. *Krafft*, pag. 217.

La nature des nombres premiers eſt encore peu connue; elle ne le ſera parfaitement, que quand les Mathématiciens auront réuſſi à trouver pour les nombres premiers des expreſſions auſſi générales que celles qu'on a par exemple pour les diverſes eſpèces des nombres polygones. Au défaut de pareilles expreſſions générales il ſeroit à déſirer, qu'au moins on eût des fonctions algébriques qui donnaſſent toujours des nombres premiers, ſous la condition, qu'on n'y mette à la place de leurs quantités indéterminées que de certaines eſpèces de nombres, toutes compriſes ou au moins toutes non-compriſes dans une fonction algébrique générale. C'eſt à ce dernier genre de fonctions, que ſe rapportent les recherches que Mr. *Krafft* a faites ſur les nombres premiers et qu'il expoſe dans ce Mémoire.

Il eſt connu, que tout nombre premier, (hormis 2 et 3) eſt de la forme $6m + 1$ ou $6m - 1$; mais l'inverſe de cette propoſition n'eſt pas vraie, c'eſt-à-dire, tout nombre de la forme $6m + 1$ ou $6m - 1$ n'eſt pas pour cela un nombre premier. Cette conſidération a engagé Mr. *Krafft* à examiner, quelle devoit être la condition du nombre m, pour que les nombres $N = 6m + 1$ et $N = 6m - 1$, qui en ſont formés

més, fuſſent des nombres premiers. Voici les theorèmes qu'il a trouvés à cet égard.

I) Tout nombre N de la forme $6m+1$ eſt un nombre premier, ſous la condition, que le nombre m ne ſoit compris ni ſous la forme $6xy+x+y$, ni ſous celle-ci: $6xy-x-y$.

II) Tout nombre N de la forme $6m-1$ eſt un nombre premier, ſous la condition, que le nombre m ne ſoit point compris ſous la forme $6xy+x-y$.

L'Auteur donne enſuite une claſſification des nombres naturels par rapport à leur capacité de former des nombres premiers. Il les diſtribue en quatre claſſes: 1) En nombres *abſolument propres* à la formation des nombres premiers, c'eſt-à-dire, également ſous la forme $6m+1$ et $6m-1$. Tels ſont les nombres 1, 2, 5, 7 &c. 2) En nombres producteurs des nombres premiers ſous la *ſeule* forme $6m+1$. Tels ſont 6, 11, 13, 16, 21 &c. 3) En nombres producteurs des premiers ſous la *ſeule* forme $6m-1$. Tels ſont 4, 8, 9, 14, 15 &c. 4) En nombres *abſolument impropres* à la production des nombres premiers. Tels ſont: 20, 24, 31, 34 &c. Si les loix de progreſſion de ces quatre ſéries étoient connües; celle des nombres premiers le ſeroit auſſi; l'Auteur fait voir, de quelle façon on peut continuer ces ſéries auſſi loin qu'on voudra, et donne, en partant de ces principes, l'échantillon d'une table compendieuſe qui, pour tous les nombres impairs non-multiples de trois, donne à connoître, ſi ces nombres ſont premiers, ou quels ſont leurs facteurs. Les recherches ſur la reductibilité des nombres aux quatre formes mentionées ci-deſſus ont conduit l'auteur

à

à d'autres ſur la réſolubilité en nombres entiers des équations indéterminées $o\,xy + x + y - m = o$ et $o\,xy + x - y - m = o$, ſur lesquelles il remarque, que les méthodes, que Mr. *la Grange* a données pour réſoudre de pareilles équations, ne ſauroient y être appliquées dans le cas préſent, puisqu'elles ſuppoſent ce qu'on cherche ici, ſavoir la réſolubilité des nombres en facteurs. Ces mêmes recherches ont fourni encore à Mr. *Krafft* le théorème ſuivant: Tout nombre impair non-quarré et non multiple de trois, qui n'eſt que d'une *ſeule* manière la différence de deux quarrés, dont un ſeul a un multiple de trois pour racine, eſt un nombre premier. Ce théorème eſt analogue à celui de *Fermat*: que tout nombre premier de la forme $4\,m + 1$ eſt la ſomme de deux quarrés premiers entr'eux et ne l'eſt que d'une ſeule manière; mais il eſt plus général, puisqu'il s'étend auſſi ſur les nombres qui ne ſont pas de la forme $4\,m + 1$.

Mr. *Krafft* finit ſon Mémoire en faiſant voir, de quelle manière la nouvelle Analyſe combinatoire de Mr. *Hindenbourg* pourroit vraiſemblablement repandre de grandes lumières ſur la nature des nombres premiers.

XVI.

Eſſai ſur les Liſtes des Mariages, des Naiſſances et des Morts de St. Pétersbourg, Mémoire quatrième, contenant la période de 1791 jusqu'à 1796.

Par Mr. *Krafft*, pag. 246.

L'enſemble des quatre Mémoires que Mr. *Krafft* a publiés ſur ce ſujet, embraſſe maintenant tout le temps depuis le nouvel établiſſement de ces Tables en 1764 jusqu'à l'avénement

nement au Trône de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE glorieuſement regnante, l'Empéreur PAUL I; et par conſéquent une ſuite de trente deux années conſécutives, dont les ſix dernieres ſont l'objet du Mémoire quatrième. L'auteur a redigé et examiné ces Tables ſous les points de vue les plus intéreſſans et les plus utiles au Gouvernement, et en a tiré des concluſions, ſoit générales, ſoit particulières ou individuelles à la ville de St. Pétersbourg, qu'il faut voir dans les Mémoires mêmes. Le but principal que l'Auteur s'étoit propoſé dans ſon travail ſur cette nombreuſe collection de Tables, étoit de faire voir, de quelle importance et utilité il feroit pour le Gouvernement, d'avoir de pareilles Tables pour des provinces entières de l'Empire de Ruſſie, et que rédigées ſur un pied ſemblable, elles pourroient donner au Gouvernement de grandes inſtructions ſur pluſieurs branches de l'adminiſtration, et le mettroient à portée d'opérer de la manière la plus efficace ſur la conſérvation, l'accroiſſement et le bonheur de Ses ſujets et le bien de l'humanité en général. Mr. *Krafft* termine ce Mémoire par la remarque, que pour retirer toute l'utilité d'un pareil établiſſement, il faudroit, que le Gouvernement établit exprès un Bureau des Tables de population de la Ruſſie.

CLASSE

CLASSE PHYSIQUE.

I.

Expoſitio novorum experimentorum circa frigus artificiale.

Auctore *Tobia Lowitz*. p. 275.

Le moyen le plus efficace que l'on connût cy-devant, pour produire un très haut degré de froid artificiel, conſiſtoit, comme on ſait, en un mêlange de neige et d'acide nitrique fumant. Ce fut à l'aide de ce mêlange que l'Académicien *Braun* réuſſit pour la premiere fois en 1750 à figer le mercure. Mais le ſuccès de cette expérience exige d'ailleurs le concours d'un froid naturel d'au moins 20 degrés, ſelon le Thermomètre de *Réaumur*.

Dans le courant de l'hyver de 1792 Mr. *Lowitz* a fait la découverte de deux autres moyens, encore plus efficaces et moins diſpendieux, dont on peut faire uſage pour figer, meme dans une chambre qui renferme jusqu'à 16 dégrés de chaleur, d'aſſez grandes maſſes de mercure, comme par exemple de 20 jusqu'à 30 livres, et même ſi on le déſire, jusqu'à 100 livres et au delà. Le froid qui eſt produit va jusqu'à 40 dégrés.

Dans l'un de ces moyens, on fait uſage *de la potaſſe cauſtique cryſtalliſée*, et dans l'autre, qui eſt préférable, à cauſe du peu de dépenſe qu'il éxige, on employe *le muriate*

riate de chaux, qu'on obtient en réſidu après une diſtillation d'Ammoniac cauſtique. Ce réſidu doit être leſſivé, filtré et bouilli, jusqu'à ce qu'en laiſſant tomber, de tems-à-autre, quelques gouttes ſur une lame d'acier ou de verre, on s'apperçoive que la liqueur se coagule par le refroidiſſement et ſe laiſſe réduire en une poudre ſéche menüe. Alors il faut auſſitôt la faire coaguler au froid, en la remuant ſans ceſſe avec une ſpatule ou pilon de bois, enſuite pulveriſer le ſel cryſtalliſé, le tamiſer avec autant de promptitude qu'il eſt poſſible, et le conſerver dans un lieu froid, au moyen de vaiſſeaux bien bouchés, jusqu'au moment de l'expérience.

La proportion la plus avantageuſe au ſuccès de l'expérience eſt (en poids) de trois parties de ce sel ſur deux parties de neige. Quant à l'expérience même elle réuſſit au mieux dans un vaiſſeau de ſer, placé lui même dans un autre vaiſſeau de bois, rempli d'un ſemblable mélange frigoriſique. On commence par y verſer le mercure, enſuite la neige et en dernier lieu le ſel, et auſſitôt on remue tout ce mélange, avec toute la célérité poſſible au moyen d'une ſpatule de bois ou de fer, jusqu'à ce qu'on remarque que le mercure eſt devenu ſolide. On peut alors le retirer du mélange, qui lui même eſt devenu fluide, au moyen d'une pince de ſer.

Il n'eſt pas d'ailleurs indifférent au ſuccès de l'expérience quelle neige on employe. Celle qui eſt nouvellement tombée et parfaitement ſéche, eſt la meilleure; celle que a été gelée, eſt moins propre; et enfin celle qui eſt humide, eſt entièrement impropre. Il faut au reſte avoir l'attention de ne la porter dans la chambre chaude, où l'on veut opérer, que lorsque tout eſt déjà prêt pour l'expérience.

II.

Hyacinthorum Sibericorum, a Celebr. *Laxmanno* detectorum, Analyſis chemica.

Auctore *Tobia Lowitz*. pag. 300.

Ce foſſile, remarquable par ſes beaux cryſtaux réguliers, fut découvert, en 1790, par feu Mr. le Conſeiller de Collèges *Laxmann*, en Sibirie près du confluent de l'Achtarachta avec le Vilui.

Ces cryſtaux ſont des priſmes quadrangulaires aſſez courts, dont les arrètes ſont légèrement émouſſées. La plûpart de ces priſmes ſont terminés par des pyramides auſſi quadrangulaires, mais dont les arrètes ſont aigues et non pas tronquées comme celles du priſme qui leur ſert de baſe, quelques uns ſont abſolument ſans pyramides, et dans les autres deux pyramides oppoſées ſont tronquées par leurs ſommets.

La couleur des cryſtaux n'eſt pas uniforme: dans les uns elle eſt d'un verd foncé, intérieurement parſemée de tâches jaunâtres, dans d'autres elle eſt presque ſans tâches et tire beaucoup ſur le noir.

La péſanteur ſpécifique de ces cryſtaux eſt = 3,392. Ce foſſile reduit en poudre fine, même ſans avoir beſoin d'être préparé par l'alcali, ſe décompoſe immédiatement en ſes parties conſtituantes, à la faveur de l'acide muriatique, moyennant une deſtillation bouillante jusqu'à ſiccité de réſidu.

Une

Une Analyſe exacte, répétée deux fois, m'a fait voir que ſur 100 parties ce foſſile en contient

41	de chaux.
35	de ſilice.
13	d'Alumine.
6	d'oxide de fer.
1	d'eau.
Total 96.	
Perte 4.	

III.

Expoſition ſyſtématique des pierres de roche compoſées, qui ſe trouvent dans les différentes parties de la Ruſſie.

Par Mr. *B. Sewerguine*, pag. 307.

Il y a deux manières d'obſerver les pierres de roche compoſées, comme tous les corps du regne minéral, l'une en grand et dans leur lieu natal, l'autre ſur les morceaux iſolés et hors de l'endroit d'où ils ont été arrachés. L'une eſt l'objet du Minéralogue qui a l'occaſion de viſiter et de ſuer les montagnes et les minières, l'autre appartient à celui qui doit ſe contenter de les enviſager et de les examiner dans les collections de minéraux. Cependant l'une vient à l'appui de l'autre. Mr. *Sewerguine* a été dans le dernier cas: ne s'occupant que de minéraux Ruſſes, il donne ici une expoſition ſyſtématique de ceux des pierres de roche compoſées qui ſe trouvent en Ruſſie, afin de comparer leur mélange intérieur avec celles des pays étrangers, et de pouvoir juger leſquels d'entre ces mélanges ſemblent

 favo-

ſavoriſer plus tels ou tels métaux, et lesquels le ſont moins. Sans nous arrèter ſur la manière de la diſtribution qui eſt purement oryctognoſtique, nous dirons ſeulement que quoique pluſieurs de ces pierres de roche compoſées ſont alléguées d'après les obſervations d'autres Minéralogues, il y en a néanmoins qui ſont neuves et qui n'ont été examinées que par l'auteur lui-même, et qu'on eſpère d'avoir donné ici une expoſition des pierres de roche compoſées de la Ruſſie aſſez complette, principalement ſi on y ajoute celle qui a été fournie, il y a quelques années, ſur les pierres de roche compoſées des environs du canal de Ladoga.

IV.

Typha Laxmanni propoſita
ab *Ioanne Lepechin*, pag. 369.

C'eſt pour honorer la mémoire d'un ſavant qui avoit bien mérité de la Botanique, que Mr. *Lepechin* emprunte le nom de *Laxmann*, pour en faire le nom ſpécifique d'une eſpèce de *Typha* qui croît en abondance dans les lieux marecageux de la Sibérie orientale, ſur les bords des rivières au de là du Lac Baïcal, et qui, ſenſiblement différente des Typha latifolia et anguſtifolia, eſt déſinie par l'Auteur ainſi: *Typha foliis anguſtis, linearibus, a medio fere ad apicem usque ſubito coarctatis, clava graciliore, ſpicis maſcula foemineaque remotis.*

V.

De Salmone Salare Oceani ſeptentrionalis.
Auctore *N. Ozeretzkovski*, pag. 337.

Le ſaumon, dont on pèche une prodigieuſe quantité dans les embouchures des fleuves et des rivières qui ſe jettent

jettent dans l'Océan ſeptentrional, ne ſe prend jamais dans l'Océan même. Selon les eaux, où on le pêche, il diffère par le port extérieur. par la grandeur, la couleur, la quantité de graiſſe et la ſaveur. Enumeration des fleuves et des rivières, qui offrent conſtamment des variétés du ſaumon. Il eſt très probable que ces différences proviennent des eaux mêmes, et que les eaux douces ſont la cauſe du changement du bout de la machoire inférieure du ſaumon en un crochet. Preuves de cette aſſertion.

VI.
Deſcription de la Topaze de Sibérie.
par *B. F. I. Hermann*, pag. 344.

L'Auteur a fait connoître par cette déſcription non ſeulement une pierre précieuſe de Sibérie, dont le genre n'étoit pas encore déterminé, mais il a démontré auſſi qu'elle ſoit une Topaze véritable, laquelle, quoique aſſez différente par ſa cryſtalliſation, contient presque les mêmes parties conſtituantes que la Topaze de Saxe.

VII.
Expériences ſur l'Acier damaſſé,
par *B. F. I. Hermann*, pag. 352.

Par un grand nombre d'expériences l'Auteur de ce Mémoire a trouvé la vraie méthode de préparer l'acier damaſſé, égal à celui de Turquie ou de Perſe, en démontrant en même tems, par des eſſais très-variés, qu'on ne puiſſe guère préparer du damas véritable et de belles fleurs, ſans y mêler avec l'acier une certaine quantité de fer.

VIII. De

VIII.

De ovo perforato.

Auctore *N. Ozeretskovsky*, pag. 364.

Déſcription d'un oeuf de poule, dont le gros bout avoit un trou, par lequel ſortoit un vaiſſeau de la longueur d'un demi-pouce. L'oeuf étant caſſé, il a parû que le dit vaiſſeau communiquoit avec un corps, renfermé dans l'oeuf, que ce corps avoit la figure d'une petite poire et étoit rempli d'un ſang coagulé. Outre cela, il y avoit dans l'oeuf et le blanc et le jaune. Explication de ce phénomène. Formation de l'oeuf. Concluſion tirée de ce phénomène, ſur la génération des poules monſtrueuſes.

IX.

Alca Kamtſchatica,

propoſita ab *Ioanne Lepechin*, pag. 369.

L'oiſeau, dont Mr. *Lepechin* donne ici la déſcription et le deſſein, apartient à la même eſpèce dont on trouve dejà fait quelque mention, ſous le nom de *Senis niger*, dans l'hiſtoire de Kamtchatka de *Krachenninikof*. L'exemplaire qui a donné lieu à cette déſcription, eſt dû aux ſoins actifs et patriotiques de deux marchands Ruſſes, Mrs. *Golikof* et *Schelechof* qui, occupés à la chaſſe des loutres et chiens marins, ne négligeoient jamais de faire ramaſſer auſſi des productions de la nature que fourniſſent et la mer et les iles entre la presqu'ile de Kamtchatka et le continent de l'Amérique.

X. Ob-

X.

Obſervationes quaedam circa lapides calcareos.

Auctore *B. Sewerguine*, pag. 372.

L'Auteur continue de communiquer ſes obſervations ſur les minéraux qui ſe trouvent en Ruſſie. Il s'occupe dans cette diſſertation particulièrement de la phoſphoreſcence qu'il a obſervé dans pluſieurs eſpèces de pierre calcaire plus ſimple, c'eſt-à-dire, où la terre calcaire eſt combinée avec l'acide carbonique. Il obſerve que beaucoup d'entre elles étant reduites ou en morceaux très minces, ou en poudre, et enſuite jettées ſur des charbons ardens, luiſent dans les ténèbres avec une couleur verte bleuâtre, à la manière de l'Apatite et du Pyroéméraude. Quoique ces obſervations, après les expériences de Mr. *Tomſon* ſur le ſable provenu du *Marmo ſalino* des Appenins (Voyez des Herrn von Crells Chemiſche Annalen 1798. 4tes Stück, pag. 268) ne ſoyent pas tout à fait neuves, cependant elles viennent à l'appui d'une vérité conſtatée par les Minéralogues étrangers. Ce qui eſt le plus remarquable, c'eſt que 1mo le *Marmo ſalino* de Sanara en Sibérie ſemble contenir de l'acide phoſphorique. 2do Que la propriété phosphoreſcente n'eſt pas commune à tous les marbres et ſpaths calcaires, analogues au reſte à ceux, dans lesquels elle a été obſervée. Quant aux conſéquences tirées de ces obſervations nous nous contentons de renvoyer à la diſſertation même.

XI. Mira-

XI.

Mirabilium Jalaparum hybridarum continuata deſcriptio.

Auctore *J. T. Koelreuter*, pag. 378.

L'Auteur continue, dans ce Mémoire, ſes expériences ſur les plantes mulets du Jalap, en ajoutant aux douze expériences inſérées dans le volume précédent des *Nova Acta* douze autres faites avec différentes eſpèces de cette même plante, à la ſuite deſquelles Mr. *Koelreuter* fait voir, par quelques réflexions et conſéquences, quelles variétés de plantes mulets peuvent naître de ces accouplemens diverſifiés, tant à l'égard de la beauté des fleurs qu'à la forme entiere de la plante.

XII.

Mémoire ſur la pierre de poix ou Piſſite de Sibérie.

par *B. F. I. Hermann*, pag. 399.

Comme il y a encore des controverſes parmi les Minéralogiſtes ſur la volcanité et neptunité de la Piſſite, l'Auteur a tâché de démontrer contre ceux qui taxent cette pierre de pure volcanique, qu'on trouve des endroits riches en pierre de poix, qui ne ſont abſolument pas volcaniques, et il en cite trois formations de Piſſite en Sibérie, en y joignant une deſcription très détaillée des pierres qui s'exploitent dans ces lieux non volcaniques.

XIII.

Silicis Topazii Sibirici examen chemicum

Auctore *Tobia Lowitz*. pag. 406.

Les topazes de Sibèrie diffèrent de celles de Saxe 1.) par la forme de leurs cryſtaux; 2.) en ce qu'elles ne contiennent point de terre calcaire. Leur péſanteur ſpécifique eſt = 3,457, et ſur 100 parties elles en contiennent

	46,15	de ſilice.
	46,15	d'Alumine
	0,69	d'eau, et quelques indices d'oxide de fer.
Total	92,99,	
Perte	7,01.	
	100,00.	

CLASSE ASTRONOMIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE.

I.

Tentamen inveſtigandi parallaxin lunae ex eclipſi ſolis, quae contigit die $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April.}}$ 1793.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 415.

La méthode de déterminer la parallaxe de la lune par les obſervations des eclipſes du ſoleil, que l'Auteur propoſe dans ce Mémoire, eſt ſemblable à la méthode qu'on employe pour trouver la parallaxe du ſoleil, au moyen des obſervations du paſſage de Venus ſur le diſque du ſoleil. Toute la différence conſiſte en ce que, lorsque Venus paroît traverſer le diſque du ſoleil à l'obſervateur placé à la ſurface de la terre, ſon cours apparent tombe dans le diſque même du ſoleil, tout de même que ſi l'obſervateur eut été placé au centre de la terre, tandis que dans les eclipſes du ſoleil la route de la Lune, vue du centre de la terre, tombe, pour la plupart, hors du diſque du ſoleil, et réciproquement; de ſorte que ce qu'on entend ſous le nom d'effet de la parallaxe ne puiſſe pas même avoir lieu ici.

Pour

Pour remédier à cet inconvénient l'Auteur de ce Mémoire examine l'effet relatif de la parallaxe, c'eſt-à-dire pour les momens ou du commencement ou de la fin de l'eclipſe, obſervée de deux points de la ſurface de la terre, en cherchant les lieux de la lune vue du centre de la terre. La différence de ces momens dans l'orbite relative, convertie en tems, fournit l'effet relatif de la parallaxe, pour les points d'où les momens mentionnés ont été obſervés. Tout le reſte eſt conforme à la méthode miſe en uſage pour déterminer la parallaxe du ſoleil par le paſſage de Venus ſur ſon diſque; et de même que dans la recherche de la parallaxe du ſoleil la plus petite diſtance des centres du ſoleil et de la lune a la plus grande influence, elle influe beaucoup auſſi dans la détermination de la parallaxe de la lune.

Il ſemble qu'on peut conclure du calcul de cette eclipſe que la correction de la parallaxe équatorienne de la lune, employée par *Tobie Mayer,* dans l'hypothèſe du diamètre de l'équateur à l'axe de la terre = 230 : 229, eſt contenue entre les limites — 2″ et + 5″. Cependant l'Auteur ne donne pas cette détermination pour exactement vraye, mais il propoſe ſa méthode dans l'intention que d'autres en prennent occaſion de déduire la parallaxe de la lune de l'obſervation de ſemblables phénomènes.

II.

Obſervations de quelques étoiles qui culminent à peu de diſtance du zénith, pour ſervir à vérifier la hauteur du pole de l'obſervatoire de l'Académie *Impériale* des Sciences de St. Pétersbourg.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. pag. 448.

Les obſervations que Mr. l'Abbé *Henry* préſente ici, ont été faites au grand quart-de-cercle mural, depuis le 9 Juillet 1797 jusqu'au 24 Juin 1798. Elles concernent les diſtances au zénith des étoiles γ, o, θ du Dragon, $\varkappa$ du Cygne, α, γ, η de Caſſiopée, β, γ, δ, ε, ζ de la grande Ourſe. Après y avoir appliqué la réfraction, l'aberration et la nutation, l'Auteur en a déduit les déclinaiſons moyennes de ces étoiles pour le 1 Janvier 1800; mais ces déclinaiſons ne ſont qu'hypothétiques, puisqu'elles ſuppoſent l'erreur de l'inſtrument nulle et la hauteur du pole exactement connue.

III.

Obſervations aſtronomiques des eclipſes des ſatellites de Jupiter, faites à Mitau.

Par Mr. *Guill. Th. Fr. Beitler*, p. 457.

Ces obſervations qui commençent avec le 10 d'Août 1797 et vont jusqu'au premier d'Août 1798, comprennent toutes les immerſions et émerſions des ſatellites de Jupiter que Mr. *Beitler* a eu l'occaſion d'obſerver pendant cet intervalle.

Il

Il indique les circonſtances favorables ou défavorables aux obſervations, l'ouverture du diaphragme qui, placé ſur l'objectif, a fait disparoître le ſatellite, et la différence entre le moment obſervé et le moment calculé d'après les tables de Mr. *de Lambre*, en ſuppoſant la différence des méridiens de Paris et Mitau de 1^h, 25′, 32″.

Ces obſervations ſont ſuivies de quelques autres, ſavoir de celle de l'eclipſe du ſoleil du 13 Juin 1797, de l'occultation de la 30me des poiſſons par la lune du 20 Octobre 1797, et de l'éclipſe de Mars par la lune arrivée le 19 Juillet 1798, mais qui pour Mitau n'en fut point une. Mr. *Beitler* a meſuré les diſtances des bords les plus proches des deux aſtres, dont la plus petite a été trouvée de 3′, 33″.

IV.

Obſervations faites avec le quart-de-cercle mural de l'Académie *Impériale* des Sciences de St. Pétersbourg, dans le courant de l'année 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. pag. 466.

Ce Mémoire contient, comme le précédent, les diſtances au zénith de quarante des principales étoiles et les déclinaiſons moyennes pour la même époque du 1 Janvier 1800, et hypothétiques comme les précédentes. Tout ce que l'Auteur a pu faire jusqu'ici, par rapport à l'erreur de l'inſtrument, a été de s'aſſûrer qu'elle eſt aſſez peu conſidérable et qu'elle ne paſſe pas 3 à 4 ſecondes, en ſuppoſant la hauteur du pole exacte.

V. Ob-

V.

Obſervatio tranſitus Mercurii per diſcum ſolis, habita in obſervatorio Petropolitano anno 1799 die $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$ tempore civili.

Auctore *Stephano Rumovski*. pag. 493.

D'après les obſervations de Mr. *Rumorski* les quatre attouchemens des bords du ſoleil et de Mercure ont eu lieu

le 1^r^ le $\frac{25\ \text{Avril}}{6\ \text{Mai}}$ 1799 à	23^h,	$12'$,	$12''$,	6	tems vrai.
le 2^d^ - - - - - - -	23,	14,	26,	3	- -
le 3e le $\frac{26\ \text{Avril}}{7\ \text{Mai}}$ - - -	6,	33,	34,	5	- -
le 4e - - - - - - -	6,	35,	53,	3	- -

Il en réſulte, ſelon les calculs de l'Auteur, une correction des tables ſolaires de Mr. *de Zach*, de $11''$ en longitude et de $3\frac{1}{2}''$ en déclinaiſon, et une correction des tables de Mercure de Mr. *de Lalande* de $+ 16''$, 2 en longitude et de $- 3''$, 6 en latitude.

VI.

Summarium obſervationum meteorologicarum in urbe Kamyſchin ad Wolgam, ſub latitudine 50°, 5′ et longitudine 63°, 4′, ab Octobri 1770 ad Auguſtum 1774 inſtitutarum et cum reſpondentibus Petropolitanis collatarum.

Auctore *Petro Inochodzof*. pag. 497.

On trouve ici, pour chaque mois du période indiqué, les plus grandes et les plus petites hauteurs du Thermomètre de Deliſle, ainſi que du Baromètre diviſé en pouces et lignes du pied de Paris.

Voici

Voici les *Maxima* et les *Minima* annuels.

1771.

Plus grande chaleur (T) = 100 degrés en Juillet.
Plus petite chaleur (t) = 196 degrés en Décembre.
Plus grande hauteur du Baromètre (B) = 28″, 8‴,9 en Oᵭbr.
Plus petite hauteur du Baromètre (b) = 27, 5, 6 en Janv.

1772.

T = 105,5	degrés en Août.	B = 29″, 2‴,	en Janvier.
t = 195,0	- - - en Janvier.	b = 27, 5,2	en Décembre.

1773.

T = 99,5	degrés en Juin.	B = 29″, 2‴,9	en Novbr.
t = 196,5	- - - en Février.	b = 27, 5,9	en Décbr.

et pour tout l'intervalle de 46 mois

T = 84	degrés en Juin 1774.	B = 29″, 2‴,9	en Nov. 1773.
t = 196,	- - en Fevr. 1773.	b = 27, 2,9	en Mars 1774.

Des hauteurs barométriques moyennes, comparées avec celles de St. Pétersbourg, il réſulte que St. Pétersbourg eſt plus élevé que Kamyſchin de 171 pieds de Paris, ou 26 toiſes de Ruſſie. à quoi il faut encore ajouter 14 toiſes, car c'eſt à peu près d'autant que le Baromètre avoit été placé au deſſus du niveau du Wolga; et il ſuit du cours de ce fleuve qu'Aſtracan eſt beaucoup plus bas que ne le fait le calcul de feu Mr. *Chrétien Mayer,* fondé ſur les obſervations de *Lerch*, qui ne donne que 101 pieds de Paris de différence entre St. Pétersbourg et Aſtrachan; mais il s'enſuit auſſi que l'embouchure de la Neva n'eſt pas auſſi énormément plus élevée au deſſus de l'embouchure du Wolga, que l'a prétendu Mr. *Ehrlich*, Candidat du Miniſtère de Riga, qui donne à cette différence plus d'un demi mille d'Allemagne, ce qui eſt abſurde.

VII. Ex-

VII.

Extrait des obſervations météorologiques faites á St. Pétersbourg. Année 1794, d'après le nouveau ſtile.

Par Mr. *J. A. Euler.* page 507,

La plus grande hauteur du Baromètre 29″, 23.
- - - petite - - - - - 26, 78.
Variation totale - - - - - 2, 45.
Hauteur moyenne - - - - - 28, 20.
Le plus grand froid 183° du Thermomètre de Delisle.
La plus grande chaleur 106 - - - - - - - -
Variation totale . . 77 - - - - - - - -
Calme parfait 78 jours.
Vent médiocre 190 - -
Vent fort 89 - -
Vent très fort 8 - -
Vent dominant SOu.
Ciel entièrement ſérein 76 jours.
- - en partie ſérein 161 - -
- - entièrement couvert 128 - -
- - nébuleux . . 27 - -
Pluye forte 48 jours.
- - petite 85 - -
Neige copieuſe 2 - -
- - médiocre 56 - -
Jours où il n'y eut point de neige 194.
- - - - - - - - - gelée 181.
Nombre des orages = 5
- - des aurores boreales = 2
La Neva fut ouverte pendant {222 / 217} jours.

VIII. Ex-

VIII.

Extrait des obſervations meteorologiques faites en 1794, d'après le nouveau ſtile, par Mr. le Conſeiller de Colléges et Chevalier *Stritter* à Moſcou, redigé par Mr. *J. A. Euler*, page 526.

La plus grande hauteur du Baromètre	28″, 04	
- - - petite - - - - -	26, 58	
Variation totale - - - - -	1, 46	
Hauteur moyenne - - - -	27, 36	
Le plus grand froid	184	degrés de Delisle.
La plus grande chaleur	103	- - - - -
Variation totale	81	- - - - -
Calme parfait	18	jours.
Vent médiocre	67	- -
- - fort	216	- -
- - très fort	61	- -
Vent dominant *Nord*.		
Ciel entièrement ſérein	32	jours.
- - en partie ſérein	83	- -
- - entièrement couvert	250	- -
- - nébuleux	33	- -
Pluye forte	28	jours.
- - médiocre	94	- -
Neige copieuſe	6	- -
- - médiocre	65	- -
Durée de la gelée	106	- -
Il n'y eut point de neige pendant	186	jours.
Nombre des orages	20.	
- - des Paraſélènes	2.	

SUPPLÉMENT.

FUMARIAE
QUATUOR NOVAE SPECIES E REGNO *JAPONICO*,
deſcriptae et delineatae
a
Carolo Petro Thunberg.

Academiae exhibit. die 21 Januarii 1799.

Quo rarior Botanico in terram quandam remotam concedatur aditus; quo arctiores intra limites libertas colligendi regionis ejusmodi plantas ibi coarceatur, et quo rariora itaque collectanea exinde in Muſeis Europaeis occcurrant rerum naturalium; eo magis haec pauca magni ſunt aeſtimanda eoque ſollicitius merentur non modo ſervari, ſed etiam debitis inſtitutis deſcriptionibus et accuratis iconibus cum orbe erudito communicari atque in uſus, quantum fieri poteſt, publicos converti.

Haec conſiderans, mei eſſe officii credidi, quatuor illas ſpecies *Fumariae*, quarum ſpecimina in Regno Japonico mihi, rara certe occaſione, colligere contigit, exacte deſcriptas et depictas ſiſtere, ne longiori adhuc mora in herbario ſervatae et occultae jaceant, ſed curioſis naturae ſcrutaoribus tandem innoteſcant.

Ex hisce *Fumariam* quidem ſub titulo *Fumariae capreolatae* in Flora mea Japonica commemoravi, quae vero, rigoroſiori examini ſubjecta, novam cum caeteris ſpeciem, a *Capreolata* omnino diverſam, conſtituere deprehenſa eſt.

In

In interioribus inſularum Japonicarum regionibus, ſub meo, anno 1776 ad Aulam Imperatoriam itinere, primo vere collectae ſunt hae ſpecies, omnes annuae, omnes herbaceae atque debiles, quarum ſpecifici characteres ſequentes ſunt:

Fumaria decumbens: bracteis ovato-ellipticis longitudine pedunculi.
racemoſa: bracteis filiformibus.
pallida: bracteis dentatis pedunculo brevioribus.
inciſa: bracteis inciſo-ſerratis pedunculo brevioribus.

Tab. A. 1. *Fumaria decumbens.*

Fumaria bulboſa. Flora Japon. p. 277.

Japonice: *Nonigi*. Kaempf. Amoenit. exot. faſcicul V. p. 909.

Caulis herbaceus, ſimplex, decumbens, ſtriatus, glaber, palmaris.

Folia alterna, petiolata, triternata, glabra.

Foliola ovata, obtuſiuſcula cum mucrone, ſaepius fiſſa, integra, unguicularia.

Petioli filiformi-capillares, patentiſſimi, pollicares, petiolulis ſenſim brevioribus.

Flores in apice caulis racemoſi, tres vel quatuor, lutei, glabri.

Bractea ſub ſingulo pedunculo ſolitaria, elliptico-ovata, acuta, integra, glabra, longitudine pedunculi.

Pedunculi capillares, uniflori, patentiſſimi, unguiculares.

Corolla unicalcarata cornu longitudine floris.

Differt

Differt a Fumaria bulboſa:

1. quod in *illa* bracteae ovatae, pedunculo longiores, longitudine florum; in *hac* bracteae ovato-ellipticae, longitudine pedunculi, flore tamen breviores.
2. quod *illa* debilis et erecta, *haec* decumbens.

2. *Fumaria racemoſa.* Tab. B.

Caulis herbaceus, ſucculentus, totus glaber, erectus, ramoſus, ſpithamaeus et ultra.

Rami alterni, erecto-patentes, ſimiles.

Folia alterna, petiolata, bipinnata. *Pinnulae* ſeſſiles, ovatae, obtuſae, inciſae laciniis inciſo-ſerratis.

Flores in ramis racemoſi, flaveſcentes.

Racemus erectus, digitalis.

Pedunculi breviſſimi.

Bracteae filiformes, pedunculo triplo longiores, flore paulo breviores.

Corolla unicalcarata cornu obtuſo, brevi.

3. *Fumaria pallida.* Tab. C.

Fumaria lutea. Flor. Japon. p. 277.

Japonice: *Nonigi* altera. Kaempfer. Amoenitates exoticae, Faſcicul. V. p. 910.

Caulis herbaceus, debilis, flexuoſo-erectus, totus glaber, ſpithamaeus.

Folia alterna, petiolata, inciſo-bipinnatifida: *Foliola* lanceolata, acuta.

Flores laterales, pedunculati, ſolitarii, pallidi.

Cornu

Cornu obtuſum, corolla brevius.

Bracteae ovato-lanceolatae, acutae, inciſo-ſerratae, pedunculo paulo breviores.

Tab. D. 4. *Fumaria inciſa.*

Caulis herbaceus, ſimplex, ſtriatus, totus glaber, erectus, ſpithamaeus.

Folia alterna, petiolata, triternata: *Foliola* inciſo-pinnatifida laciniis oblongis, acute ſerratis.

Petioli filiformes, pollicares, inferiores palmares.

Petioluli ſenſim breviores.

Flores in apice caulis racemoſi, lutei.

Racemus multiflorus, ſeſſim florens, palmaris.

Pedunculi capillares, uniflori, ſemipollicares.

Bracteae ſeſſiles, obovatae, acutae, ſubtrifidae, inciſo-ſerratae, pedunculo paulo breviores.

Corolla unicalcarata cornu obtuſo, corolla breviore.

MATHE-

MATHEMATICA

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

DE INSIGNI VSV
CALCVLI IMAGINARIORVM
IN CALCVLO INTEGRALI.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhibuit die 3 Nov. 1777.

§. 1.

Cum nuper integrale ſormulae differentialis

$$\frac{\partial x (1 + xx)^2}{(1 - xx) \sqrt[4]{(1 - 6xx + x^4)}}$$

eruiſſem, quod, poſito brevitatis gratia $\sqrt[4]{(1 - 6xx + x^4)} = v$, inveneram

$$= \frac{1}{2} l \frac{1 + xx + vv - 2vx}{1 + xx + vv + 2vx} - \text{Arc. tang.} \frac{2vx}{1 + xx - vv},$$

affirmare non dubitavi hoc ipſum integrale non niſi ope Calculi Imaginariorum obtineri poſſe. Tractaveram enim ante iſtam formulam differentialem:

$$\frac{\partial y (1 - yy)^2}{(1 + yy) \sqrt[4]{(1 + 6yy + y^4)^3}}$$

ex qua illa oritur, ſi ſtatuatur $y = x\sqrt{-1}$. Nunc ergo quoque, poſtquam in integrali poſterioris loco y ſcripſiſſem $x\sqrt{-1}$, integrale ſuperioris prodire debebat. Ad hoc autem requirebatur, ut tam logarithmi, quam arcus quantitatum imaginariarum ita evolverentur, ut ad formam generalem $A + B\sqrt{-1}$ reducerentur.

§. 2. Hoc autem phaenomenon in innumeris aliis caſibus occurrere poteſt, qui ex hac conſideratione originem trahunt. Sit Z eiusmodi functio ipſius z, ut formulae differentialis $Z\partial z$ integrale utcunque, ſive algebraice, ſive per logarithmos, ſive arcus circulares exprimi queat, quod integrale per litteram V deſignemus, ut ſit $\int Z\partial z = V$. Iam loco z ſubſtituamus quantitatem imaginariam quamcunque, quam uti conſtat ſemper tali forma repraeſentare licet: $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$, ubi angulum θ ut conſtantem ſpectabimus, ita ut ſola y ſit variabilis; hoc modo erit $\partial z = \partial y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$; functio autem Z recipiat ſimilem formam $Z = M + N\sqrt{-1}$, ita ut iam formula integranda ſit

$$\int Z\partial z = \int\partial y(M\cos.\theta - N\sin.\theta) + \sqrt{-1}\int\partial y(M\sin.\theta + N\cos.\theta)$$

cuius prior pars eſt realis, poſterior vero imaginaria.

§. 3. Fiat nunc eadem ſubſtitutio, nempe $Z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$ in integrali invento V, unde pariter forma imaginaria $P + Q\sqrt{-1}$ prodeat neceſſe eſt; et quoniam partes reales et imaginariae ſeorſim inter ſe comparari debent, hinc oriuntur duae ſequentes aequalitates:

$$P = \cos.\theta\int M\partial y - \sin.\theta\int N\partial y;$$
$$Q = \sin.\theta\int M\partial y + \cos.\theta\int N\partial y;$$

un-

unde colligimus

$$\int M\,\partial y = P\,\text{coſ.}\,\theta + Q\,\text{ſin.}\,\theta \quad \text{et}$$

$$\int N\,\partial y = Q\,\text{coſ.}\,\theta - P\,\text{ſin.}\,\theta$$

hocque modo ſi inventae fuerint binae quantitates P et Q, ambo integralia tam $\int M\,\partial y$ quam $\int N\,\partial y$ exhiberi poterunt.

§. 4. Niſi autem functio propoſita Z fuerit admodum ſimplex, plerumque litterae M et N hinc proveniunt functiones tam complicatae novae variabilis y, ut vix alia via pateat, harum formularum $\int M\,\partial y$ et $\int N\,\partial y$ integralia inveſtigandi, praeter hanc ipſam, quam modo indicavimus, et quae per imaginaria procedit; totum ergo negotium huc redit, ut ex invento integrali V ambae quantitates P et Q inde oriundae definiantur. Quatenus igitur iſtud integrale V partes continet algebraicas, iſta operatio nulla laborat difficultate; quando autem logarithmos et arcus circulares involvit, haud exigua ſagacitate opus eſt, ut eius valor in formam $P + Q\sqrt{-1}$ transmutetur, quam ob rem ſubſidia hic ſum traditurus, quibus omnes huiusmodi transformationes perfici queant.

§. 5. Cuncta autem haec ſubſidia commodiſſime repeti poſſunt ex ſola formula Arc. tang. $t\sqrt{-1}$: Cum enim eius differentiale ſit $= \frac{\partial t \sqrt{-1}}{1 - tt}$, huius integrale viciſſim erit $= \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{1+t}{1-t}$, ſiquidem ita definiatur, ut evaneſcat poſito $t = 0$, quandoquidem hoc caſu etiam arcus evaneſcit. Hinc igitur iam nacti ſumus hanc primam reductionem:

$$\text{Arc. tang.}\; t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{1+t}{1-t}$$

ubi in generali forma $A + B\sqrt{-1}$ eſt $A = 0$.

§. 6. Ponamus nunc $t = u\surd -1$, eritque

$t\surd -1 = -u$ et Arc. tang. $t\surd -1 = -$ Arc. tang. u;
ex quo habebimus

$$-\text{Arc. tang. } u = \frac{\surd -1}{2} l \frac{1+u\surd -1}{1-u\surd -1},$$

unde viciſſim colligitur

$$l \frac{1+u\surd -1}{1-u\surd -1} = -\frac{2}{\surd -1}\text{Arc. tang. } u = +2\surd -1 \text{ Arc. tang. } u.$$

Cum porro ſit

$$\frac{1+u\surd -1}{1-u\surd -1} = \frac{(1+u\surd -1)^2}{1+uu}, \text{ erit}$$

$$l \frac{1+u\surd -1}{1-u\surd -1} = 2l(1+u\surd -1) - 2l\surd(1+uu)$$
$$= 2\surd -1 \text{ Arc. tang. } u,$$

unde colligitur haec nova reductio:

$$l(1+u\surd -1) = l\surd(1+uu) + \surd -1 \text{ Arc. tang. } u.$$

§. 7. Cum igitur omnes formulae imaginariae ad formam $p(\text{coſ. } a + \surd -1 \text{ ſin. } a)$ reduci queant, erit

$$l p(\text{coſ. } a + \surd -1 \text{ ſin. } a) = l p \text{ coſ. } a + l(1 + \surd -1 \text{ tang. } a)$$

et poſito $u = \text{tang. } a$, fiet

$$l(1 + \text{tang. } a\surd -1) = -l \text{ coſ. } a + a\surd -1.$$

Hinc deducimus iſtam reductionem non minus memorabilem:

$$l p(\text{coſ. } a + \surd -1 \text{ ſin. } a) = l p + a\surd -1$$

ideoque

$$l(\text{coſ. } a + \surd -1 \text{ ſin. } a) = a\surd -1.$$

§. 8. Hinc igitur iam facilem modum impetravimus omnium quantitatum imaginariarum logarithmos ad formam $A + B\surd -1$ revocandi. At vero pro arcubus imaginariis hanc

hanc ſolam reductionem adhuc ſumus nacti, qua erat Arc. tang. $t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t}$. Deſideratur ergo adhuc regula huiusmodi arcum imaginarium Arc. tang. $(p + q\sqrt{-1})$ ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reducendi. Talis quidem regula iam paſſim reperitur, quia autem plerumque nimis operoſe eſt eruta, ſequenti modo eam immediate ex ſolo principio hic ſtabilito deducemus.

§. 9. Quaeramus ſcilicet primo ſummam huiusmodi binorum arcuum, quae ſit

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) + \text{Arc. tang.}\,(p - q\sqrt{-1})$$

quam deſignemus littera R, et cum in genere ſit

$$\text{A tang. } a + \text{A tang. } b = \text{Arc. tang. } \frac{a+b}{1-ab},$$

ob $a = p + q\sqrt{-1}$ et $b = p - q\sqrt{-1}$, erit

$$R = \text{Arc. tang. } \frac{2p}{1-pp-qq}.$$

Simili modo ponatur eorundem arcuum differentia

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) - \text{Arc. tang.}\,(p - q\sqrt{-1}) = S,$$

et quia

$$\text{Arc. tang. } a - \text{Arc. tang. } b = \text{Arc. tang. } \frac{a-b}{1+ab}, \text{ erit}$$

$$S = \text{Arc. tang. } \frac{2q\sqrt{-1}}{1+pp+qq}.$$

Initio autem vidimus eſſe

$$\text{Arc. tang. } t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t},$$

unde ſumto $t = \frac{2q}{1+pp+qq}$, erit

$$S = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{(1+q)^2 + pp}{(1-q)^2 + pp}.$$

§. 10. Inventis igitur binarum illarum formularum tam ſumma R quam differentia S, utramque ſeorſim exhibere li-

licet; erit enim

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) = \frac{R + S}{2}, \text{ ideoque}$$

$$\text{Arc. tang.}\,(p+q\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{2p}{1-pp-qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp},$$

ſimilique modo erit

$$\text{Arc. tang.}\,(p-q\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{2p}{1-pp-qq} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp},$$

quae quidem ex priore ſponte deducitur, loco q ſcribendo $-q$. Hic commode Arc. tang. $\frac{2p}{1-pp-qq}$ in duos reſolvere licet, quo facto erit

$$\text{Arc. tang.}\,(p+q\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{p}{1-q} + \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{p}{1+q} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp}.$$

§. 11. Nunc igitur loco $p + q\sqrt{-1}$ ſubſtituamus formam $r(\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha)$, ut ſit $p = r\,\text{coſ.}\,\alpha$ et $q = r\,\text{ſin.}\,\alpha$, ac reperietur

$$\text{Arc. tang.}\,r(\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha) = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{2r\,\text{coſ.}\,\alpha}{1-rr} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{1+2r\,\text{ſin.}\,\alpha+rr}{1-2r\,\text{ſin.}\,\alpha+rr}.$$

Per poſteriorem autem formam erit quoque

$$\text{Arc. tang.}\,r(\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha) = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{r\,\text{coſ.}\,\alpha}{1-r\,\text{ſin.}\,\alpha} + \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{r\,\text{coſ.}\,\alpha}{1+r\,\text{ſin.}\,\alpha} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{1+2r\,\text{ſin.}\,\alpha+rr}{1-2r\,\text{ſin.}\,\alpha+rr}.$$

§. 12. Hae iam formulae haƈtenus inventae omnia ſubſidia compleƈtuntur, quibus indigebimus ad omnes logarithmos et arcus circulares imaginarios reſolvendos. Formulas autem inventas hic ſimul aſpeƈtui exponamus:

I. $l(a+b\sqrt{-1}) = la + l\left(1 + \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right) = l\sqrt{(aa+bb)} + \sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{b}{a},$

unde

unde deducitur iſta ſaepiſſime occurrens.

$$l\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{b}{a}.$$

Porro etiam notetur haec formula:

$$l\,a(\text{coſ.}\ \alpha + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \alpha) = l\,a + \alpha\sqrt{-1}.$$

Pro arcubus autem has adepti ſumus formulas:

$$\text{Arc. tang.}\ (a + b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{2a}{1-aa-bb} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{(1+b)^2+aa}{(1-b)^2+aa},$$

vel etiam

$$\text{Arc. tang.}\ a(\text{coſ.}\ \alpha + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \alpha) = \tfrac{1}{2}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{2a\ \text{coſ.}\ \alpha}{1-aa} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{1+2a\ \text{ſin.}\ \alpha+aa}{1-2a\ \text{ſin.}\ \alpha+aa}.$$

§. 13. His fundamentis conſtitutis conſideremus caſus, quibus integrale $\int Z\,\partial z$ per logarithmos et arcus circulares exprimi poteſt, id quod ſemper evenit, quando Z eſt functio rationalis ipſius z, tum autem integrale componitur ex huiusmodi partibus:

I. $l(1 \pm z)$;

II. $l(1 - 2z\ \text{coſ.}\ \alpha + zz)$;

III. $\text{Arc. tang.}\ \frac{z\ \text{ſin.}\ \alpha}{1 - z\ \text{coſ.}\ \alpha}$;

vel ſaltem integralia, quae reperiuntur, facile ad tales formas redigi poſſunt: Harum ergo reſolutionem, quando ſtatuitur $z = y(\text{coſ.}\ \theta + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \theta)$, nonnullas in ſequentibus problematibus expediemus.

Problema 1.

§. 14. *Hanc formulam logarithmicam $l(1 \pm z)$, poſito*

$z = y\ \text{coſ.}\ \theta + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \theta)$

ad formam generalem $A + B\sqrt{-1}$ reducere.

Solutio.

Evolvamus primo formulam

$$l(1+z) = l(1+y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + y\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,\theta)$$

et comparatione cum ſuperiore forma generali facta erit

$$a = 1 + y\,\mathrm{coſ.}\,\theta \quad \text{et} \quad b = y\,\mathrm{ſin.}\,\theta,$$

unde colligitur

$$l(1+z) = l\sqrt{(1+2y\,\mathrm{coſ}\,\theta + yy)}$$
$$+\sqrt{-1}\,\mathrm{Arc.\,tang.}\,\frac{y\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{1+y\,\mathrm{coſ.}\,\theta}.$$

Hinc autem alter caſus $l(1-z)$ ſponte derivatur, ſumendo y negative, eritque ergo $l(1-z) =$

$$l\sqrt{(1-2y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + yy)} - \sqrt{-1}\,\mathrm{Arc.\,tang.}\,\frac{y\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{1-y\,\mathrm{coſ.}\,\theta}.$$

Saepenumero autem in integralibus occurrere ſolet formula $l\frac{1+z}{1-z}$, cuius ergo valor, poſito

$$z = y(\mathrm{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,\theta),$$

ſequenti modo exprimetur:

$$l\frac{1+z}{1-z} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+2y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + yy}{1-2y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + yy}$$
$$+\sqrt{-1}\,\mathrm{Arc.\,tang.}\,\frac{y\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{1+y\,\mathrm{coſ.}\,\theta} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Arc.\,tang.}\,\frac{y\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{1-y\,\mathrm{coſ.}\,\theta},$$

quare ſi ambo arcus in unum contrahantur, prodibit

$$l\frac{1+z}{1-z} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+2y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + yy}{1-2y\,\mathrm{coſ.}\,\theta + yy} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Arc.\,tang.}\,\frac{2y\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{1-yy}.$$

Problema 5.

§. 15. *Propoſita formula logarithmica*

$$l(1-2z\,\mathrm{coſ.}\,\zeta + zz).$$

ſi in ea ponatur $z = y(\mathrm{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,\theta)$, *eius valorem ad formulam poſtulatam* $A + B\sqrt{-1}$ *reducere.*

Solu-

Solutio.

Si hic immediate ſubſtitutionem facere vellemus, in calculos ſatis moleſtos delaberemur, quos ut evitemus, obſervaſſe iuvabit, formulam $1 - 2z \cos. \alpha + zz$ eſſe productum ex his factoribus:

$$[1 - z(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)(1 - z(\cos. \alpha - \sqrt{-1} \sin. \alpha)],$$

quorum ergo logarithmos invicem addi oportet.

Tractemus ergo primo formulam

$$l[1 - z(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)],$$

et cum ſit

$$y(\cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta)(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)$$
$$= z(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)$$

quoniam in genere eſt

$$(\cos. \beta + \sqrt{-1} \sin. \beta)(\cos. \gamma + \sqrt{-1} \sin. \gamma)$$
$$= \cos. (\beta + \gamma) + \sqrt{-1} \sin. (\beta + \gamma), \text{ erit}$$

$$l[1 - z(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)]$$
$$= l[1 - y \cos. (\alpha + \theta) + \sqrt{-1} \sin. (\alpha + \theta)].$$

Hic ergo facta comparatione erit

$$a = 1 - y \cos. (\alpha + \theta) \text{ et } b = - y \sin. (\alpha + \theta),$$

unde eius valor reſolutus erit

$$l[1 - z(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)]$$
$$= \tfrac{1}{2} l[1 - 2y \cos. (\alpha + \theta) + yy] - \sqrt{-1} \text{ Arc. tang. } \frac{y \sin. (\alpha + \theta)}{1 - y \cos. (\alpha + \theta)}.$$

Hinc altera formula facile deducitur, ſumendo angulum α negative, eritque

$$l[1 - z(\cos. \alpha - \sqrt{-1} \sin. \alpha)]$$
$$= \tfrac{1}{2} l[1 - 2y \cos. (\theta - \alpha) + yy] - \sqrt{-1} \text{ Arc. tang. } \frac{y \sin. (\theta - \alpha)}{1 - y \cos. (\theta - \alpha)}.$$

 Nunc

Nunc igitur tantum opus eſt, ambos valores, quos modo invenimus, invicem addere, ſicque prodibit haec reductio:

$$l(1 - 2z\,\text{coſ.}\,\alpha + zz)$$
$$= \tfrac{1}{2} l[1 - 2y\,\text{coſ.}(\alpha+\theta) + yy] - \sqrt{-1}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{y\,\text{ſin.}(\alpha+\theta)}{1 - y\,\text{coſ.}(\alpha+\theta)}$$
$$+ \tfrac{1}{2} l[1 - 2y\,\text{coſ.}(\theta-\alpha) + yy] - \sqrt{-1}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{y\,\text{ſin.}(\theta-\alpha)}{1 - y\,\text{coſ.}(\theta-\alpha)}$$

Problema 3.

§. 16. *Propoſita formula pro arcu circulari*

$$T = \textit{Arc. tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,\alpha}{1 - z\,\text{coſ.}\,\alpha},$$

ſi in ea ponatur $z = y(\text{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\theta)$, *eius valorem inde reſultantem ad formam* $A + B\sqrt{-1}$ *revocare.*

Solutio.

Quia hic in numeratore et denominatore imaginaria occurrunt, ad ſimpliciorem formam perveniemus, ſi utrinque addamus Arc. α, ſive Arc. tang. $\frac{\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha}$; ſic enim erit

$$T + \alpha = \text{Arc. tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha - z} = 90^\circ - \text{Arc. tang.}\,\frac{\text{coſ.}(\alpha - z)}{\text{ſin.}\,\alpha},$$

ideoque

$$T = 90^\circ - \alpha - \text{Arc. tang.}\,\frac{\text{coſ.}(\alpha - z)}{\text{ſin.}\,\alpha}.$$

Iam in hac poſtrema formula ponamus

$$z = y(\text{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\theta),\ \text{fietque}$$

$$\text{Arc. tang.}\,\frac{\text{coſ.}(\alpha - z)}{\text{ſin.}\,\alpha} = \text{Arc. tang.}\,\frac{\text{coſ.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\theta - y\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\alpha}$$

quae expreſſio comparata cum formula generali

Arc.

Arc. tang. $(a + b\sqrt{-1})$ dat

$$a = \frac{\cos.\alpha - y\cos\theta}{\sin.\alpha} \text{ et } b = -\frac{y\sin.\theta}{\sin.\alpha}.$$

Hinc igitur erit

$$1 - aa - bb = -\frac{\cos.2\alpha + 2y\cos.\alpha\cos.\theta - yy}{\sin.\alpha^2}$$

ideoque

$$\frac{2a}{1 - aa - bb} = \frac{\sin.2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{-\cos.2\alpha + 2y\cos.\alpha\cos.\theta - yy}, \text{ ergo}$$

$$\text{Arc. tang.}\frac{2a}{1 - aa - bb} = -\text{Arc. tang.}\frac{\sin.2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{\cos.2\alpha - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy}$$

Iam pro parte imaginaria erit

$$1 + aa + bb = \frac{1 - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy}{\sin.\alpha^2},$$

unde colligitur numerator

$$(1 + b)^2 + aa = \frac{1 - 2y\cos.(\theta - \alpha) + yy}{\sin.\alpha^2}$$

et denominator

$$(1 - b)^2 + aa = \frac{1 - 2y\cos.(\alpha + \theta) + yy}{\sin.\alpha^2},$$

ſicque pars imaginaria erit

$$\frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\, \frac{(1 + b)^2 + aa}{(1 - b)^2 + aa} = \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\, \frac{1 - 2y\cos.(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y\cos.(\alpha + \theta) + yy},$$

quamobrem hinc colligimus

$$\text{Arc. tang.}\frac{\cos.(\alpha - z)}{\sin.\alpha} = -\tfrac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{\sin.2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{\cos.2\alpha - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\, \frac{1 - 2y\cos.(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y\cos.(\alpha + \theta) + yy}.$$

His iam formulis inventis reductio ipſius formulae propoſitae ita ſe habebit:

$$\text{Arc. tang.}\frac{z\sin.\alpha}{1 - z\cos.\alpha} = 90^0 - \alpha + \tfrac{1}{2}\text{Arc. tg.}\frac{\sin.2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{\cos.2\alpha - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\, \frac{1 - 2y\cos.(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y\cos.(\alpha + \theta) + yy}.$$

Hae

Hae iam reductiones haud difficulter ad omnes formulas accommodari poterunt, quod quo clarius appareat, ſequens exemplum adiungamus.

Integratio Formulae differentialis

$$\frac{\partial x}{(3 - xx)\sqrt[3]{(1 - 3xx)}} = \partial V.$$

§. 17. Quoniam nondum apparet, quomodo hanc ipſam formulam tractari conveniat, eam ad ſequentem formam imaginariam, ponendo $x = z\sqrt{-1}$, reducamus, ut ſit

$$\partial V = \frac{\partial z\sqrt{-1}}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}},$$

quae forma iam ita comparata deprehenditur, ut per praecepta non ita pridem tradita ad integrationem perduci poſſit, eius ergo reſolutionem ſequenti modo expedire poterimus.

§. 18. Ponamus igitur

$$\frac{\partial z}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}} = \partial T,$$

ut ſit $V = T\sqrt{-1}$. Hanc autem formam ſequenti modo repraeſentemus: $\partial T = \frac{z\partial z}{(3z + z^3)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}}$, ubi brevitatis gratia ſtatuamus $\sqrt[3]{(1 + 3zz)} = v$, ut ſit

∂T

$$\partial T = \frac{z\,\partial z}{v(3z+z^3)},$$

hicque ſecundum noſtra praecepta ſtatuamus $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, unde fit $p+q = \frac{2}{v}$ et $p-q = \frac{2z}{v}$, hincque $z = \frac{p-q}{p+q}$, ideoque differentiando

$$\partial z = \frac{2q\,\partial p - 2p\,\partial q}{(p+q)^2} = \tfrac{1}{2}vv(q\,\partial p - p\,\partial q),$$

quo valore ſubſtituto impetramus

$$\partial T = \frac{vz(q\,\partial p - p\,\partial q)}{2(3z+z^3)}.$$

§. 19. Cum iam ſit $1+z = pv$ et $1-z = qv$, erit primo $2z = v(p-q)$, tum vero ſumma cuborum dabit

$$(1+z)^3 + (1-z)^3 = v^3(p^3+q^3) = 2+6zz.$$

Quoniam igitur poſuimus $\sqrt[3]{(1+3zz)} = v$, erit $v^3 = 1+3zz$; quam ob rem habebimus $(p^3+q^3)(1+3zz) = 2+6zz$, conſequenter $p^3+q^3 = 2$. Denique vero differentia cuborum praebet $(p^3-q^3)v^3 = 6z+2z^3$; unde patet eſſe $3z+z^3 = \frac{1}{2}(p^3-q^3)v^3$; at vero differentia quadratorum dat $(pp-qq)vv = 4z$, unde fit $z = \frac{1}{4}vv(pp-qq)$.

§. 20. Subſtituantur nunc iſti valores loco z et $3z+z^3$, atque noſtra formula evadet

$$\partial T = \frac{(pp-qq)(q\,\partial p - p\,\partial q)}{4(p^3-q^3)},$$

ubi ergo tantum binae litterae p et q occurrunt, quae ita a ſe invicem pendent, ut ſit $p^3+q^3 = 2$, ideoque differentiando $pp\,\partial p + qq\,\partial q = 0$, conſequenter ſive $\partial p = \frac{-qq\,\partial q}{pp}$, ſive $\partial q = \frac{-pp\,\partial p}{qq}$.

§. 21.

§. 21. Dividatur nunc haec forma in duas partes, ponendo

$$\frac{pp(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial P \text{ et } \frac{qq(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial Q,$$

ut ſit $\partial T = \frac{1}{4}\partial P - \frac{1}{4}\partial Q$, hicque ſtatim patet, ſi in priore formula loco $pp\partial p$ ſcribatur $-qq\partial q$, tum prodire

$$\partial P = -\frac{\partial q(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3}.$$

Quia vero eſt $p^3 + q^3 = 2$, ideoque $p^3 = 2 - q^3$, elementum ∂P per ſolam litteram q ita exprimetur, ut ſit

$$\partial P = -\frac{\partial q}{1 - q^3}.$$

§. 22. Simili modo ſi in altera formula ∂Q loco $qq\partial q$ ſcribatur $-pp\partial p$, prodibit $\partial Q = \frac{\partial p(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3}$, quae ergo ob relationem inter p et q ſuppeditat hanc formulam:

$$\partial Q = \frac{\partial p}{p^3 - 1} = \frac{-\partial p}{1 - p}.$$

His igitur coniunctis erit

$$4\partial T = \frac{\partial p}{1 - p^3} - \frac{\partial q}{1 - q^3},$$

ſicque totum negotium perductum eſt ad duas formulas differentiales rationales, quas ergo per logarithmos et arcus circulares integrare licet.

§. 23. Ad haec integralia invenienda ſtatuatur

$$\frac{1}{1 - p^3} = \frac{F}{1 - p} + \frac{G}{1 + p + pp},$$

ubi notetur fore

$$F = \frac{1 - p}{1 - p^3} = \frac{1}{1 + p + pp},$$

poſito $1 - p = 0$, ſive $p = 1$, unde fit $F = \frac{1}{3}$, tum vero erit

$$G = \frac{1 + p + pp}{1 - p^3} = \frac{1}{1 - p},$$

po-

poſito $1 + p + pp = 0$. Hic iam ut littera p ex denominatore tolli queat, multiplicetur ſupra et infra per $2 + p$, fiet $G = \frac{2 + p}{2 - p - pp}$. Quia igitur eſt $p + pp = -1$, erit $G = \frac{2+p}{3}$; quam ob rem habebimus $\frac{3 \partial p}{1 - p^3} = \frac{\partial p}{1 - p} + \frac{(2 + p) \partial p}{1 + p + pp}$. Conſtat autem eſſe $\int \frac{\partial p}{1 - p} = - l(1 - p)$ et

$$\int \frac{p \partial p + 2 \partial p}{pp + p + 1} = \frac{1}{2} l(1 + p + pp) + \frac{3}{2} \int \frac{\partial p}{1 + p + pp}.$$

Novimus autem in genere eſſe

$$\int \frac{\partial p}{1 - 2 p \,\mathrm{coſ.}\, \alpha + pp} = \frac{1}{\mathrm{ſin.}\, \alpha} \text{ Arc. tang. } \frac{p \,\mathrm{ſin.}\, \alpha}{1 - p \,\mathrm{coſ.}\, \alpha},$$

unde patet ſumi debere $\alpha = 120°$, et ob ſin. $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, erit

$$\int \frac{\partial p}{1 + p + pp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \frac{p \sqrt{3}}{2 + p},$$

ſicque totum integrale erit

$$3 \int \frac{\partial p}{1 - p^3} = - l(1 - p) + \frac{1}{2} l(1 + p + pp)$$
$$+ \sqrt{3} \text{ Arc. tang. } \frac{p \sqrt{3}}{2 + p},$$

ſimilique modo erit

$$3 \int \frac{\partial q}{1 - q^3} = - l(1 - q) + \frac{1}{2} l(1 + q + qq)$$
$$+ \sqrt{3} \text{ Arc. tang. } \frac{q \sqrt{3}}{2 + q}.$$

§. 24. His igitur inventis erit

$$12\, T = l \frac{1 - q}{1 - p} + \frac{1}{2} l \frac{1 + p + pp}{1 + q + qq}$$
$$+ \sqrt{3} \text{ Arc. tang. } \frac{p \sqrt{3}}{2 + p} - \sqrt{3} \text{ Arc. tang. } \frac{q \sqrt{3}}{2 + q}.$$

Quare cum ſit $p = \frac{1 + z}{v}$ et $q = \frac{1 - z}{v}$, habebimus

$$T = \frac{1}{12} l \frac{v - 1 + z}{v - 1 - z} + \frac{1}{24} l \frac{vv + v(1 + z) + (1 + z)^2}{vv + v(1 - z) + (1 - z)^2}$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \frac{(1 + z)\sqrt{3}}{2v + 1 + z} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ Arc. tang. } \frac{(1 - z)\sqrt{3}}{2v + 1 - z}.$$

§. 25. Nunc ſecundum praecepta ſupra expoſita, ubi ſumſimus $z = y(\text{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\theta)$, quia eſt $x = z\sqrt{-1}$, erit

$$z = -x\sqrt{-1} = y(\text{coſ.}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\theta);$$

unde patet ſtatui debere $\theta = 90^\circ$ et $y = -x$, hocque notato, ut ſuperiores reductiones ad noſtrum caſum propius accommodemus, ibi ubique loco z et y ſcribamus $\frac{z}{s}$ et $\frac{y}{s}$, quo facto reductiones erunt

I. $l(s+z) = +\frac{1}{2}l(ss+2sy\,\text{coſ.}\,\theta+yy)+\sqrt{-1}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{y\,\text{ſin.}\,\theta}{s+y\,\text{coſ.}\,\theta}$.

II. $l(ss-2sz\,\text{coſ.}\,\alpha+zz) = \frac{1}{2}l[ss-2sy\,\text{coſ.}(\alpha+\theta)+yy]$
$$-\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{y\,\text{ſin.}(\alpha+\theta)}{s-y\,\text{coſ.}(\alpha+\theta)}$$
$$+\frac{1}{2}l(ss-2sy\,\text{coſ.}(\theta-\alpha)+yy)-\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{y\,\text{ſin.}(\theta-\alpha)}{s-y\,\text{coſ.}(\theta-\alpha)}.$$

III. $\text{Arc. tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,\alpha}{s-z\,\text{coſ.}\,\alpha} = 90^\circ-\alpha+\frac{1}{9}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{ss\,\text{ſin.}\,2\alpha-2sy\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\theta}{ss\,\text{coſ.}\,2\alpha-2sy\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\theta+yy}$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{ss-2sy\,\text{coſ.}(\theta-\alpha)+yy}{ss-2sy\,\text{coſ.}(\alpha+\theta)+yy}.$$

§. 26. Iam haec praecepta ad ſingulas partes integralis inventi applicemus, ac primo quidem pro formula $l(v-1+z)$ erit $s = v-1$, et ob $y = -x$ et $\theta = 90^\circ$ colligitur

I. $l(v-1+z) = \frac{1}{2}l[(v-1)^2+xx]-\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x}{v-1}$.

II. $l(v-1-z) = \frac{1}{2}l[(v-1)^2+xx]+\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x}{v-1}$.

III. Pro formula $l[vv+v(1+z)+(1+z)^2]$ patet fore
$ss = vv+v+1$, ſeu $s = \sqrt{(vv+v+1)}$;
$\text{coſ.}\,\alpha = -\frac{v+2}{2\sqrt{(vv+v+1)}}$ et $\text{ſin.}\,\alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{(vv+v+1)}}$,

unde ob $\theta = 90^\circ$ erit

$\text{coſ.}(\alpha+\theta) = -\text{ſin.}\,\alpha$; $\text{coſ.}(\theta-\alpha) = \text{ſin.}\,\alpha$;
$\text{ſin.}(\alpha+\theta) = \text{coſ.}\,\alpha$ et $\text{ſin.}(\theta-\alpha) = \text{coſ.}\,\alpha$;

quo

quo obſervato erit

$$l[vv+v(1+z)+(1+z)]^2=\tfrac{1}{2}l[vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx]$$
$$+\tfrac{1}{2}l[vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx]$$
$$-\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$-\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}},$$

hinc ſimul mutato ſigno litterarum z et x erit

$$l[vv+v(1-z)+(1-z)^2]=\tfrac{1}{2}l[vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx]$$
$$+\tfrac{1}{2}l[vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx]$$
$$+\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}}$$
$$+\sqrt{-1}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}.$$

§. 27. Nunc porro pro Arc. tang. $\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z}$, quae forma in regula noſtra non continetur, notetur eſſe

$$\text{Arc. tg.}\,\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z}=\text{Arc. tg.}\,\frac{\sqrt{3}}{2v+1}+\text{Arc. tg.}\,\frac{vz\sqrt{3}}{2(vv+v+1)+(v+2)z},$$

qui poſtremus valor comparatus cum Arc. tang. $\frac{z\,\text{ſin.}\,\alpha}{s-z\,\text{coſ.}\,\alpha}$ iterum praebet ſin. $\alpha=\frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{(vv+v+1)}}$, ſicque anguli $\alpha+\theta$ et $\theta-\alpha$ manent iidem, ut ante; unde reductio praebet

$$\text{Arc. tang.}\,\frac{vz\sqrt{3}}{2(vv+v+1)+(v+2)z}=-\tfrac{1}{2}\text{Arc. tg.}\,\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

Nacti ergo ſumus has reductiones:

$$\text{Arc. tg.}\,\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z}=\text{Arc. tg.}\,\frac{\sqrt{3}}{2v+1}-\tfrac{1}{2}\text{Arc. tg.}\,\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}\quad\text{et}$$

$$\text{Arc. tg.}\,\frac{(1-z)\sqrt{3}}{2v+1-z}=\text{Arc. tg.}\,\frac{\sqrt{3}}{2v+1}-\tfrac{1}{2}\text{Arc. tg.}\,\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}.$$

§. 28.

§. 28. Quodſi iam omnes has partes rite colligamus, reperiemus

$$T = -\frac{\sqrt{-1}}{6}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x}{v-1} - \frac{\sqrt{-1}}{12}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{12}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

§. 29. Hic igitur commode uſu venit, ut omnes partes reales ſe mutuo deſtruxerint, imaginariae vero duplicatae prodierint, quemadmodum natura rei manifeſto poſtulat. Cum igitur integrale quaeſitum ſit $V = T\sqrt{-1}$, nunc eius valor pulcherrime prodit realis, quocirca perducti ſumus ad hanc integrationem:

$$\int\frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}} = +\frac{1}{6}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x}{v-1}$$
$$+\frac{1}{12}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{12}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{3}}\,l\,\frac{(vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx)}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx},$$

ubi eſt $v = \sqrt[3]{(1-3xx)}$. Hae formulae aliquanto ſimpliciores reddi poſſunt, conſiderando quod ſit $1 - v^3 = 3xx$, ideoque $1 + v + vv = \frac{3xx}{1-v}$, unde cum plures ſubſtitutiones adhiberi queant, iis hic non immorandum cenſemus, ſed contenti eſſe poſſumus, iſtius formulae differentialis integrale erutſſe, ad quod per nullam aliam methodum aditus patere videtur.

§. 30.

§. 30. Caeterum calculus facilior evadet, ſi in integrali primum invento ambo arcus per $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ multiplicati in unum colligantur: inde enim prodit $\frac{1}{4\sqrt{3}}$, Arc. tg. $\frac{vz\sqrt{3}}{vv+v+1-zz}$. Hic iam ſtatim ponatur $z = -x\sqrt{-1}$, ut formula prodeat $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$ Arc. tang. $\frac{v \cdot \sqrt{3}\sqrt{-1}}{vv+v+1+xx}$, quae comparata cum canonica Arc. tang. $t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t}$, ob $t = \frac{vx\sqrt{3}}{vv+v+1+xx}$, ſtatim perducit ad hanc formulam reductam:

$$\frac{-\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}} l \frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

DE

DE
FORMVLIS SPECIEI
$m x x + n y y$,
AD NVMEROS PRIMOS EXPLORANDOS IDONEIS, EARVMQVE MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS.

Auctore

L. EVLERO.

Conv. Acad. exhib. die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Hic praecipue reſpicio ad eam huiusmodi formularum proprietatem, qua conſtat omnes numeros, qui in tali forma $m x x + n y y$ duplici modo continentur, certe non eſſe primos, ſiquidem numeri m et n ambo fuerint poſitivi; ſi enim alter eorum eſſet negativus, utique evenire poſſet, ut idem numerus primus pluribus modis in tali formula contineretur. Veluti ſi $m = 2$ et $n = -1$, in formula $2 x x - y y$ numerus primus 7 pluribus adeo modis continetur, ſcilicet: I. Si $x = 2$, $y = 1$; II. Si $x = 4$, $y = 5$; III. Si $x = 8$, $y = 11$ atque adeo infinitis aliis modis hoc contingere poteſt.

§. 2.

§. 2. Verum ſi ambo numeri m et n fuerint poſitivi, uti deinceps perpetuo ſupponemus, tum quoties quispiam numerus N duplici modo in formula $mxx + nyy$ continetur, ita ut ſit $N = maa + nbb = mcc + ndd$, eius factores per hanc regulam ſatis facilem ſemper inveniri posſunt. Formetur enim primo fractio $\frac{p}{q} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$ ad minimos terminos reducenda; hincque formetur alia fractio $\frac{r}{s} = \frac{mpp}{nqq}$ pariter ad formam ſimpliciſſimam reducenda, quo facto erit $r + s$ factor numeri N, ſiquidem $r + s$ fuerit numerus impar, ſin autem fuerit par, tum eius ſemiſſis $\frac{r+s}{2}$ factor erit numeri N; et quoniam ob ambiguitatem ſigni quatuor variationes locum habent, binae dabunt unum ipſius N factorem, binae reliquae vero alterum.

§. 3. Quo hoc clarius perſpiciatur, ſequens perpendamus exemplum. Conſideremus formulam $7xx + 3yy$, ubi $m = 7$ et $n = 3$, in qua numerus 391 duplici modo continetur, cum ſit primo

$391 = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 11^2$, tum vero etiam

$391 = 7 \cdot 7^2 + 3 \cdot 4^2$.

Hinc ergo erit $\frac{p}{q} = \frac{2 \pm 7}{11 \pm 4}$, cuius ergo quaterni valores erunt

I. $\frac{p}{q} = \frac{3}{5}$; II. $\frac{p}{q} = \frac{9}{7}$;

III. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; IV. $\frac{p}{q} = \frac{5}{7}$;

hinc iam porro deducantur ſequentes fractiones:

I. $\frac{r}{s} = \frac{7 \cdot 3^2}{3 \cdot 5^2} = \frac{21}{25}$; II. $\frac{r}{s} = \frac{7 \cdot 9^2}{3 \cdot 7^2} = \frac{27}{7}$;

III. $\frac{r}{s} = \frac{7 \cdot 1^2}{3 \cdot 3^2} = \frac{7}{27}$; IV. $\frac{r}{s} = \frac{7 \cdot 5^2}{3 \cdot 7^2} = \frac{25}{21}$.

Hic ergo prodit ubique $r + s$ numerus par, ideoque ſemisſem

ſem capiendo ex primo et quarto oritur factor 23, at vero ex ſecundo et tertio colligitur alter factor 17; revera autem eſt $391 = 17 \cdot 23$.

§. 4. Contemplemur etiam ſequens exemplum non parum memorabile, quo $m = 5$ et $n = 3$, atque in formula $5xx + 3yy$ numerus 512 duplici modo continetur cum ſit primo $512 = 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 13^2$ et $512 = 5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 12^2$, unde ſit $\frac{p}{q} = \frac{4 \pm 1}{13 \pm 12}$, cuius quatuor valores ſunt

$$\text{I. } \frac{p}{q} = \frac{1}{5}; \quad \text{II. } \frac{p}{q} = \frac{5}{1};$$

$$\text{III. } \frac{p}{q} = \frac{3}{25}; \quad \text{IV. } \frac{p}{q} = \frac{3}{1};$$

unde fractiones $\frac{r}{s}$ fient:

$$\text{I. } \frac{r}{s} = \frac{5 \cdot 1^2}{3 \cdot 5^2} = \frac{1}{15}; \quad \text{II. } \frac{r}{s} = \frac{5 \cdot 5^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{125}{3};$$

$$\text{III. } \frac{r}{s} = \frac{5 \cdot 3^2}{3 \cdot 25^2} = \frac{3}{125}; \quad \text{IV. } \frac{r}{s} = \frac{5 \cdot 3^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{15}{1};$$

ergo formula $\frac{r + s}{2}$ ex primo et quarto dat factorem 8, ex ſecundo vero et tertio factorem 64, quorum productum utique eſt 512.

§. 5. Verum idem hic numerus 512 inſuper duobus aliis modis in eadem formula $5xx + 3yy$ continetur; priori ſcilicet modo reperitur

$512 = 5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^2$, poſteriori vero modo

$512 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 2^2$,

hinc ergo plures alios factores reperire licebit, id quod mirum non eſt, quia numerus 512 pluribus modis in duos factores reſolvi poteſt. Veluti prima et poſtrema reſolutio dant $\frac{p}{q} = \frac{10 \pm 1}{13 \pm 2}$, unde hae quatuor emergunt fractiones:

I.

I. $\frac{p}{q} = \frac{11}{15}$; II. $\frac{p}{q} = \frac{11}{11}$;

III. $\frac{p}{q} = \frac{3}{5}$; IV. $\frac{p}{q} = \frac{9}{11}$;

unde pro $\frac{r}{s}$ ſequentes orientur fractiones:

I. $\frac{r}{s} = \frac{5.11^2}{3.15^2} = \frac{121}{135}$; II. $\frac{r}{s} = \frac{5.1^2}{3.1^2} = \frac{5}{3}$;

III. $\frac{r}{s} = \frac{5.3^2}{3.5^2} = \frac{3}{5}$; IV. $\frac{r}{s} = \frac{5.9^2}{3.11^2} = \frac{135}{121}$;

unde factores ex $\frac{r+s}{2}$ oriundi erunt: alter 128, alter vero 4, quorum productum utique eſt 512.

§. 6. Cum igitur haec propoſitio ſit certiſſima: *Quod omnes numeri plus uno modo in eadem formula* $mxx+nyy$ *contenti non ſint primi ſed compoſiti, ideoque numeri primi unico tantum modo in tali formula contineri queant*; contemplemur huius propoſitionis inverſam, quae ita enunciabitur: *Quod omnes numeri compoſiti in formula* $mxx+nyy$ *contenti etiam plus uno modo in eadem contineantur, vel quod omnes numeri unico tantum modo in iſta formula contenti certe ſint primi.*

§. 7. Statim autem patet hanc propoſitionem inverſam in genere admitti non poſſe, cum innumerabiles caſus exhiberi queant, quibus numeri valde compoſiti in talibus formulis unico tantum modo continentur. Ita ſi $m = 7$ et $n = 2$, in formula $7xx + 2yy$ iſte numerus compoſitus 15 certe unico tantum modo continetur, ſcilicet quando $x = 1$ et $y = 2$. Quin etiam in eadem formula iſte numerus compoſitus $1807 = 13.139$ unico tantum modo contineri deprehenditur, ſcilicet quando $x = 1$ et $y = 30$. Ex quo manifeſto apparet, iſtam propoſitionem inverſam, quod numeri unico tantum modo in tali formula $mxx+nyy$ contenti

etiam ſint numeri primi, in genere veritati non eſſe conſentaneam.

§. 8. Interim tamen plures caſus pro binis numeris m et n ita ſunt comparati, ut propoſitio illa inverſa egregie cum veritate conſentiat, inter quos notiſſimus eſt caſus, quo $m = 1$ et $n = 1$ et formula noſtra ſumma duorum quadratorum $xx + yy$; ſiquidem iam rigoroſe eſt demonſtratum, omnes numeros, qui unico tantum modo ſunt ſummae duorum quadratorum, ſemper etiam eſſe primos, dummodo fuerint impares, atque numeri x et y primi inter ſe, quae levis limitatio ſponte ſua patet. Atque hoc ipſo principio iam olim ſum uſus ad numeros praegrandes examinandos, utrum ſint primi nec ne. Statim enim atque oſtenſum fuerit numerum quantumvis magnum (imparem) unico tantum modo eſſe ſummam duorum quadratorum, etiam certum eſt eum eſſe primum.

§. 9. Eadem quoque indole praeditae ſunt ſequentes formulae ſimpliciores, veluti: $2xx + yy$; $3xx + yy$; $3xx + 2yy$; $5xx + yy$; $5xx + 2yy$; $5xx + 3yy$; $6xx + yy$; $6xx + 5yy$; etc. de quarum pleriſque a Geometris iam demonſtratum, vel ſaltem obſervatum eſt, quod omnes numeri in quapiam earum unico tantum modo contenti etiam certe ſint primi, ſi modo pauciſſimi caſus, per ſe perſpicui, excipiantur; ſcilicet quando numeri vel ſunt pares, vel cum numeris m et n communem diviſorem recipiunt. Quin etiam in certis formulis evenire poteſt, ut adeo poteſtates binarii unico modo contineantur, veluti numerus 8 in formula $5xx + 3yy$ et numerus 16 in formula $15xx + yy$, quibus ergo caſibus poteſtates binarii numeris primis aequivalere

lere ſunt cenſendae, propterea quod non diverſos factores involvunt.

§. 10. Hinc igitur intelligimus in formula $mxx+nyy$ ingens intercedere diſcrimen, cum aliae ita ſint comparatae, ut omnes numeri unico modo in iis contenti recte pro primis haberi queant, dum aliae hac inſigni proprietate ſunt deſtitutae, quemadmodum in formula $7xx+2yy$ uſu venire iam ante obſervavimus. Quam ob rem cum iſtud diſcrimen non ſolum ſit maximi momenti, ſed etiam in ipſa natura harum formularum fundatum, plurimum conveniet, duas talium formularum claſſes conſtituere, atque a ſe invicem ſollicite diſtinguere, quandoquidem hic nobis propoſitum eſt inſignes atque adeo mirabiles proprietates prioris claſſis accuratius evolvere, quam ergo ſequenti definitione determinemus.

Definitio.

Quando numeri m et n ita ſunt comparati, ut omnes numeri unico modo in formula $mxx+nyy$ contenti ſint vel ipſi primi, vel tantum binarium vel quempiam factorem numerorum m et n involvant, vel etiam certis caſibus ſint poteſtates binarii; tales formulas in ſequentibus formulas congruas appellabimus; ubi quidem per ſe perſpicuum eſt ambos numeros x et y inter ſe primos accipi debere.

§. 11. Hic igitur probe tenendum eſt numeros ſemel tantum in tali formula congrua $mxx+nyy$ contentos non ſtatim pro primis eſſe habendos, propterea quod evenire poteſt, ut denotante p numerum primum quemcunque, iſti numeri etiam formam habeant vel $2p$, vel δp, exiſtente δ

 divi-

diviſore producti mn. Hic autem poſterior caſus penitus ceſſat, quando numerus x primus ad n, ſimulque y primus ad m accipiatur. Deinde vero etiam iam obſervavimus, poteſtates quoque binarii unico tantum modo in certis formulis, veluti $5xx + 3yy$ contineri poſſe, quae tamen formula nihilominus pro congrua eſt habenda, cum omnes numeri impares ad $3.5 = 15$ primi et unico modo in hac formula contenti ſemper revera ſint primi. Ita quia numerus 107 unico modo in iſta formula continetur, ſumendo ſcilicet $x = 4$ et $y = 3$, is recte pro primo haberi poteſt.

§. 12. Quoniam igitur in hoc iudicio non ſolum numeri primi ipſi p ſed etiam $2p$ et δp inſtar primorum ſpectari queant, denotante δ diviſorem quempiam numeri mn quibus adeo certis caſibus etiam poteſtates binarii annumerare licet; viciſſim ſequitur omnes reliquos numeros, quos revera compoſitos vocemus, qui in tali formula congrua $mxx + nyy$ continentur, ſimul quoque plus quam uno modo in ea contineri debere. Veluti quia numerus $527 = 5.10^2 + 3.3^2$ non eſt primus, ſed factoribus conſtat 17.31, is inſuper alio modo in eadem formula continetur, ſcilicet eſt $527 = 5.2^2 + 3.13^2$, atque ex hac duplici reſolutione per regulam ſupra datam factores numeri 527 ſequenti modo eruuntur. Cum primo ſit $\frac{p}{q} = \frac{10 \pm 2}{13 \pm 3}$, quaterni eius valores erunt 1°. $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$; 2°. $\frac{p}{q} = \frac{6}{5}$; 3°. $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ et 4°. $\frac{p}{q} = \frac{4}{5}$; unde porro altera fractio $\frac{r}{s} = \frac{mpp}{nqq}$ producit hos valores: 1°. $\frac{r}{s} = \frac{15}{16}$; 2°. $\frac{r}{s} = \frac{12}{5}$; 3°. $\frac{r}{s} = \frac{5}{12}$ et 4°. $\frac{r}{s} = \frac{16}{15}$; unde aggregatum $r + s$ praebet duos factores 31 et 17.

§. 13.

§. 13. Stabilita hac definitione formularum congruarum reliquas omnes hac inſigni proprietate deſtitutas diſtinctionis gratia incongruas appellabimus easque hoc charactere deſignare licebit: quod etiam numeri revera compoſiti exhiberi queant, qui in talibus formulis unico tantum modo contineantur, veluti evenit in hac formula incongrua $7xx + 5yy$, in qua iſte numerus compoſitus $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ unico tantum modo continetur, ſcilicet quando $x = 2$ et $y = 7$.

§. 14. Totum ergo negotium huc redit, ut regulam certam tradamus, cuius ope formulas congruas ab incongruis diſcernere liceat. Quoniam autem hic duo numeri m et n in conſiderationem ſunt ducendi, univerſa haec quaeſtio ope ſequentis theorematis ad conſiderationem unici numeri revocari poteſt.

Theorema.

Si formula $mxx + nyy$ eſt congrua, tum etiam haec formula $mnxx + yy$ erit congrua, ac viciſſim.

Demonſtratio.

§. 15. Ponamus enim formulam $mxx + nyy$ eſſe congruam, alteram vero $mnxx + yy$ eſſe incongruam. Daretur igitur numerus revera compoſitus C unico tantum modo in hac formula contentus, qui ſit $C = mnaa + bb$; hinc ergo foret $nC = mnnaa + nbb$ quoque unico modo, ideoque etiam unico modo in formula $mxx + nyy$ contineretur, exiſtente ſcilicet $x = na$ et $y = b$; unde ſequeretur formulam $mxx + nyy$ non eſſe congruam, contra hypotheſin; unde neceſſario concludi oportet, quoties altera harum duarum

rum ſormularum ſuerit congrua, neceſſario quoque alteram ſuturam eſſe congruam.

§. 16. Eodem modo etiam liquet, ſi altera harum formularum fuerit incongrua, etiam alteram talem eſſe futuram. Quare cum infra oſtendetur, hanc formulam $60xx+yy$ eſſe congruam, quoniam hic bini numeri m et n pluribus modis accipi poſſunt, haec ſola formula congrua etiam ſequentes omnes pariter congruas progignet: $30xx+2yy$; $20xx+3yy$; $15xx+4yy$; $12xx+5yy$ et tandem $10xx+6yy$.

§. 17. Hanc ob rem ad omnes formulas congruas conſtituendas ſufficiet omnes valores producti mn aſſignaſſe, cum deinde ex factoribus huiusmodi producti facillime omnes plane formulae congruae derivari queant.

Definitio.

Omnes numeros, quos loco producti mn aſſumere licet, ut formulae $mxx+nyy$ evadant congruae, in poſterum appellabimus numeros idoneos, vel etiam congruos, dum reliquos omnes incongruos vocabimus.

§. 18. Cum hoc idem argumentum iam nuper tractaverim, atque adeo omnes numeros idoneos, ſive congruos, exhibuerim, primo quidem hoc phoenomenon maxime mirandum ſe obtulit, quod multitudo iſtorum numerorum neutiquam in infinitum excreſcat, verum adeo non plures quam 65 huiusmodi numeros complectatur. Hos numeros, quoniam mihi propoſitum eſt plures proprietates eorum maxime memorabiles in medium afferre, ante omnia hic deſignemus.

Cata-

Catalogus
omnium numerorum idoneorum ſeu congruorum.

1.	1	23.	37	45.	177
2.	2	24.	40	46.	190
3.	3	25.	42	47.	210
4.	4	26.	45	48.	232
5.	5	27.	48	49.	240
6.	6	28.	57	50.	253
7.	7	29.	58	51.	273
8.	8	30.	60	52.	280
9.	9	31.	70	53.	312
10.	10	32.	72	54.	330
11.	12	33.	78	55.	345
12.	13	34.	85	56.	357
13.	15	35.	88	57.	385
14.	16	36.	93	58.	408
15.	18	37.	102	59.	462
16.	21	38.	105	60.	520
17.	22	39.	112	61.	760
18.	24	40.	120	62.	840
19.	25	41.	130	63.	1320
20.	28	42.	133	64.	1365
21.	30	43.	165	65.	1848
22.	33	44.	168		

§. 19. Maximus ergo numerus idoneus ſeu congruus eſt 1848 = 8. 3. 7. 11. qui ergo feliciſſimo ſucceſſu ad numeros primos explorandos adhiberi poterit. Si enim numerus quantumvis magnus N in forma $1848\,xx + yy$ contineatur, haud difficile erit inveſtigare, utrum inſuper alio modo in eadem

eadem ſormula contentus ſit, nec ne. Quodſi enim numerus N unico modo contineri reperiatur, atque numerus y non ſolum primus fuerit ad x, ſed etiam ad ipſum 1848, tum tuto concludere licebit, iſtum numerum N revera eſſe primum. Hoc modo nuper plures numeros primos, ad multos milliones exſurgentes, in medium protulimus, id quod multo minori labore praeſtari potuit, quam ſi, uti olim feci, ſumma binorum quadratorum ad hunc finem uti vellemus. Talem autem egregium uſum reliqui omnes numeri idonei maiores huius tabulae praeſtabunt.

§. 20. Antequam autem in proprietates maxime memorabiles horum numerorum congruorum ſum inquiſiturus, conveniet praecipua momenta, quibus hi numeri innituntur, breviter exponere, quae ternis ſequentibus propoſitionibus complecti licet.

Propoſitio prima.

Nullus numerus minor quam $4mn$ plus uno modo in formula $mnxx + yy$ contineri poteſt, niſi forte fuerit quadratus; quia enim numerus minor ſupponitur quam $4mn$, excluſo caſu $x = 0$ pro numeris quadratis neceſſario eſſe debet $x = 1$, atque adeo iſte numerus non niſi unico modo in hac formula contineri poteſt.

Propoſitio ſecunda.

Si numerus compoſitus, quantumvis magnus, unico tantum modo in formula $mnxx + yy$ contineatur, tum ſemper continuo multo minores numeri, pariter compoſiti, exhiberi poſſunt unico etiam modo in hac forma contenti, ſicque tandem pervenietur ad numeros compoſitos minores quam

quam $4mn$. Huius propoſitionis veritatem non ita pridem demonſtravi.

Propoſitio tertia.

Si numerus mn ita fuerit comparatus, ut omnes numeri in formula $mn + yy$ contenti et minores quam $4mn$ ſint vel primi vel primis aequipollentes, tum iſte numerus mn certe erit idoneus et formula $mnxx + yy$ congrua. Quia enim nullus dabitur numerus compoſitus minor quam $4mn$ in iſta formula contentus, etiam nulli dabuntur numeri compoſiti, quantumvis magni, unico quoque tantum modo in eadem formula contenti, ſed omnes numeri unico tantum modo in ea contenti erunt vel primi, vel tanquam primi ſpectandi.

§. 21. Hinc facilis regula deducitur, cuius ope quoslibet numeros examinare licebit, utrum ſint congrui nec ne. Propoſito enim quocunque numero N, in formula $N + yy$ loco y ſucceſſive ſcribantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, etc. donec perveniatur ad ſummam maiorem quam $4N$, atque ſi numeri hoc modo reſultantes fuerint vel primi p, vel etiam $2p$ vel δp (exiſtente δ diviſore numeri N) vel etiam poteſtates binarii, quibus adiungi oportet quadrata numerorum primorum, tum numerus iſte N erit idoneus et formula $Nxx + yy$ congrua; ſin autem hoc modo vel unicus numerus revera compoſitus occurrat, tum formula inter incongruas erit referenda.

§. 22. Illuſtremus hanc regulam exemplo numeri 48, unde addendo quadrata usque ad limitem $y = 12$ oriantur ſequentes numeri vel primi vel ut primi ſpectandi:

48	48
$+1 = 49 = pp$	$+7^2 = 97 = p$
$+2^2 = 52 = 4.13 = \delta p$	$+8^2 = 112 = 16.7 = \delta.p$
$+3^2 = 57 = 3.19 = \delta p$	$+9^2 = 129 = 3.43 = \delta.p$
$+4^2 = 64 = 16.4 = 2^6$	$+10^2 = 148 = 4.37 = \delta.p$
$+5^2 = 73 = p$	$+11^2 = 169 = 13 = pp$
$+6^2 = 84 = 12.7 = \delta.p$	

Hinc ergo patet iſtum numerum utique eſſe idoneum, atque formulae, quae ex eo derivantur ſimul erunt congruae, quae ſunt $48xx + yy$ et $16xx + 3yy$, quandoquidem numeri pro m et n ſumendi inter ſe debent eſſe primi.

§. 23. Quamquam haec regula ad omnes caſus facile accommodari poteſt, tamen etiam alia dari poteſt regula maxime memorabilis, qua vera indoles numerorum idoneorum multo magis declaratur, quae ita ſe habet:

Regula condendi tabulam numerorum idoneorum.

§. 24. Ex ſerie omnium numerorum naturalium pro quolibet numero primo p excludantur numeri in hac forma contenti: $px - yy$, maiores quam $\frac{1}{4}pp$, praeter hos: $pp - yy$; quo facto pro ſingulis numeris primis p relinquentur numeri idonei. Notetur autem hic loco numeri primi 2 ſumi debere eius quadratum 4. Ita 1°. pro $p = 4$ excludi debent numeri formae $4x - 1 > 4$, praeter 15 et 7; numeri excludendi hinc erunt 11, 19, 23, 27, 31, 37. etc. 2°. Pro $p = 3$ excluduntur numeri $3x - 1$ maiores quam $\frac{9}{4}$, praeter 8 et 5; quare excludentur hi numeri: 11, 14. 17, 20, 23, 26, etc. 3°. Pro $p = 5$ excluduntur numeri formae $5x - 1$, -4 maiores quam $\frac{25}{4}$, praeter 24, 21, 16, 9; ergo excludendi ſunt

14,

14, 19, 29, 34, 39, etc. et 11, 26, 31, 36, 41, etc. 4°. Pro $p = 7$ excludi debent numeri formae $7x - 1, -4, -9 > \frac{49}{4}$, praeter 48, 45, 40, 33, 24, 13, unde numeri excludendi ſunt 20, 27, 34, etc. 17, 31, 38, 52, 59, etc. 19, 26, 47, 54, etc. 5°. Pro $p = 11$ excluduntur numeri $11x - 1, -4, -9, -16, -25 > \frac{121}{4} > 30$, praeter 120, 117, 112, 105, 96, 85, 72, 57, 40, 21, ſicque numeri excludendi erunt:

32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109, 131, 142, etc.
51, 62, 73, 84, 95, 106, 128, 139, 150, etc.
35, 46, 68, 79, 90, 101, 123, 134, 145, etc.
39, 50, 61, 83, 94, 116, 127, 138, 149, etc.
41, 52, 63, 74, 107, 118, 129, 140, 151, etc.

hocque modo per omnes numeros primos eſt procedendum.

§. 25. Quamquam haec regula aliis innititur principiis, atque non parum diſcrepare videtur a criterio, quo numeri iſti idonei ab aliis numeris diſtinguuntur, tamen pulcherrimus conſenſus ubique deprehenditur. Praeterea vero etiam hi numeri tam egregiis proprietatibus ſunt praediti, quas adeo ex principiis plurimum diverſis demonſtrare licet, unde operae pretium erit iſtas proprietates in ſequentibus theorematibus ob oculos expoſuiſſe.

THEOREMATA,
quibus inſignes proprietates numerorum idoneorum demonſtrantur.

Theorema I.

In ordine numerorum idoneorum alii numeri quadrati non occurrunt, praeter 1, 4, 9, 16 et 25.

 De-

Demonſtratio.

§. 26. Si numerus idoneus eſt quadratum ii, formula congrua $iixx + yy$ utique erit ſumma duorum quadratorum. Conſideremus igitur numeros quoscunque compoſitos C, qui ſint ſummae duorum quadratorum, quod cum ſemper duplici modo evenire queat, ſtatuamus $C = aa + bb = cc + dd$, ac primo quidem ſit a numerus par $= 2f$, ut ſit $C = 4ff + bb$ ideoque b numerus impar, cuius quadratum cum ſemper ſit formae $4\alpha + 1$, etiam ipe numerus C eandem habebit formam; unde evidens eſt, quadratorum cc et dd alterum par, alterum vero impar eſſe debere. Sit igitur $c = 2g$, eritque $C = 4gg + dd$; unde ſequitur, ſi numerus compoſitus C fuerit $= 4ff + bb$, eum quoque alio modo fore $C = 4gg + dd$; ex quo manifeſtum eſt quadratum 4 eſſe numerum idoneum.

§. 27. Ponamus nunc in eadem aequalitate $C = aa + bb = cc + dd$ numerum a eſſe multiplum ternarii, ſcilicet $a = 3f$, ut ſit $C = 9ff + bb$; et quia b ſupponitur primus ad a ideoque non diviſibilis per 3, eius quadratum bb habebit formam $3\alpha + 1$, unde etiam ipſe numerus C eandem habebit formam $3\alpha + 1$. Hanc autem formam altera expreſſio $cc + dd$ habere nequit, niſi alterum quadratorum cc et dd diviſibile ſit per 3, alterum vero non; ſi enim ambo non eſſent diviſibilia per 3, utrumque haberet formam $3\alpha + 1$, ideoque eorum ſumma formam eſſet habitura $3\alpha + 2$ diverſam ab illa. Ponatur igitur $c = 3g$, ita ut ſit $C = 9gg + dd$; unde patet, ſi numerus compoſitus habuerit formam $9ff + bb$, eum inſuper alio modo fore $9gg + dd$. Neceſſe igitur eſt ut quadratum 9 ſit numerus idoneus.

§. 28.

§. 28. Ponamus nunc eſſe $a = 4f$, ut ſit $C = 16ff + bb$, atque demonſtrandum eſt in altera forma $cc + dd$ vel c vel d etiam per 4 diviſibile eſſe debere. Cum igitur numerus b ſit impar, eius quadratum bb ſemper formam habet $8\alpha + 1$, eandemque ergo formam habebit numerus C, quam ergo formam quoque habere debet $cc + dd$, unde ſtatim patet, alterum quadratum dd eſſe impar, ideoque formae $8\alpha + 1$, alterum vero cc par, atque adeo per 16 diviſibile, ſive $c = 4g$, ideoque $C = 16gg + dd$. Quare cum, ſi fuerit numerus compoſitus $C = 16ff + bb$, neceſſario quoque fiat $C = 16gg + dd$, evidens eſt etiam quadratum 16 eſſe numerum idoneum.

§. 29. Sit porro $a = 5f$, ideoque $C = 25ff + bb$; et quia b diviſionem per 5 non admittit, eius quadratum bb formam habebit $5\alpha + 1$ vel $5\alpha + 4$, ideoque ipſe numerus C alterutram formam habere debet, quam ergo eandem formam habere debet $cc + dd$; unde ſtatim patet, ſi neque c neque d diviſibile eſſet per 5, ſumma $cc + dd$ formam foret habitura vel $5\alpha + 0$, vel $5\alpha + 2$, vel $5\alpha + 3$, quarum nulla congruit; unde ſequitur, alterutrum numerorum c et d per 5 eſſe diviſibilem. Sit igitur $c = 5g$, ideoque $C = 25gg + dd$; atque manifeſtum eſt, quoties numerus compoſitus C habuerit formam $25ff + bb$, ſemper inſuper alio modo fore $C = 25gg + dd$, ideoque 25 eſſe numerum idoneum.

§. 30. Tale autem ratiocinium non ulterius extendi poteſt. Si enim ponamus $a = 6f$, ut ſit $C = 36ff + bb$, quadratum bb neceſſario formam habebit $6\alpha + 1$, quae ergo forma etiam ipſi C convenit; verum pro altera forma $cc + dd$ non abſolute neceſſe eſt, ut ſit $c = 6g$: eadem enim forma

6α

$6\alpha + 1$ reſultare poteſt, ſumendo $c = 2g$ et $d = 6h + 3$, ita ut horum numerorum alter per 2 alter vero per 3 ſit diviſibilis. Quia igitur g diviſionem per 3 admittere non debet, eius quadratum formam habebit $3\alpha + 1$, ideoque cc formam $12\alpha + 4$, ſive $6\alpha + 4$; alterum vero quadratum dd formam habet $6\alpha + 3$, quorum ergo quadratorum ſumma producit formam $6\alpha + 1$, perinde ut ante. Quocirca cum, ſi fuerit $C = 36ff + bb$, non neceſſe ſit ut etiam fiat $C = 36gg + dd$, hinc ſequitur numerum 36 non eſſe numerum idoneum; quod etiam criterium primo datum declarat, quoniam $36 + 7^2 = 85 = 5 \cdot 17$. qui numerus revera eſt compoſitus et minor quam $4 \cdot 36$.

§. 31. Quo hoc clarius appareat, conſideremus caſum $a = 7f$, ut ſit $C = 49ff + bb$, ideoque b non diviſibile per 7, unde forma ipſius bb erit $7\alpha + 1, 2, 4$, quod etiam de ipſo numero C valet. Videamus igitur num pro altera formula $cc + dd$ aliqua harum formarum reſultare poſſit, etiamſi neque c neque d per 7 ſumatur diviſibile, quo ergo caſu tam cc quam dd haberet formam vel $7\alpha + 1$, vel $7\alpha + 2$ vel $7\alpha + 4$, ideoque eorum ſumma ad has formas perducit $7\alpha + 1, 2, 3, 4, 5, 6$, hoc eſt omnes formas poſſibiles, in quibus ſuperiores tres formae utique continentur. Quare cum neutiquam neceſſe ſit, ut alter numerorum c et d etiam per 7 ſit diviſibilis, manifeſtum eſt etiam numerum 49 non eſſe idoneum; quod idem de numeris maioribus multo magis valebit, id quod etiam criterium noſtrum manifeſto declarat, cum ſit $49 + 6^2 = 5 \cdot 17$, atque adeo $49 + 4^2 = 5 \cdot 13$.

Theo-

Theorema II.

Si numerus idoneus fuerit formae $4\alpha - 1$ tum etiam eius quadruplum $4(4\alpha - 1)$ erit numerus idoneus.

Demonſtratio.

§. 32. Sit brevitatis gratia $4\alpha - 1 = i$, ita ut pro quovis numero compoſito C ſit $C = iaa + bb = icc + dd$. Iam ponamus eſſe $a = 2f$, ut prior forma evadat $C = 4iff + bb$, ubi ergo, ob b numerum imparem, quadratum bb habebit formam $4\alpha + 1$. Quia nunc i eſt numerus impar, alteruter numerorum c et d erit par, alter impar, unde duos caſus evolvi oportet. Sit primo $c = 2g$, et quia dd eſt formae $4\alpha + 1$, hoc utique congruit cum forma praecedente. Examinemus vero etiam alterum caſum, quo $d = 2h$ at cc impar, ideoque formae $4\alpha + 1$; cum igitur ſit $i = 4\alpha - 1$, numerus icc formam habebit $4\alpha - 1$, quae cum discrepet a forma priore $4iff + bb$, evidens eſt etiam numerum c parem eſſe debere. Sit igitur $c = 2g$, ut prodeat $C = 4igg + dd$, quam ob rem evictum eſt, ſi numerus compoſitus C formam habeat $4iff + bb$, neceſſario etiam alio modo proditurum eſſe $C = 4igg + dd$, ſicque evictum eſt etiam numerum $4i$ eſſe idoneum, ſiquidem fuerit $i = 4\alpha - 1$ numerus idoneus.

Corollarium.

§. 33. In tabula autem numerorum idoneorum ſupra allata alios numeros formae $4\alpha - 1$ non reperimus praeter 3, 7, 15, quorum etiam quadrupla 12, 28, 60 in eadem tabula reperiri videmus; quin etiam horum denuo quadrupla 48, 112, 240 etiam ibidem occurrunt, quemadmodum in ſequente theoremate demonſtrabimus.

Theo-

Theorema III.

Denotante i numerum imparem, ſi fuerit 4 i numerus idoneus, tum etiam eius quadruplum 16 i erit ſemper numerus idoneus.

Demonſtratio.

§. 34. Cum $4i$ ſit numerus idoneus, dabuntur numeri compoſiti C, ut ſit $C = 4iaa + bb = 4icc + dd$, ubi ergo numeri b et d erunt impares, ideoque eorum quadrata formae $8\alpha + 1$. Ponamus iam eſſe $a = 2f$, ut ſit $C = 16iff + bb$, qui numerus eſt formae $8\alpha + 1$. Quodſi iam c foret numerus impar, ob i numerum imparem, etiam icc erit impar, ideoque $4icc$ numerus formae $8\alpha + 4$, unde ob $dd = 8\alpha + 1$ forma poſterior foret $8\alpha + 5$, cum prior eſſet $8\alpha + 1$; ex quo ſequitur etiam numerum c neceſſario parem eſſe debere. Poſito igitur $c = 2g$, erit utique $C = 16iff + bb = 16igg + dd$, unde manifeſto ſequitur numerum $16i$ quoque eſſe idoneum.

Corollarium.

§. 35. Quando autem aſſumimus numerum $4i$ eſſe idoneum, neceſſe eſt ut etiam ipſe numerus i ſit idoneus, id quod in ſequente theoremate demonſtrabitur.

Theorema IV.

Si fuerit λλi numerus idoneus ſemper etiam ipſe numerus i erit idoneus.

Demonſtratio.

§. 36. Quia $\lambda\lambda i$ eſt numerus idoneus, dabuntur numeri compoſiti C, ut ſit $C = \lambda\lambda iaa + bb = \lambda\lambda icc + dd$; ubi

ſi

ſi ponamus $\lambda a = f$ et $\lambda c = g$, erit $C = iff + bb = igg + dd$, unde luculenter, liquet, etiam numerum i eſſe idoneum. Quoties igitur quispiam numerus idoneus per quadratum fuerit diviſibilis, etiam facta diviſione quotus erit numerus idoneus.

Theorema V.

Si habeatur numerus idoneus formae $3\alpha - 1$, etiam eius noncuplum ſemper erit numerus idoneus.

Demonſtratio.

§. 37. Poſito brevitatis gratia $3\alpha - 1 = i$, ut habeamus talem aequationem: $C = iaa + bb = icc + dd$, ſumamus $a = 3f$, ut ſit $C = 9iff + bb$, ubi ergo, quia b primus ad a, quadrati bb forma erit $3\alpha + 1$, ideoque ipſe numerus C formae $3\alpha + 1$. Iam ſi in altera forma $icc + dd$ numerus c non eſſet diviſibilis per 3, foret $cc = 3\alpha + 1$, ideoque icc formae $3\alpha - 1$. Nunc autem alter numerus d vel erit per 3 diviſibilis vel ſecus; priore caſu, ob $dd = 3\alpha$, poſterior forma foret $3\alpha - 1$; poſteriore caſu forma prodiret 3α. Quare cum prior forma ſit $C = 3\alpha + 1$, cui neutra harum convenit, neceſſe eſt, ut numerus c ſit per 3 diviſibilis. Poſito ergo $c = 3g$, habebimus $C = 9iff + bb = 9igg + dd$; unde manifeſtum eſt etiam numerum $9i$ eſſe idoneum, ſiquidem i fuerit numerus formae $3\alpha - 1$.

Corollarium.

§. 38. In tabula autem numerorum idoneorum alii numeri formae $3\alpha - 1$ non occurrunt, praeter hos tres: 2, 5, 8, quorum etiam noncupla 18, 45 et 72 in eadem tabula reperimus.

Theorema VI.

Si numerus impar ſormae $4\alpha+1$ fuerit numerus idoneus, tum eius quadruplum $4(4\alpha+1)$ in tabula numerorum idoneorum occurrere nequit.

Demonſtratio.

§. 39. Poſito brevitatis gratia $4\alpha+1=i$ conſideremus hanc aequalitatem: $C=iaa+bb=icc+dd$, ubi ponamus $a=2f$, ut ſit $C=4iff+bb$. Iam niſi abſolute neceſſarium ſit, ut etiam c ſit numerus par, numerus $4i$ non erit idoneus. Conſideremus igitur caſum, quo c numerus impar, eritque $cc=4\alpha+1$, ideoque icc formae $4\alpha+1$; quare cum hoc caſu d ſit numerus par, poſterior forma erit $4\alpha+1$; unde patet neceſſe non eſſe, ut c ſit numerus par, quod ipſum indicio eſt etiam numerum $4i$ non eſſe idoneum.

Corollarium.

§. 40. Numeri autem formae $4\alpha+1$, qui in noſtra tabula numerorum idoneorum occurrunt, ſunt 1, 5, 9, 13, 21, 25, 33, 37, 45, 57, 85, 93, 105, 133, 165, 177, 253, 273, 345, 357, 385, 1365, quorum etiam nullius quadruplum in noſtra tabula deprehendimus, praeter unitatis, cuius ratio eſt prorſus peculiaris.

Theorema VII.

Si inter numeros idoneos occurrat numerus impariter par, ſive formae $4\alpha+2$, tum etiam ſemper eius quadruplum $4(4\alpha+2)$ in eadem tabula reperietur.

De-

Demonſtratio.

§. 41. Ponatur brevitatis gratia $4\alpha + 2 = i$, et conſideretur haec aequatio: $C = iaa + bb = icc + dd$, ac ponatur $a = 2f$, quo facto, ſi etiam c neceſſario debet eſſe numerus par, evictum erit numerum $4i$ eſſe idoneum. Hic vero ante omnia notandum, quia i eſt numerus par, numeros b et d eſſe impares, eorumque ergo quadrata formae $8\alpha + 1$, unde eorum differentia $bb - dd$ ſemper erit per octo diviſibilis. Cum igitur ſit $bb - dd = i(cc - 4ff)$, neceſſe eſt ut hoc poſterius membrum diviſionem per 8 admittat; at vero prior factor i tantum per 2 dividi poteſt, unde patet alterum factorem $cc - 4ff$ diviſibilem eſſe debere per 4, hincque ſequitur numerum c neceſſario parem eſſe debere. Sit igitur $c = 2g$, ac ſi numerus compoſitus C habuerit formam $4iff + bb$, ſemper etiam alio modo erit $C = 4igg + dd$; unde manifeſto ſequitur etiam numerum $4i$ eſſe idoneum, ſiquidem numerus $i = 4\alpha + 2$ talis fuerit.

Corollarium.

§. 42. Numeri autem impariter pares in tabula numerorum idoneorum occurrunt ſequentes: 2, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462, quorum etiam ſingulorum quadrupla revera in tabula noſtra reperiuntur.

Theorema VIII.

Denotante i numerum imparem, ſi fuerit 8 i numerus idoneus, eius quadruplum 32 i certe non erit numerus idoneus.

Demonſtratio.

§. 43. Poſito enim $C = 8iaa + bb = 8icc + dd$, ſi ponamus $a = 2f$, ut prior formula fiat $C = 32iff + bb$, vi-

deamus, num etiam neceſſario hinc ſequatur numerum c quoque parem eſſe debere. Primo igitur notetur numeros b et d eſſe impares, ideoque differentiam quadratorum $bb-dd$ diviſibilem per 8. Cum igitur ſit $bb-dd=8icc-32iff=8i(cc-4ff)$ quae forma ſponte eſt diviſibilis per 8, nulla neceſſitas adeſt, quod numerus c debeat eſſe par, conſequenter etiam numerus 32 non erit idoneus.

Corollarium.

§. 44. Quando numerus $8i$ eſt idoneus, tum etiam eius pars quarta $2i$ erit numerus idoneus. Ac ſi i denotet numerum imparem, modo ante vidimus etiam $8i$ eſſe numerum idoneum. Nunc autem intelligimus multiplicationem per 4 non ulterius locum habere poſſe, ita ut non ſolum $32i$, ſed etiam $128i$ et $512i$ etc. ex ordine numerorum idoneorum excludantur.

Theorema IX.

Denotante i numerum imparem, ſi fuerit 16 i numerus idoneus, tum eius quadruplum 64 i certe non erit numerus idoneus.

Demonſtratio.

§. 45. Poſito enim $C=16iaa+bb=16icc+dd$ ſi ponamus $a=2f$, ob $bb-dd$ diviſibile per 8, etiam forma $16i(cc-4ff)$ per 8 diviſibilis eſſe debet, quod cum ſponte eveniat, nulla neceſſitas urget, ut etiam numerus c par accipi debeat; ex quo ſequitur numerum $64i$ nunquam eſſe poſſe numerum idoneum.

Corol-

Corollarium.

§. 46. Quando hic aſſumimus numerum $16i$ eſſe idoneum, per ſe intelligitur etiam $4i$ et i eſſe numerum idoneum, quare cum multiplicatio per 4 ulterius locum non habeat, ex binis poſtremis theorematibus conſicitur nullo plane dari numeros idoneos, qui per altiorem binarii poteſtatem quam quartam eſſent diviſibiles. Vidimus autem tres tantum dari tales numeros per 16 diviſibiles, ſcilicet 48, 112 et 240; nulli autem prorſus dantur, qui per 32, vel 64, vel altiorem poteſtatem eſſent diviſibiles.

Theorema X.

Si i fuerit numerus idoneus formae cuiuscunque, ſitque $i + aa = pp$, exiſtente p numero primo, tum eius quadruplum $4i$ ex tabula numerorum idoneorum excluditur, exiſtente $pp < 4i$.

Demonſtratio.

§. 47. Quoniam $i + aa = pp$, erit $4i + 4aa = 4pp$. At ſi $4i$ eſſet numerus idoneus, tum forma $4i + xx$ eſſe deberet vel numerus primus, vel eius duplum vel quadratum, ſiquidem x fuerit primus ad $4i$. Iam ſumatur $x = 2a - p$ qui certe ad $4i$ eſt primus, ac prodit $4i + xx = 4i + 4aa - 4ap + pp$, quae forma, ob $4i + 4aa = 4pp$, tranſit in hanc: $4i + xx = 5pp - 4ap = p(5p - 4a)$, quod cum non ſit numerus primus, neque duplum, neque quadratum primi, evidens eſt numerum $4i$ idoneum non eſſe.

Scholion.

§. 48. Quemadmodum igitur initio demonſtravimus, in tabula numerorum idoneorum nullos alios quadra-

tos

tos occurrere, praeter 1, 4, 9, 16 et 25, ita ex demonſtrationibus ſequentibus concludere poſſumus ex hac tabula omnes excludi numeros diviſibiles per quadratos 4^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, etc. praeter paucos illos in tabula relatos, ſcilicet nulli occurrunt ibi numeri per 16 diviſibiles, praeter 16, 48, 112 et 240; tum vero nulli per 9 diviſibiles praeter 9, 18, 45 et 72; at vero per 25 ſolus ipſe numerus 25 adeſt; maiora autem quadrata penitus ex iſta tabula excluduntur, non ſolum ipſa, ſed ne quidem factores eſſe posſunt ullius numeri idonei. Interim tamen quod in iſta tabula omnes plane numeri idonei occurrant, eorumque numerus non ultra 65 exſurgat, rigida demonſtratio etiamnunc deſideratur. Quia autem usque ad decies mille nulli alii ſe mihi obtulerunt, multo magis veriſimillimum videtur, poſt hunc terminum nullos praeterea exiſtere; id quod eo magis eſt notatu dignum, quod nulla adhuc in Analyſi talis numerorum ſeries occurrit, quae ſinito tantum terminorum numero conſtaret.

DE EVOLVTIONE
POTESTATIS POLYNOMIALIS
CVIVSCVNQVE
$(1+x+x^2+x^3+x^4+\text{etc.})^n$

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 6 Julii 1778.

§. 1.

Incipiamus a poteſtate binomiali $(1+x)^n$, qua more ſolito evoluta deſignemus coëfficientem poteſtatis cuiusvis x^λ hoc charactere $(\frac{n}{\lambda})$, ita ut ſit

$$(1+x)^n = 1+(\tfrac{n}{1})x+(\tfrac{n}{2})xx+(\tfrac{n}{3})x^3+(\tfrac{n}{4})x^4+\text{etc}. \ldots (\tfrac{n}{n})x^n,$$

ubi ergo erit

$$(\tfrac{n}{1}) = n;\ (\tfrac{n}{2}) = \frac{n(n-1)}{1.\ 2};\ (\tfrac{n}{3}) = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3};$$
$$(\tfrac{n}{4}) = \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ \text{etc.}$$

et in genere

$$(\tfrac{n}{\lambda}) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \lambda},$$

unde patet caſu $\lambda=0$ et $\lambda=n$ fore $(\frac{n}{0})=(\frac{n}{n})=1$, atque adeo in genere $(\frac{n}{\lambda})=(\frac{n}{n-\lambda})$. Praeterea vero notaſſe iuvabit, tam caſibus quibus λ eſt numerus negativus, quam qui-

quibus eſt numerus maior quam n, ſignificatum formulae $(\frac{n}{\lambda})$ ſemper eſſe nihilo aequalem.

§. 2. Quoniam per hos characteres calculus non mediocriter ſublevatur et contrahitur, ſimilibus characteribus utamur etiam in evolutione poteſtatum trinomialium, quadrinomialium, et generatim polynomialium quarumcunque. Hunc in finem ſuperioribus characteribus pro binomio adhibitis adiungamus quaſi exponentem 2, quandoquidem hinc nulla ambiguitas eſt metuenda, quoniam in huiusmodi calculis nullae poteſtates horum characterum occurrere ſolent; hoc modo pro evolutione poteſtatis binomialis habebimus:

$$(1+x)^n = (\tfrac{n}{0})^2 + (\tfrac{n}{1})^2 x + (\tfrac{n}{2})^2 xx + (\tfrac{n}{3})^2 x^3 + \text{etc.}$$

ubi ergo meminiſſe oportet eſſe in genere $(\frac{n}{\lambda})^2 = (\frac{n}{n-\lambda})^2$, tum vero perpetuo $(\frac{n}{0})^2 = (\frac{n}{n})^2 = 1$, atque has formulas in nihilum abire caſibus, quibus eſt λ vel numerus integer negativus, vel poſitivus maior quam n.

§. 3. Iisdem igitur characteribus utemur pro evolutione poteſtatum polynomialium quarumcunque, dummodo pro trinomialibus adiungamus quaſi exponentem ternarium, pro quadrinomialibus quaternarium, pro quinomialibus quinarium, et ita porro, hoc ſcilicet modo:

Pro trinomialibus $(1+x+xx)^n$ evolutio praebeat

$$(\tfrac{n}{0})^3 + (\tfrac{n}{1})^3 x + (\tfrac{n}{2})^3 x^2 + (\tfrac{n}{3})^3 x^3 + (\tfrac{n}{4})^3 x^4 + \text{etc.}$$

Pro quadrinomialibus $(1+x+xx+x^3)^n$ evolutio praebeat

$$(\tfrac{n}{0})^4 + (\tfrac{n}{1})^4 x + (\tfrac{n}{2})^4 x^2 + (\tfrac{n}{3})^4 x^3 + (\tfrac{n}{4})^4 x^4 + \text{etc.}$$

Pro quinomialibus $(1+x+xx+x^3+x^4)^n$ evolutio praebeat

$$(\tfrac{n}{0})^5 + (\tfrac{n}{1})^5 x + (\tfrac{n}{2})^5 xx + (\tfrac{n}{3})^5 x^3 + (\tfrac{n}{4})^5 x^4 + (\tfrac{n}{5})^5 x^5 + \text{etc.}$$

etc. etc.

§. 4.

§. 4. His explicatis inquiramus in veros valores horum characterum exponentibus 3, 4, 5, 6 etc. inſignitorum, et videamus quomodo illi per characteres binario notatos, quippe quorum ſignificatus eſt notiſſimus, determinari queant. Singulos igitur caſus harum poteſtatum polynomialium ordine percurramus.

Evolutio poteſtatis trinomialis
$(1 + x + xx)^n$.

§. 5. Seriem hinc oriundam hoc modo repraeſentemus:

$$(\tfrac{n}{0})^3 + (\tfrac{n}{1})^3 x + (\tfrac{n}{2})^3 xx + (\tfrac{n}{3})^3 x^3 + (\tfrac{n}{4})^3 x^4 + \text{etc.}$$

cuius terminus ultimus erit $= (\frac{n}{2n})^3 x^{2n}$, ubi coëfficientem $(\frac{n}{2n})^3$ iam novimus eſſe unitati aequalem, perinde ac terminum primum $(\frac{n}{0})^3$; tum vero quia coëfficientes iſti retro eodem ordine progrediuntur, hinc ſequitur fore:

$$(\tfrac{n}{1})^3 = (\tfrac{n}{2n-1})^3;\ (\tfrac{n}{2})^3 = (\tfrac{n}{2n-2})^3;$$

atque adeo in genere $(\frac{n}{\lambda})^3 = (\frac{n}{2n-\lambda})^3$. Porro hic evidens eſt valorem formulae $(\frac{n}{\lambda})^3$ in nihilum abire tam caſibus quibus λ eſt numerus integer negativus, quam caſibus quibus eſt poſitivus maior quam $2n$.

§. 6. Ante autem quam determinationem horum characterum ſuſcipiamus, haud incongruum erit evolutionem caſuum ſimpliciorum ante oculos poſuiſſe:

n	$(1+x+xx)^n$
0	1
1	$1+x+xx$
2	$1+2x+3xx+2x^3+x^4$
3	$1+3x+6xx+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$
4	$1+4x+10xx+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$
5	$1+5x+15xx+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+$ etc.
6	$1+6x+21xx+50x^3+90x^4+126x^5+141x^6+126x^7+$ etc.
	etc. etc.

Ex ultimo caſu, quo $n=6$, patet igitur eſſe

$$\left(\tfrac{6}{0}\right)^3=1;\ \left(\tfrac{6}{1}\right)^3=6;\ \left(\tfrac{6}{2}\right)^3=21;\ \left(\tfrac{6}{3}\right)^3=50;\ \left(\tfrac{6}{4}\right)^3=90;$$
$$\left(\tfrac{6}{5}\right)^3=126;\ \left(\tfrac{6}{6}\right)^3=141;\ \left(\tfrac{6}{7}\right)^3=126;\ \left(\tfrac{6}{8}\right)^3=90;$$
$$\left(\tfrac{6}{9}\right)^3=50;\ \left(\tfrac{6}{10}\right)^3=21;\ \left(\tfrac{6}{11}\right)^3=6;\ \left(\tfrac{6}{12}\right)^3=1.$$

§. 7. Vt nunc inveſtigemus quomodo hi characteres ex trinomio orti per ſimiles characteres ex binomio ortos exprimi queant; poteſtatem propoſitam ſub forma binomiali repraeſentemus hoc modo: $[1+x(1+x)]^n$, cuius evolutio ergo praebebit hanc progreſſionem:

$$1+\left(\tfrac{n}{1}\right)x(1+x)+\left(\tfrac{n}{2}\right)xx(1+x)^2+\left(\tfrac{n}{3}\right)x^3(1+x)^3$$
$$+\left(\tfrac{n}{4}\right)x^4(1+x)^4+\text{etc.}$$

cuius terminus generalis hanc habebit formam: $\left(\frac{n}{\alpha}\right)x^\alpha(1+x)^\alpha$.

§. 8. Conſideremus nunc pro evolutione propoſita poteſtatem ipſius x quamcunque x^λ, eiusque coëfficiens eſt $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$, cuius valorem inveſtigemus. Hunc in finem ex ſingulis membris binomialibus modo inventis depromi debet poteſtas x^λ, quatenus quidem in iis continetur. For-

ma

ma autem generalis eſt $(\frac{n}{\alpha})\, x^{\alpha}\,(1+x)^{\alpha}$; unde ob

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + (\tfrac{\alpha}{1})^2 x + (\tfrac{\alpha}{2})^2 x^2 + (\tfrac{\alpha}{3})^2 x^3 + (\tfrac{\alpha}{4})^2 x^4 + \text{etc.}$$

quia hic occurrit generatim terminus $(\frac{\alpha}{\beta})^2 x^{\beta}$, is ductus in $(\frac{n}{\alpha})^2 x^{\alpha}$ praebet $(\frac{\alpha}{\beta})^2 (\frac{n}{\alpha})^2 x^{\alpha+\beta}$. Quod ſi ergo fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, coëfficiens $(\frac{\alpha}{\beta})^2 (\frac{n}{\alpha})^2$ pars erit coëfficientis quaeſiti $(\frac{n}{\lambda})^3$.

§. 9. Quamobrem ad valorem coëfficientis $(\frac{n}{\lambda})^3$, eruendum tantum opus eſt litteris α et β omnes valores in integris tribuere, quibus prodire poteſt $\alpha + \beta = \lambda$. Evidens autem eſt ambos hos numeros α et β neque negativos, neque maiores quam n capi debere, quia alioquin iſta forma evaneſceret; tum vero etiam ſi eſſet $\beta > \alpha$, formula $(\frac{\alpha}{\beta})^2$ pariter eſſet nulla. Hinc igitur maximus valor pro α aſſumendus erit $= \lambda$, tum vero $\beta = 0$; unde ſequitur

ſi α	λ	$\lambda - 1$	$\lambda - 2$	$\lambda - 3$	$\lambda - 4$	etc.
fore β	0	1	2	3	4	

§. 10. Producta igitur ex ſingulis his caſibus orta et in unam ſummam collecta dabunt valorem quaeſitum characteris $(\frac{n}{\lambda})^3$, ita ut nacti ſimus hanc determinationem:

$$(\tfrac{n}{\lambda})^3 = (\tfrac{\lambda}{0})^2 (\tfrac{n}{\lambda})^2 + (\tfrac{\lambda-1}{1})^2 (\tfrac{n}{\lambda-1})^2 + (\tfrac{\lambda-2}{2})^2 (\tfrac{n}{\lambda-2})^2 + (\tfrac{\lambda-3}{3})^2 (\tfrac{n}{\lambda-3})^2 + \text{etc.}$$

ſicque iſte valor per partes cognitas exprimitur, quarum numerus quovis caſu eſt finitus.

§. 11. Quo haec melius intelligantur, evolvamus caſus ſimpliciores, tribuendo ipſi λ valores 0, 1, 2, 3, 4 etc.

eritque ut ſequitur $\left(\frac{n}{0}\right)^3 = 1$; $\left(\frac{n}{1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{1}\right)^2 = n$;

$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{0}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2\left(\frac{n}{1}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$,

$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{0}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{1}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{0}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{0}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{1}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{n}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{7}{0}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{n}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \left(\frac{8}{0}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{1}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \left(\frac{n}{8}\right)^2 + 7\left(\frac{n}{7}\right)^2 + 15\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{9}\right)^3 = \left(\frac{9}{0}\right)^2\left(\frac{n}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{1}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{9}\right)^3 = \left(\frac{n}{9}\right)^2 + 8\left(\frac{n}{8}\right)^2 + 21\left(\frac{n}{7}\right)^2 + 20\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^2$,

$\left(\frac{n}{10}\right)^3 = \left(\frac{10}{0}\right)^2\left(\frac{n}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{1}\right)^2\left(\frac{n}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{4}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{n}{10}\right)^3 = \left(\frac{n}{10}\right)^2 + 9\left(\frac{n}{9}\right)^2 + 28\left(\frac{n}{8}\right)^2 + 35\left(\frac{n}{7}\right)^2 + 15\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{n}{5}\right)^2$,

etc. etc.

§. 12. Applicemus haec exempli loco ad caſum $n = 6$, quippe quem ſupra §. 6. iam evolvimus ac reperiemus:

$\left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1$,

$\left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6$,

$\left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21$,

$\left(\frac{6}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 50$,

$\left(\frac{6}{4}\right)$

$\left(\frac{6}{4}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 15 + 3.20 + 15 = 90,$

$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 = 6 + 4.15 + 3.20 = 126,$

$\left(\frac{6}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{6}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 1 + 5.6 + 6.15 + 20 = 141,$

$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2$, ſive

$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 6 + 10.6 + 4.15 = 126,$

ſcilicet cum ſit $\left(\frac{6}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{6}{12-\lambda}\right)^3$, erit utique $\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 126$; ſimili modo erit $\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90$; $\left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50$; $\left(\frac{6}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21$; $\left(\frac{6}{11}\right)^3 = \left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6$; ac denique $\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1$, qui valores cum ſupra datis egregie conveniunt.

Evolutio poteſtatis quadrinomialis
$(1 + x + xx + x^3)^n$.

§. 13. Valorem igitur hunc evolutum ita repraeſentabimus:

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^4 x + \left(\frac{n}{2}\right)^4 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^4 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^4 x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)^4 x^5 + \text{etc.}$$

ubi ſcilicet eſt $\left(\frac{n}{0}\right)^4 = 1$. Deinde quia ultimus terminus eſt x^{3n}, erit $\left(\frac{n}{3n}\right)^4 = 1$; et quia coëfficientes retro ſcripti eundem ordinem ſervant, erit $\left(\frac{n}{3n-1}\right)^4 = \left(\frac{n}{1}\right)^4$, atque in genere $\left(\frac{n}{3n-\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^4$; ubi obſervetur, tam caſibus quibus λ eſt numerus integer negativus, quam poſitivus maior quam $3n$, valores huius formulae in nihilum abire. Quibus notatis hic mihi eſt propoſitum indagare quomodo hi characteres quaternario notati per characteres ſive binario ſive ternario notatos, utpote iam cognitos, definiri queant.

§. 14. Antequam hunc laborem ſuſcipiamus, caſus ſimpliciores formulae propoſitae in tabula ſubiuncta ob oculos ponamus:

n	$(1 + x + xx + x^3)^n$
0	1
1	$1 + x + xx + x^3$
2	$1 + 2x + 3xx + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$
3	$1 + 3x + 6xx + 10x^3 + 12x^4 + 12x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$
4	$1 + 4x + 10xx + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + 40x^7 + 31x^8 +$ etc.
5	$1 + 5x + 15xx + 35x^3 + 65x^4 + 101x^5 + 135x^6 + 155x^7 + 155x^8 +$ etc.
6	$1 + 6x + 21xx + 56x^3 + 120x^4 + 216x^5 +$ etc.
	etc. etc.

§. 15. Nunc formulam propoſitam ſub hac binomiali: $[1 + x(1 + x + xx)]^n$ referamus, ciusque evolutio nobis praebet hanc ſeriem:

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 [x(1 + x + xx)] + \left(\frac{n}{2}\right)^2 x^2 (1 + x + xx)^2 + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis eſt $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x + xx)^\alpha$. Nunc vero, quia $(1 + x + xx)^\alpha$ eſt poteſtas trinomialis, erit

$$(1 + x + xx)^\alpha = 1 + \left(\frac{\alpha}{1}\right)^3 x + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 xx + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 x^3 + \text{etc.}$$

cuius iterum terminus generalis eſt $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 x^3$; unde ſi proponatur poteſtas x^λ, exiſtente $\lambda = \alpha + \beta$, ex hoc membro orietur pro hac poteſtate $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\lambda$.

§. 16. Cum igitur in evolutione quaeſita poteſtatis x^λ coëfficiens ſit $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4$, eius valor reperietur, ſi, ob $\lambda = \alpha + \beta$, omnes valores formulae $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$ in unam ſummam colligantur; quo facto erit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda - 3}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 3}{3}\right)^3 \text{ etc.}$$

Sic-

Sicque patet quomodo omnes characteres quaternario notati per iam cognitos, ſive binario, ſive ternario notatos, determinentur; quod quo clarius appareat loco λ ſucceſſive ſcribamus numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac reperiemus:

$$(\tfrac{n}{0})^4 = (\tfrac{n}{0})^2(\tfrac{0}{0})^3 = 1,$$
$$(\tfrac{n}{1})^4 = (\tfrac{n}{1})^2(\tfrac{1}{0})^3 = n,$$
$$(\tfrac{n}{2})^4 = (\tfrac{n}{2})^2(\tfrac{2}{0})^3 + (\tfrac{n}{1})^2(\tfrac{1}{1})^3 = (\tfrac{n}{2})^2 + n,$$
$$(\tfrac{n}{3})^4 = (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{0})^3 + (\tfrac{n}{2})^2(\tfrac{2}{1})^3 + (\tfrac{n}{1})^2(\tfrac{1}{2})^3, \text{ ſive}$$
$$(\tfrac{n}{3})^4 = (\tfrac{n}{3})^2 + 2(\tfrac{n}{2})^2 + (\tfrac{n}{1})^2,$$
$$(\tfrac{n}{4})^4 = (\tfrac{n}{4})^2(\tfrac{4}{0})^3 + (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{1})^3 + (\tfrac{n}{2})^2(\tfrac{2}{2})^3 + (\tfrac{n}{1})^2(\tfrac{1}{3})^3, \text{ ſive}$$
$$(\tfrac{n}{4})^4 = (\tfrac{n}{4})^2 + 3(\tfrac{n}{3})^2 + 3(\tfrac{n}{2})^2,$$
$$(\tfrac{n}{5})^4 = (\tfrac{n}{5})^2(\tfrac{5}{0})^3 + (\tfrac{n}{4})^2(\tfrac{4}{1})^3 + (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{2})^3 + (\tfrac{n}{2})^2(\tfrac{2}{3})^3,$$
$$(\tfrac{n}{6})^4 = (\tfrac{n}{6})^2(\tfrac{6}{0})^3 + (\tfrac{n}{5})^2(\tfrac{5}{1})^3 + (\tfrac{n}{4})^2(\tfrac{4}{2})^3 + (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{3})^3 + (\tfrac{n}{2})^2(\tfrac{2}{4})^3 + \text{etc.}$$
$$(\tfrac{n}{7})^4 = (\tfrac{n}{7})^2(\tfrac{7}{0})^3 + (\tfrac{n}{6})^2(\tfrac{6}{1})^3 + (\tfrac{n}{5})^2(\tfrac{5}{2})^3 + (\tfrac{n}{4})^2(\tfrac{4}{3})^3 + (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{4})^3 + \text{etc.}$$
$$(\tfrac{n}{8})^4 = (\tfrac{n}{8})^2(\tfrac{8}{0})^3 + (\tfrac{n}{7})^2(\tfrac{7}{1})^3 + (\tfrac{n}{6})^2(\tfrac{6}{2})^3 + (\tfrac{n}{5})^2(\tfrac{5}{3})^3 + (\tfrac{n}{4})^2(\tfrac{4}{4})^3 + (\tfrac{n}{3})^2(\tfrac{3}{5})^3 + \text{etc.}$$

etc. etc.

Evolutio poteſtatis quinomialis
$(1 + x + xx + x^3 + x^4)^n$.

§. 17. Eius ergo valorem evolutum ita exhibemus:

$$1 + (\tfrac{n}{1})^5 x + (\tfrac{n}{2})^5 x^2 + (\tfrac{n}{3})^5 x^3 + (\tfrac{n}{4})^5 x^4 + (\tfrac{n}{5})^5 x^5 + \text{etc.}$$

ubi eſt $(\tfrac{n}{0})^5 = (\tfrac{n}{4n})^5 = 1$, atque in genere $(\tfrac{n}{\lambda})^5 = (\tfrac{n}{4n-\lambda})^5$; tum vero patet hos valores evaneſcere tam caſibus, quibus eſt λ numerus integer negativus, quam quibus eſt poſitivus maior quam $4n$.

§. 18.

§. 18. Nunc eadem forma tanquam binomium repraeſentata erit $[1+x(1+x+xx+x^3)]^n$, cuius evolutio in genere praebet membrum $(\frac{n}{\alpha})^2 x^\alpha (1+x+xx+x^3)^\alpha$, ubi factor $(1+x+xx+x^3)^\alpha$ continet terminum $(\frac{\alpha}{\beta})^4 x^\beta$, ita ut iunctim habeatur iſte terminus $(\frac{n}{\alpha})^2 (\frac{\alpha}{\beta})^4 x^{\alpha+\beta}$. Quare ſi fuerit $\alpha+\beta=\lambda$, poteſtatis x^λ ex hoc membro coëfficiens erit $(\frac{n}{\alpha})^2 (\frac{\alpha}{\beta})^4$. Iam litteris α et β tribuantur omnes valores, quos recipere poſſunt, incipiendo ab $\alpha=\lambda$, atque coëfficiens quaeſitus erit:

$$(\frac{n}{\lambda})^5 = (\frac{n}{\lambda})^2 (\frac{\lambda}{0})^4 + (\frac{n}{\lambda-1})^2 (\frac{\lambda-1}{1})^4 + (\frac{n}{\lambda-2})^2 (\frac{\lambda-2}{2})^4$$
$$+ (\frac{n}{\lambda-3})^2 (\frac{\lambda-3}{3})^4 + \text{etc.}$$

ſicque omnes characteres numero 5 notati per characteres ordinis praecedentis numero 4 notati, una cum characteribus numero 2 notatis definientur.

Concluſio generalis.

§. 19. Ex his iam ſatis liquet, ſi proponatur poteſtas polynomialis in genere ex terminis numero $\theta+1$ conſtantibus, ſcilicet $(1+x+xx+x^3 \ldots x^\theta)^n$, tum termini poteſtatem x^λ continentis coëfficientem fore $(\frac{n}{\lambda})^{\theta+1}$, qui ita ex characteribus numero θ notatis componetur ut ſit

$$(\frac{n}{\lambda})^{\theta+1} = (\frac{n}{\lambda})^2 (\frac{\lambda}{0})^\theta + (\frac{n}{\lambda-1})^2 (\frac{\lambda-1}{1})^\theta + (\frac{n}{\lambda-2})^2 (\frac{\lambda-2}{2})^\theta + \text{etc.}$$

quae forma omnes praecedentes in ſe complectitur. Si enim incipiamus a valore $\theta=1$, hoc caſu habetur poteſtas binomialis $(1+x)^n$, characteres autem unitate notati oriuntur ex poteſtate monomiali 1^n, unde oritur $(\frac{n}{0})=1$, reliqui vero omnes in nihilum abeunt. Hinc per caſus procedendo habebimus ut ſequitur:

$(\frac{n}{\lambda})$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^3 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^4 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^6 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^5 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^7 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^6 + \text{etc.}$$

etc. etc.

SPECIMEN TRANSFORMATIONIS SINGVLARIS SERIERVM.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 3 Sept. 1778.

§. 1.

Contemplatus ſum hanc ſeriem:

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

ubi more ſolito Π deſignat coëfficientem termini praecedentis. Haec ſeries ita comparata eſt, ut eius ſumma in genere nullo modo exhiberi poſſe videatur, cum tamen omnibus caſibus, quibus vel a vel b eſt numerus integer negativus, abrumpatur eiusque ſumma ſinito modo exprimatur.

§ 2. Quodſi nunc ſtatuamus $s = z(1-x)^{c-a-b}$, atque porro ſaciamus $c - a = \alpha$ et $c - b = \beta$, littera z exprimet ſummam huius ſeriei, praecedenti omnino ſimilis:

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c}x + \Pi\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

quae

quae nunc abrumpitur omnibus caſibus, quibus vel α vel β eſt numerus integer negativus, ideoque quoties fuerit vel $a - c$ vel $b - c$ numerus integer poſitivus.

§. 3. Iſta transformatio eo maioris momenti eſt cenſenda, quod non niſi per longas ambages, atque adeo per aequationes differentiales ſecundi gradus, erui poſſe videatur. Operae igitur pretium erit, totam analyſin, cui iſta transformatio innititur, dilucide expoſuiſſe.

§. 4. Cum ſit

$$s = 1 + \frac{a\,b}{1.c}\,x + \frac{a\,b}{1.c} \cdot \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \cdot x\,x + \text{etc.}$$

atque adeo in quovis termino ſequente tam numerator quam denominator duos novos factores accipiat, per differentiationem primo ex quovis termino binos poſtremos factores tollamus, quod per has operationes praeſtabitur:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{a\,b}{1.c} + \frac{a\,b}{1.c}\,\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}\,x + \text{etc.}$$

quae ducta in x^c ac denuo differentiata praebet

$$\partial.\,x^c\,\partial s = a\,b\,x^{c-1} + \frac{a\,b}{1.c}(a+1)(b+1)\,x^c + \text{etc.}$$

ubi, brevitati conſulentes, elementum ∂x omiſimus, quippe quod ſponte ſubintelligi poteſt.

§. 5. Iam ſimili modo per differentiationem ſingulis numeratoribus binos novos factores adiungamus, hoc modo: 1°.) Series noſtra ducta in x^a ac differentiata dabit

$$\partial.\,x^a\,s = a\,x^{a-1} + \frac{a\,b}{1.c}(a+1)\,x^a + \text{etc.}$$

quae 2°.) ducta in x^{b+1-a} iterumque differentiata praebet

$$\partial.\,x^{b+1-a}\,\partial\,x^a\,s = a\,b\,x^{b-1} + \frac{a\,b}{1.c}(a+1)(b+1)\,x^b + \text{etc.}$$

 quae

quae forma ex praecedente oritur, ſi ea multiplicetur per x^{-c}.

§. 6. Hinc igitur adipiſcimur hanc aequationem:

$$\partial . x^{b-a+1}\, \partial . x^a s = x^{b-c}\, \partial . x^c \partial s,$$

quae aequatio evoluta reducitur ad hanc formam:

$$x^{b+1} \partial\partial s + (a+b+1) x^b \partial s + a b x^{b-1} s = x^b \partial\partial s + c x^{b-1} \partial s.$$

Haec aequatio diviſa per x^{b-1} et omnibus terminis ad partem dextram translatis induet hanc formam:

$$0 = x(1-x)\partial\partial s + [c - (a+b+1)x]\partial s - a b s$$

ita ut a reſolutione huius aequationis differentialis ſecundi gradus ſummatio ſeriei propoſitae pendeat. At vero haec aequatio ita comparata eſſe videtur, ut in genere nullam integrationem admittat.

§. 7. Quanquam autem iſta aequatio differentialis parum ſubſidii nobis afferre videtur, tamen inſignis transformationis eſt capax, qua totum noſtrum negotium conficitur. Utamur enim hac ſubſtitutione generali: $s = (1-x)^n z$, unde fit $l s = n l (1-x) + l z$, ac differentiando erit

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial z}{z} - \frac{n \partial x}{1-x},$$

quae aequatio denuo differentiata praebet

$$\frac{\partial\partial s}{s} - \frac{\partial s^2}{s s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{\partial z^2}{z z} - \frac{n \partial x^2}{(1-x)^2}.$$

Huic addatur haec aequatio:

$$\frac{\partial s^2}{s s} = \frac{\partial z^2}{z z} - \frac{2 n \partial x \partial z}{z(1-x)} + \frac{n n \partial x^2}{(1-x)^2}$$ ac prodibit

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2 n \partial x \partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}.$$

§. 8. Quod ſi iam aequatio propoſita, per s diviſa, ita repraeſentetur:

$$0 = x(1-x)\frac{\partial\partial s}{s} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial s}{s} - a\,b\,s,$$

facta ſubſtitutione perveniemus ad aequationem differentialem ſecundi gradus inter z et x, quae erit:

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2nx\,\partial x\,\partial z}{z} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial z}{z}$$
$$+\frac{n(n-1)x\,\partial x^2}{1-x} - \frac{n[c-(a+b+1)x]\partial x}{1-x} - a\,b = 0.$$

§. 9. Evidens hic eſt numerum n ita aſſumi poſſe, ut poſtrema membra, denominatorem $1-x$ habentia, per eum dividi queant, id quod evenit caſu $n = -a-b+c$, quo valore introducto, ut ſit $s = (1-x)^{c-a-b}z$, aequatio inter z et x hanc accipiet formam:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c+(a+b-2c-1)x]\partial z$$
$$-(c-a)(c-b)z = 0.$$

§. 10. Quodſi iam in hac aequatione ponamus $c-a=\alpha$ et $c-b=\beta$, aequatio inter z et x ſub hac forma apparebit:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c-(\alpha+\beta+1)x]\partial z - \alpha\beta z = 0$$

quae a priori prorſus non differt, niſi quod loco litterarum a et b hic habeamus α et β. Quare cum prior aequatio differentio-differentialis nata ſit ex ſerie

$$s = 1 + \frac{ab}{1.c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

viciſſim ex aequatione poſteriore naſcetur ſeries

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.c}x + \Pi\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

exiſtente $\alpha = c-a$ et $\beta = c-b$; atque hae duae ſeries s et

s et z ita a ſe invicem pendent, ut ſit $s = (1-x)^{c-a-b} z$ ſive $\frac{s}{z} = (1-x)^{c-a-b}$.

§. 11. Verum ex poſteriore aequatione differentio-differentiali methodo directa eadem ſeries pro z elici poteſt. Cum enim ex ſerie priori, poſito $x = 0$, fiat $s = 1$, nunc autem poſuerimus $z = (1-x)^{1+b-c} s$, eodem caſu $x = 0$ fiet $z = s = 1$. Hoc notato pro z fingamus hanc ſeriem:

$$z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

unde fit

$$\partial z = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{etc. et}$$

$$\partial\partial z = B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + 30Fx^4 + \text{etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit

$$\begin{array}{lllllll}
x(1-x)\partial\partial z = \ldots & & + 2Bx + & 6Cx^2 & + 12Dx^3 & + \text{etc.} \\
 & & & - 2Bx^2 & - 6Cx^3 & + \text{etc.} \\
c\partial z = \ldots & Ac + & 2Bc + & 3Cc & + 4Dc & + \text{etc.} \\
-(\alpha+\beta+1)x\partial z = & & -(\alpha+\beta+1)A & -2(\alpha+\beta+1)B & -3(\alpha+\beta+1)C & -\text{etc.} \\
-\alpha\beta z = & -\alpha\beta & -A\alpha\beta & - B\alpha\beta & - C\alpha\beta & -\text{etc.}
\end{array}$$

$$x(1-x)\partial\partial z + c\partial z - (\alpha+\beta+1)xc\partial z - \alpha\beta z = 0.$$

§. 12. Singulis igitur terminis ad nihilum reductis nanciſcemur ſequentes aequationes:

I. $Ac - \alpha\beta = 0$

II. $2B(c+1) - (\alpha+1)(\beta+1)A = 0$

III. $3C(c+2) - (\alpha+2)(\beta+2)B = 0$

IV. $4D(c+3) - (\alpha+3)(\beta+3)C = 0$

V. $5E(c+4) - (\alpha+4)(\beta+4)D = 0$

etc.

§. 13.

§. 13. Hinc igitur iidem eliciuntur coëfficientes, quos iam habuimus, ſcilicet:

$$A = \frac{\alpha\beta}{1.c}$$

$$B = \frac{A(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}$$

$$C = \frac{B(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}$$

$$D = \frac{C(\alpha+3)(\beta+3)}{4(c+3)}$$

etc.

Cum autem methodus qua hanc egregiam transformationem ſumus adepti, maxime ſit obliqua et per ambages longas procedat, maxime optandum eſſet, ut alia methodus magis directa et naturalis detegeretur, quo utique in Analyſin haud contemnendum incrementum inferretur. Fateor autem me hactenus in hac inveſtigatione fruſtra laboraſſe.

§. 14. Quoniam in his ſeriebus numerus factorum continuo creſcit, quo hic characteres ex poteſtate binomiali deſumtos commodius in uſum vocare queamus, litteris a et b, perinde ac litteris α et β, valores tribuamus negativos, ponendo $a = -f$, $b = -g$, $\alpha = -\zeta$ et $\beta = -\eta$, ita ut ſit $\zeta = -c-f$ et $\eta = -c-g$, et iam ambae noſtrae ſeries s et z ita a ſe invicem pendebunt, ut ſit

$$s = (1-x)^{c+f+g} z.$$

Evolvamus nunc primo iuxta hos valores ſeriem priorem s, eritque

$$s = 1 + \frac{fg}{1.c}x + \Pi\frac{(f-1)(g-1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(f-2)(g-2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

ſi-

ſimilique modo poſterior ſeries erit

$$z = 1 + \frac{\zeta\eta}{1\,c}x + \Pi\frac{(\zeta-1)(\eta-1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(\zeta-2)(\eta-2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

§. 15. Hic iam commode characteres memoratos adhibere poterimus. Denotet igitur $\left(\frac{m}{n}\right)$ coëfficientem termini v^n, qui ipſi convenit ex evolutione poteſtatis binomialis $(1+v)^m$, ita ut hoc modo habeamus

$$(1+v)^m = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)v + \left(\frac{m}{2}\right)v^2 + \left(\frac{m}{3}\right)v^3 + \text{etc.}$$

Hinc igitur pro priore noſtrarum ſerierum fiet $\frac{f}{1} = \left(\frac{f}{1}\right)$; deinde $\frac{f(f-1)}{1\cdot 2} = \left(\frac{f}{2}\right)$; $\frac{f(f-1)(f-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \left(\frac{f}{3}\right)$; etc. ſicque iſta ſeries iam concinnius ita referetur:

$$s = 1 + \frac{g}{c}\left(\frac{f}{1}\right)x + \frac{g}{c}\cdot\frac{g-1}{c+1}\cdot\left(\frac{f}{2}\right)x^2 + \frac{g}{c}\cdot\frac{g-1}{c+1}\cdot\frac{g-2}{c+2}\left(\frac{f}{3}\right)x^3 + \text{etc.}$$

Quo nunc terminos litteram g continentes ſimili modo contrahamus, ipſam ſeriem utrinque multiplicemus per characterem $\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right)$; tum enim erit $\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right)\frac{g}{c} = \left(\frac{g+c-1}{c}\right)$; $\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right)\frac{g}{c}\cdot\frac{g-1}{c+1} = \left(\frac{g+c-1}{c+1}\right)$, quae expreſſio porro multiplicata per $\frac{g-2}{c+2}$ dabit hunc characterem: $\left(\frac{g+c-1}{c+2}\right)$. His notatis naneiscimur nunc hanc ſeriem:

$$s\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right) = \left(\frac{g+c-1}{c-1}\right) + \left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{g+c-1}{c}\right)x$$
$$+ \left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{g+c-1}{c+1}\right)x^2 + \left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{g+c-1}{c+2}\right)x^3 + \text{etc.}$$

§. 16. Simili modo etiam alteram ſeriem transformare licebit; ubi autem probe notandum, hanc transformationem duplici modo inſtitui poſſe, prouti factores denominatorum 1, 2, 3, 4, etc. vel cum littera ζ vel cum η coniunguntur. Primo igitur ex praecedente ſerie ſi ζ loco f et η loco g ſcribamus, obtinebimus hanc ſeriem:

z

$$z\left(\frac{\eta+c-1}{c-1}\right)=\left(\frac{\eta+c-1}{c-1}\right)+\left(\frac{\zeta}{1}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c}\right)x+\left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c+1}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{\zeta}{3}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c+2}\right)x^3+\text{etc.}$$

Sin autem loco f et g inverſo ordine ſcribamus η et ζ, prodit

$$z\left(\frac{\zeta+c-1}{c-1}\right)=\left(\frac{\zeta+c-1}{c-1}\right)+\left(\frac{\eta}{1}\right)\left(\frac{\zeta+c-1}{c}\right)x+\left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{\zeta+c-1}{c+1}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{\eta}{3}\right)\left(\frac{\zeta+c-1}{c+2}\right)x^3+\text{etc.}$$

Pro utraque autem relatio manet eadem, ſcilicet:

$$s=(1-x)^{c+f+g}\,z.$$

§. 17. Quo clarius appareat, quantopere hac duae ſeries pro z inventae a ſe invicem diſcrepent, loco ζ et η ſcribamus valores aſſumtos, ſcilicet: $\zeta=-c-f$ et $\eta=-c-g$, atque ambae poſteriores ſeries pro littera z erunt:

$$z\left(\frac{-g-1}{c-1}\right)=\left(\frac{-g-1}{c-1}\right)+\left(\frac{-c-f}{1}\right)\left(\frac{-g-1}{c}\right)x$$
$$+\left(\frac{-c-f}{2}\right)\left(\frac{-g-1}{c+1}\right)x^2+\text{etc.}$$
$$z\left(\frac{-f-1}{c-1}\right)=\left(\frac{-f-1}{c-1}\right)+\left(\frac{-c-g}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{c}\right)x$$
$$+\left(\frac{-c-g}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{c+1}\right)x^2+\text{etc.}$$

§. 18. Quo iam has ſeries ad formam commodiorem revocemus s, ponamus $g+c-1=h$ et $c-1=e$, ita ut fit $c=e+1$ et $g=h-e$; hinc enim ſeries noſtra principalis erit

$$s\left(\frac{h}{e}\right)=\left(\frac{h}{e}\right)+\left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x+\left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{h}{e+3}\right)x^3+\text{etc.}$$

Binae autem ſequentes ſeries ex littera z formatae erunt

Prior: $z\left(\frac{e-h-1}{e}\right) = \left(\frac{e-h-1}{e}\right) + \left(\frac{-e-f-1}{1}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+1}\right)x$
$+ \left(\frac{-e-f-1}{2}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.}$

Poſterior: $z\left(\frac{-f-1}{e}\right) = \left(\frac{-f-1}{e}\right) + \left(\frac{-1-h}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x$
$+ \left(\frac{-1-h}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.}$

ambae autem quantitates s et z ita a ſe invicem pendent, ut ſit $s = (1-x)^{f+h-1} z$.

§. 19. Huius transformationis uſum inſignem in caſu maxime memorabili oſtendamus, ex formula integrali $\int \frac{\partial\Phi \cos. i\Phi}{(1+aa-2a\cos.\Phi)^{n+1}}$ petito, cuius integrale a termino $\Phi = 0$ usque ad terminum $\Phi = 180^\circ$ primo quidem per ſolam coniecturam concluſi eſſe $= \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V$, exiſtente

$$V = \left(\frac{n-i}{0}\right)\left(\frac{n+i}{i}\right) + \left(\frac{n-i}{1}\right)\left(\frac{n+i+1}{i+1}\right) aa + \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(\frac{n+i+2}{i+2}\right) a^4 + \text{etc.}$$

quae ſeries, ſi cum noſtra principali conferatur, ut ſit $V = s\left(\frac{h}{e}\right)$, praebebit $h = n+i$ et $e = i$; tum vero $f = n - i$ et $x = aa$; binae ergo alterae ſeries hinc formatae erunt:

Prior: $z\left(\frac{-n-1}{i}\right) = \left(\frac{-n-1}{i}\right) + \left(\frac{-n-1}{1}\right)\left(\frac{-n-1}{i+1}\right)a^2$
$+ \left(\frac{-n-1}{2}\right)\left(\frac{-n-1}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}$

Altera: $z\left(\frac{i-n-1}{i}\right) = \left(\frac{i-n-1}{i}\right) + \left(\frac{-n-i-1}{1}\right)\left(\frac{i-n-1}{i+1}\right)a^2$
$+ \left(\frac{-n-i-1}{2}\right)\left(\frac{i-n-1}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}$

quae ſeries ex ipſa ſerie V oritur loco n ſcribendo $-n-1$. Nunc autem relatio inter s et z erit $s = (1-aa)^{2n+1} z$; tum vero eſt $V = s\left(\frac{n+i}{i}\right)$.

§. 20.

§. 20. Cum igitur ſit

$$\int \frac{\partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi}{(1 + aa - 2a \operatorname{cof.} \Phi)^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} V$$

$$= \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} \left(\frac{n+i}{i}\right) s,$$

in hac forma loco n ſcribamus $-n-1$, ſitque

$$\int \frac{\partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi}{(1 + aa - 2a \operatorname{cof.} \Phi)^{-n}} \begin{bmatrix} \text{a } \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = 180^\circ \end{bmatrix} = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{-2n-1}} U, \text{ erit}$$

$$U = \left(\frac{-n-1-i}{0}\right)\left(\frac{-n-1+i}{i}\right) + \left(\frac{-n-1-i}{1}\right)\left(\frac{-n-1+i}{i+1}\right) aa + \text{etc.}$$

ideoque

$$U = z\left(\frac{i-n-1}{i}\right) = \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1 - aa)^{-2n-1} s.$$

§. 21. Ponamus iam $(1 + aa - 2a \operatorname{cof.} \Phi) = \Delta$, et contemplemur hos duos valores integrales, quos modo ſumus aſſecuti:

$$\text{I. } \int \frac{\partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} \left(\frac{n+i}{i}\right) s,$$

$$\text{II. } \int \Delta^n \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{-2n-1}} \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1 - aa)^{-2n-1} s$$

$$= \pi a^i \left(\frac{i-n-1}{i}\right) s,$$

conſequenter inter has duas formulas integrales a termino $\Phi = 0$ ad terminum $\Phi = 180^\circ$ extenſas conſequimur hanc relationem maxime memorabilem:

$$\int \frac{\partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi}{\Delta^{n+1}} : \int \Delta^n \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi = \left(\frac{n+i}{i}\right) : \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1 - aa)^{2n+1}$$

ſive erit

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)(1 - aa)^{-n} \int \Delta^n \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi = \left(\frac{-n-1+i}{i}\right)(1 - aa)^{n+1} \int \Delta^{-n-1} \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi.$$

§. 22. Hoc poſtremum Theorema iam ante aliquod tempus per ſolam inductionem quoque erueram, atque adeo de eius demonſtratione propemodum deſperaveram, quae nunc ex transformatione ſerierum allata quaſi ſponte ſe obtulit; unde praeſtantiſſimus uſus huius transformationis, quae merito profundiſſimae indaginis eſt cenſenda, eo clarius perſpicitur.

§. 23. Cum autem nuper idem hoc theorema propoſuiſſem, ratio ibi data inter binas formulas integrales aliquatenus ab hic inventa diſcrepare videtur; interim tamen perfecte conſentire deprehenduntur, ſi modo ſequens proportio in ſubſidium vocetur, qua generatim eſt

$$\left(\frac{n}{i}\right):\left(\frac{-n-1}{i}\right)=\left(\frac{-n-1+i}{i}\right):\left(\frac{n+i}{i}\right),$$

cuius ratio inde eſt manifeſta, quod in genere ſemper eſt $\left(-\frac{p}{i}\right)=\pm\left(\frac{p+i-1}{i}\right)$, ideoque etiam $\left(\frac{p}{i}\right)=\pm\left(\frac{-p-1+i}{i}\right)$, ubi ſigna ſuperiora valent, ſi i fuerit numerus par, inferiora vero ſi impar. Hinc ergo erit:

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)=\pm\left(\frac{-n-1}{i}\right) \text{ et } \left(\frac{-n-1+i}{i}\right)=\pm\left(\frac{n}{i}\right).$$

§. 24. Hinc igitur noſtrum Theorema adhuc concinnius enunciari poterit. Si ponamus brevitatis gratia $1-2a\cos.\Phi+aa=\Theta$, ita ut ſit $\Delta=(1-aa)\Theta$, tum iſta prodibit proportio:

$$\int\Theta^n\partial\Phi\cos.i\Phi:\int\frac{\partial\Phi\cos.i\Phi}{\Theta^{n+1}}=\int\frac{\Delta^n\partial\Phi\cos.i\Phi}{(1-aa)^n}:\int\frac{\partial\Phi\cos.i\Phi(1-aa)^n}{\Delta^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{-n-1+i}{i}\right):\left(\frac{n+i}{i}\right)=\left(\frac{n}{i}\right):\left(\frac{-n-1}{i}\right);$$

ſic-

ſicque erit

$$\left(\frac{n}{i}\right)\int\frac{\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi}{\Theta^{n+1}}=\left(\frac{-n-1}{i}\right)\int\Theta^{n}\,\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi.$$

§. 25. Ceterum quo transformationes hic expoſitae facilius ad quosvis caſus accommodari queant, eas ſequenti Theoremate complectamur.

Theorema.

Si cognita fuerit ſumma huius ſeriei:

$$\frac{h}{e}+\left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x+\left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^{2}+\left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{h}{e+3}\right)x^{3}+\text{etc.}$$

quae ponatur $=$ S, tum etiam ſummae binarum ſequentium ſerierum exhiberi poterunt, quarum prior eſt iſta:

$$\left(\frac{e-h-1}{e}\right)+\left(\frac{-e-f-1}{1}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+1}\right)x+\left(\frac{-e-f-1}{2}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+2}\right)x^{2}+\text{etc.}$$

cuius ſumma erit

$$\left(\frac{e-h-1}{e}\right)\frac{S}{\left(\frac{h}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}},$$

ubi notetur eſſe $\left(\frac{e-h-1}{e}\right)=\pm\frac{h}{e}$, ubi ſignum ſuperius valet, ſi i numerus par, inferius ſi impar; unde ſumma ſeriei eſt $\frac{\pm S}{(1-x)^{f+h+1}}$. Altera ſeries, cuius ſumma hinc definiri poteſt, erit.

$$\left(\frac{-f-1}{e}\right)+\left(\frac{-h-1}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x+\left(\frac{-h-1}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^{2}+\text{etc.}$$

cuius ſumma erit

$$\left(\frac{-f-1}{e}\right)\frac{S}{\left(\frac{h}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}},$$

quae

quae etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$\pm\left(\frac{f+e}{e}\right)\frac{S}{\left(\frac{h}{e}\right)(f-x)^{f+h+1}}.$$

§. 26. Si ſummae harum trium ſerierum ſtatuantur ut ſequitur:

$$♄=\left(\frac{h}{e}\right)+\left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x+\left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^2+\left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{h}{e+3}\right)x^3+\text{etc.}$$

$$♃=\left(\frac{e-h-1}{e}\right)+\left(\frac{-e-f-1}{1}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+1}\right)x+\left(\frac{-e-f-1}{2}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+2}\right)x^2+\text{etc.}$$

$$♂=\left(\frac{-f-1}{e}\right)+\left(\frac{-h-1}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x+\left(\frac{-h-1}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^2+\text{etc.}$$

eae ita inter ſe referuntur, ut ſit

$$\left(\frac{e-h-1}{e}\right)♄=\left(\frac{h}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}♃,$$

$$\left(\frac{-f-1}{e}\right)♄=\left(\frac{h}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}♂,$$

$$\left(\frac{-f-1}{e}\right)♃=\left(\frac{e-h-1}{e}\right)♂.$$

ME-

METHODVS NOVA AC FACILIS OMNIVM AEQVATIONVM ALGEBRAICARVM RADICES NON SOLVM IPSAS SED ETIAM QVASCVNQVE EARVM POTESTATES PER SERIES CONCINNAS EXPRIMENDI.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhibit. die 21 Septemb. 1778.

§. 1.

Primus, qui hoc argumentum ſatis felici ſucceſſu tractavit, erat ingenioſiſſimus *Lambert* non ita pridem beate defunctus, qui huiusmodi ſeries pro aequationibus trinomialibus methodo prorſus ſingulari per approximationes procedente elicuit. Verum iſta methodus calculos maxime operoſos ac taedioſos requirebat, ita ut inventis aliquot terminis initialibus eundem calculum ulterius proſequi non potuerit, ſed tantum ex egregio ordine, qui in prioribus terminis obſervabatur, per inductionem ſequentes concludere fuerit coactus. Quamobrem iam ex illo tempore plurimum ſtudii collocavi in methodum directam et planiorem inquirendi, quae ad easdem ſeries perduceret.

§. 2.

§. 2. In huiusmodi autem methodum non multo poſt incidi, quam in *Commentar. Novor. Tomo XV.* fuſius expoſui; ubi in genere aequationem ſub hac forma contentam:

$$1 = \frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} - \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} - \text{etc.}$$

ſum contemplatus, cuius radices ſi fuerint α, β, γ, etc. notum eſt earum ſummam eſſe $= A$, ſummam quadratorum $= A^2 - 2B$, ſummam cuborum $= A^3 - 3AB + 3C$, et ita porro. Hinc igitur pro ſumma poteſtatum quarumcunque $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n +$ etc. ſimilem expreſſionem inveſtigavi, cuius legem progreſſionis in infinitum extendi obſervavi; cum tamen pro quovis caſu eos tantum terminos accipi oporteat, qui a fractionibus ſint liberati; unde mihi in mentem venit in valores iſtarum ſerierum, ſi in infinitum continuentur, inquirere. Mox autem facili ratiocinio intellexi, earum ſummam eandem poteſtatem ſolius maximae radicis, puta α^n, definire.

§. 3. Cum igitur ſeriem infinitam eſſem adeptus, quae poteſtatem exponentis n maximae radicis, ſcilicet α, exprimeret, mox perſpexi iſtam ſeriem egregie cum Lambertina convenire; tum vero haud amplius difficile erat ſimiles ſeries pro omnibus aequationibus ſub hac forma multo generaliori contentas:

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

exhibere, ubi exponentibus α, β, γ, δ, etc. adeo omnes plane valores ſive poſitivos, ſive negativos, ſive integros, ſive fractos tribuere licet. Nihilo vero minus ſinguli huius ſeriei termini egregio ordine procedunt, hosque adeo, quousque libue-

libuerit, facile continuare licet, ita ut hic nihil plane inductioni vel coniecturae concedere neceſſe ſit.

§. 4. Cum autem haec methodus ex principio prorſus alieno, et per ambages non parum moleſtas, ſit deducta, plurimum laboravi, ut methodum magis directam, et faciliori negotio ad ſcopum perducentem, perſcrutarer, quin etiam labores meos in aliquot diſſertationibus cum Academia communicatis accuratius expoſui. Nunc autem idem argumentum retractans in methodum longe faciliorem, ac per nullas ambages procedentem, incidi, quam hoc loco clarius explicare conſtitui.

§. 5. Hic igitur conſideraturus ſum aequationem algebraicam ſub hac forma generaliſſima contentam:

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

ubi ante omnia facile patet ſine ulla reſtrictione loco litterae A unitatem ſcribi poſſe, ita ut aequatio, quam hic tractare ſuscipio, ſit:

$$1 = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

ex qua ſtatim patet, ſi litterae B, C, D, etc. evaneſcerent, fore $x = 1$; unde ſequitur in genere radicem x certe ſeriei infinitae aequalem ſtatui poſſe, cuius primus terminus ſit unitas, ſequentes vero litteras B, C, D, utcunque inter ſe compoſitas, complectantur, quandoquidem in eam praeter ipſas has litteras ſingulas tam omnia producta ex binis quam ex ternis et pluribus ingredi debent.

§. 6. Quoniam autem hic mihi propoſitum eſt non ſolum in ipſam radicem x, ſed in genere in eius poteſtatem quamcunque x^n inquirere, ipſam aequationem hac forma repraeſentabo:

$$x^n - x^{n-\alpha} = B x^{n-\beta} + C x^{n-\gamma} + D x^{n-\delta} + \text{etc.}$$

ubi primum terminum a dextra in ſiniſtram transtuli, ut ad dextram tantum litterae B, C, D, etc. cum ſuis poteſtatibus coniunctae occurrant, ex quarum permiſtione verum valorem poteſtatis x^n inveſtigari oportet; ubi facile perſpicitur eiusmodi ſeriem pro x^n prodire debere, in qua poſt terminum primum 1 non ſolum ſingulae litterae B, C, D, etc. ſed etiam omnia producta tam ex binis quam ternis pluribusque occurrere debeant, ita ut totum negotium iam huc redeat, ut ſingulis his productis debiti coefficientes aſſignentur, qui utique potiſſimum pendebunt ab exponente n praeter reliquos exponentes datos α, β, γ, δ, ϵ, etc.

§. 7. Hic autem plurimum iuvabit iſtos coëfficientes per idoneos characteres repraeſentare, quibus ſcilicet omnis confuſio ex infinita multitudine terminorum oriunda evitari queat. Ita coëfficientes ipſarum litterarum B, C, etc. quatenus ad poteſtatem exponentis n referuntur, his ſignis denotabo: $\overset{n}{(B)}$, $\overset{n}{(C)}$, $\overset{n}{(D)}$, etc. Unde ſi alius quicunque exponens, puta m, proponeretur, hi coëfficientes ita forent deſignandi: $\overset{m}{(B)}$, $\overset{m}{(C)}$, $\overset{m}{(D)}$, etc., quod idem intelligendum eſt de omnibus productis ex binis pluribusve harum litterarum compoſitis. Veluti ſi in ſerie occurrat hoc productum $B^{\lambda} . C^{\mu} . D^{\nu}$. etc., eius coëfficientem pro poteſtate exponentis m ita ſum repraeſentaturus: $\overset{m}{(B^{\lambda} . C^{\mu} . D^{\nu} . \text{etc.})}$.

§. 8. Hoc igitur ſignandi modo conſtituto valor poteſtatis quaeſitae x^n per huiusmodi ſeriem exprimetur:

$$x^n = 1 + (\overset{n}{B})B + (\overset{n}{C})C + (\overset{n}{D})D + (\overset{n}{E})E + \text{etc.}$$
$$+ (\overset{n}{B^2})B^2 + (\overset{n}{C^2})C^2 + (\overset{n}{D^2})D^2 + (\overset{n}{E^2})E^2 + \text{etc.}$$
$$+ (\overset{n}{BC})BC + (\overset{n}{BD})BD + (\overset{n}{BE})BE + \text{etc.}$$

cuius ergo ſeriei terminus generalis omnes plane in ſe complectens erit

$$(\overset{n}{B^b. C^c. D^d. E^e.\ \text{etc.}})\ B^b. C^c. D^d. E^e.\ \text{etc.}$$

§. 9. Ne autem hic opus ſit calculum ad plures horum terminorum ſimul applicare, praecipuum momentum huc redit, ut ſingulos coëfficientes ex paucioribus terminis iam cognitis inveſtigare doceamus. Ac primo quidem ſi quaeratur coëfficiens $(\overset{n}{B})$, ſive terminus $(\overset{n}{B})B$, pro poteſtate x^n, evidens eſt pro $x^{n-\alpha}$ hunc terminum fore $(\overset{n-\alpha}{B})B$, unde ex ipſa aequatione, quatenus hic tantum de terminis formae B agitur, erit

$$(\overset{n}{B})B - (\overset{n-\alpha}{B})B = B\,x^{n-\beta} = B;$$

propterea quod poteſtas $x^{n-\beta}$ nullas harum litterarum involvere debet, ideoque pro $x^{n-\beta}$ ſcribi debet unitas utpote prima pars valoris veri. Quoniam nunc hic per B dividi poteſt, habebimus pro coëfficiente quaeſito $(\overset{n}{B})$ hanc aequationem: $(\overset{n}{B}) - (\overset{n-\alpha}{B}) = 1$; ſimili modo pro reliquis habebimus has aequationes:

$$(\overset{n}{C}) - (\overset{n-\alpha}{C}) = 1;\ (\overset{n}{D}) - (\overset{n-\alpha}{D}) = 1;\ (\overset{n}{E}) - (\overset{n-\alpha}{E}) = 1;\ \text{etc.}$$

K 2 §. 10.

§. 10. Sin autem quaeramus coëfficientem $(\overset{n}{B^2})$, euidens eſt ex parte ſiniſtra noſtrae aequationis ſolum terminum $B x^{n-\beta}$ in computum venire, quia nullae aliae litterae hic occurrunt. Erit igitur

$(\overset{n}{B^2}) B^2 - (\overset{n-\alpha}{B^2}) B^2 = (\overset{n-\beta}{B}) B^2$; ergo per B^2 dividendo

$(\overset{n}{B^2}) - (\overset{n-\alpha}{B^2}) = (\overset{n-\beta}{B})$. Simili modo erit

$(\overset{n}{C^2}) - (\overset{n-\alpha}{C^2}) = (\overset{n-\gamma}{C})$, tum vero

$(\overset{n}{D^2}) - (\overset{n-\alpha}{D^2}) = (\overset{n-\delta}{D})$,

etc.

§. 11. Sin autem porro quaeratur coëfficiens $(\overset{n}{BC})$ ſive terminus $(\overset{n}{BC}) BC$, manifeſtum eſt ex parte aequationis dextra binos terminos $B x^{n-\beta}$ et $C x^{n-\gamma}$ hic in ſubſidium vocari debere. Vt enim forma BC reſultet, pro priore parte pro $x^{n-\beta}$ ſumi debet $(\overset{n-\beta}{C}) C$; pro poſteriore autem loco $x^{n-\gamma}$ ſcribi debet $(\overset{n-\gamma}{B}) B$, ſicque noſtra aequatio per BC diviſa erit:

$(\overset{n}{BC}) - (\overset{n-\alpha}{BC}) = (\overset{n-\beta}{C}) + (\overset{n-\gamma}{B})$. Eodem modo erit

$(\overset{n}{BD}) - (\overset{n-\alpha}{BD}) = (\overset{n-\beta}{D}) + (\overset{n-\delta}{B})$

$(\overset{n}{CD}) - (\overset{n-\alpha}{CD}) = (\overset{n-\gamma}{D}) + (\overset{n-\delta}{C})$

et ita porro.

ſimi-

ſimilique modo evidens eſt fore

$$(B\overset{n}{C}D) - (\overset{n-\alpha}{B}CD) = (C\overset{n-\beta}{D}) + (\overset{n-\gamma}{B}C) + (B\overset{n-\delta}{C})$$

atque porro

$$(BC\overset{n}{D}E) - (B\overset{n-\alpha}{C}DE) = (B\overset{n-\varepsilon}{C}D) + (C\overset{n-\beta}{D}E) + (B\overset{n-\gamma}{D}E) + (B\overset{n-\delta}{C}E).$$

§. 12. Quod ſi eadem littera ſaepius occurrat, ipſa quidem quadrata iam evolvimus, pro cubis vero habebimus:

$$(\overset{n}{B^3}) - (\overset{n-\alpha}{B^3}) = (\overset{n-\beta}{B^2})$$

$$(\overset{n}{C^3}) - (\overset{n-\alpha}{C^3}) = (\overset{n-\gamma}{C^2})$$

$$(\overset{n}{D^3}) - (\overset{n-\alpha}{D^3}) = (\overset{n-\delta}{D^2})$$

etc.

Eodemque modo erit pro ſuperioribus poteſtatibus

$$(\overset{n}{B^4}) - (\overset{n-\alpha}{B^4}) = (\overset{n-\beta}{B^3})$$

$$(\overset{n}{B^5}) - (\overset{n-\alpha}{B^5}) = (\overset{n-\beta}{B^4})$$

$$(\overset{n}{B^6}) - (\overset{n-\alpha}{B^6}) = (\overset{n-\beta}{B^5})$$

etc.

§. 13. Sin autem plures litterae ingrediantur, ex parte aequationis dextra etiam plures termini in ſubſidium vocari debent, veluti ex ſequentibus formulis pateſcit:

$$(\overset{n}{B^2}C) - (\overset{n-\alpha}{B^2}C) = (\overset{n-\gamma}{B^2}) + (\overset{n-\beta}{B}C)$$

$$(\overset{n}{B^2}C^2) - (\overset{n-\alpha}{B^2}C^2) = (\overset{n-\gamma}{B^2}C) + (\overset{n-\beta}{B}C^2)$$

(B³

$$(\overset{n}{B^3C}) - (\overset{n-\alpha}{B^3C}) = (\overset{n-\gamma}{B^3}) + (\overset{n-\beta}{B^2C})$$

$$(\overset{n}{B^3C^2}) - (\overset{n-\alpha}{B^3C^2}) = (\overset{n-\gamma}{B^3C}) + (\overset{n-\beta}{B^2C^2})$$

$$(\overset{n}{B^3C^3}) - (\overset{n-\alpha}{B^3C^3}) = (\overset{n-\gamma}{B^3C^2}) + (\overset{n-\beta}{B^2C^3})$$

Simili modo perſpicuum eſt fore

$$(\overset{n}{B^3C^2D}) - (\overset{n-\alpha}{B^3C^2D}) = (\overset{n-\beta}{B^2C^2D}) + (\overset{n-\gamma}{B^3CD}) + (\overset{n-\delta}{B^3C^2}).$$

Haecque exempla abunde ſufficiant ad coëfficientes omnium plane productorum per huiusmodi aequationes deſignandos.

§. 14. Per tales autem aequationes inveſtigatio coëfficientium utcunque complexorum ad coëfficientes ſimpliciorum productorum reducitur, quos tanquam iam cognitos ſpectare licet, quandoquidem a determinatione ſimpliciorum operationes inchoamus. Scilicet ſi coëfficiens quaeſitus quicunque deſignetur per $\phi : n$, ſiquidem tanquam functio ipſius n ſpectari poteſt: reſolutio omnium harum aequationum revocatur ad hanc formam:

$$\phi : n - \phi : (n - \alpha) = \Pi,$$

ubi Π eſt functio iam cognita litterae n. At vero mox videbimus, huius aequationis reſolutionem pro noſtro inſtituto ſatis commode expediri poſſe.

§. 15. Reſolutio huius aequationis ad calculum differentiarum finitarum eſt referenda, & perinde ac differentialium quantitatem conſtantem arbitrariam recipiet. Quare ne hinc ulla incertitudo relinquatur, ante omnia probe eſt notandum, omnes coëfficientes, quos quaerimus, ita compara-

paratos eſſe debere, ut evaneſcant poſito $n = 0$. Cum enim hoc caſu fiat $x^n = 1$, ideoque ipſi primo termino noſtrae feriei aequalis, ſequentes termini omnes litteras B, C, D, etc. involventes hoc caſu evaneſcere debebunt; unde neceſſe eſt ut eorum coëfficientes factorem n involvant.

§. 16. Reſolutio autem generalis huius aequationis $\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = \Pi$, parum adiumenti in hoc negotio eſſet allatura. At vero datur ſolutio particularis ad noſtrum inſtitutum imprimis accommodata, quam hic evolvi conveniet. Denotante ſcilicet n' ipſam quantitatem variabilem n, conſtante quapiam c ſive auctam ſive minutam, ita ut ſit $n' = n \pm c$, ſi fuerit

$$\Phi : n = \Delta\, n\, (n' + \alpha)\, (n' + 2\,\alpha) \,.\,.\,.\,.\,.\, (n' + i\,\alpha)$$

ubi Δ itidem ſignificat quantitatem conſtantem, erit

$$\Phi : (n - \alpha) = \Delta\, (n - \alpha)\, n'\, (n' + \alpha)\, (n' + 2\,\alpha) \,.\,.\,.\, [n' + (i - 1)\,\alpha],$$

unde ob factores communes

$$(n' + \alpha)\, (n' + 2\,\alpha) \,.\,.\,.\,.\, [n' + (i - 1)\,\alpha], \text{ erit}$$

$$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = \Delta\, (n'\,n + i\,n\,\alpha - n'\,n + \alpha\,n') \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$= \Delta\, \alpha\, (n' + i\,n)\, (n' + \alpha)\, (n' + 2\,\alpha) \,.\,.\,.\,.\,.\, n' + (i - 1)\,\alpha$$

quae expreſſio ergo aequabitur quantitati illi Π, unde ſequens Lemma fundamenti loco hic conſtituamus.

Lemma.

§. 17. *Propoſita aequatione reſolvenda*

$$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = \Pi,$$

quoties iſta quantitas Π *in hac forma continebitur:*

$\Pi =$

$\Pi = \Delta\alpha(n' + in)[(n' + \alpha)(n' + 2\alpha)(n' + 3\alpha) \dots [n' + (i-1)]]$ *tum ſemper erit* $\Phi : n = \Delta n (n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \dots (n' + i\alpha)$ *exiſtente* $n' = n \pm c$. Haec forma iam ita eſt comparata, ut evaneſcat poſito $n = 0$, ſicque ad coëfficientes quaeſitos definiendos apprime eſt accommodata.

§. 18. Iam huius Lemmatis beneficio omnes noſtros coëfficientes ſatis expedite determinare licebit; et quia magis compoſitos perpetuo ex ſimplicioribus derivari oportet, omnes terminos ſeriei generalis. quam quaerimus, pro poteſtate indefinita x^n in certos ordines diſtinguamus, quorum primus comprehendat terminos ipſas litteras B, C, D, etc. ſimpliciter continentes; ad ordinem ſecundum referamus producta ex binis harum litterarum, cuiusmodi ſunt B^2, BC, C^2, etc.; tertius oido contineat productum ex ternis, cuiusmodi ſunt B^3, B^2C, BCD, etc. quartus ordo producta ex quaternis, et ita porro. Pro ſingulis ergo his ordinibus coëfficientes inveſtigabimus.

Inveſtigatio

Terminorum primi ordinis.

§. 19. Omnium horum terminorum unica eſt forma B, pro cuius coëfficiente ſupra habuimus hanc aequationem: $(\overset{n}{B})B - (\overset{n-1}{B}) = 1$; unde poſito $(\overset{n}{B}) = \Phi : n$, erit hic $\Pi = 1$. Sumatur ergo in Lemmate praemiſſo $\Phi : n = \Delta n$, ita ut hic ſit $i = 0$, et quoniam hinc ſit $\Phi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)$, erit $\Pi = \Delta\alpha = 1$, unde fit $\Delta = \frac{1}{\alpha}$; quamobrem coëfficiens noſter

ſter erit $(\overset{n}{B}) = \frac{n}{\alpha}$, ſimilique modo pro caeteris huius ordinis erit $(\overset{n}{C}) = \frac{n}{\alpha}$, $(\overset{n}{D}) = \frac{n}{\alpha}$, etc. ita ut ipſi termini huius ordinis futuri ſint $\frac{n}{\alpha}B + \frac{n}{\alpha}C + \frac{n}{\alpha}D + \frac{n}{\alpha}E +$ etc.

Inveſtigatio
Terminorum ſecundi ordinis.

§. 20. Horum igitur terminorum dabitur duplex forma, vel B^2, vel BC, quorum ergo coëfficientes ſunt $(\overset{n}{B^2})$, vel $(\overset{n}{BC})$, quos indagari oportet. Pro priore autem ſupra iam dedimus hanc aequationem: $(\overset{n}{B^2}) - (\overset{n'}{B^2}) = (\overset{n\ \beta}{B})$; ita ut poſito $(\overset{n}{B^2}) = \Phi : n$ fit $\Pi = (\overset{n\ \beta}{B})$. Cum igitur modo invenerimus eſſe $(\overset{n}{B}) = \frac{n}{\alpha}$, erit $\Pi = \frac{n-\beta}{\alpha}$. In Lemmate igitur fiat $i = 1$, ita ut fit $\Phi : n = \Delta n (n' + n)$, unde oritur $\Pi = \Delta \alpha (n' + n) = \frac{n-\beta}{\alpha}$. Hinc ergo reſtituto $n' = n + c$, erit $\frac{n-\beta}{\alpha} = \Delta \alpha (2n + c)$, unde ſequitur fore $2 \Delta \alpha n = \frac{n}{\alpha}$ et $\Delta \alpha c = -\frac{\beta}{\alpha}$, unde fit $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ et $c = -\frac{\beta}{\Delta\alpha\alpha} = -2\beta$, ita ut ſit $n' = n - 2\beta$.

§. 21. Cum igitur ſit $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ et $n' = n - 2\beta$, erit coëfficiens ipſius B^2 quaeſitus, ſcilicet

$$(\overset{n}{B^2}) = \frac{n(n+\alpha-2\beta)}{2\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}.$$

Quare termini ſecundi ordinis formae B^2 erunt ſequentes:

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}\cdot B^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\gamma}{2\alpha}C^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\delta}{2\alpha}\cdot D + \text{etc.}$$

§. 22. Pro altera forma BC ſupra attulimus hanc aequationem:

$$(\overset{n}{B}C) - (\overset{n-1}{B}C) = (\overset{n-\beta}{C}) + (\overset{n-\gamma}{B}).$$

Cum igitur ſit $(\overset{n}{B}) = (\overset{n}{C}) = \frac{n}{\alpha}$, ſi ponamus $(\overset{n}{B}C) = \Phi : n$, erit

$$\Pi = \frac{n-\beta}{\alpha} + \frac{n-\gamma}{\alpha} = \frac{2n-\beta-\gamma}{\alpha}.$$

In Lemmate igitur noſtro ſumamus $i = 1$, ut ſit

$\Phi : n = \Delta n(n' + \alpha)$, fierique debet

$\Delta \alpha(n' + n) = \frac{2n-\beta-\gamma}{\alpha}$.

Sumatur ergo primo $n' = n - \beta - \gamma$, ut fiat $\Delta \alpha = \frac{1}{\alpha}$, ideoque $\Delta = \frac{1}{\alpha\alpha}$, ſicque erit coëfficiens quaeſitus

$$(\overset{n}{B}C) = \frac{n(2n-\beta-\gamma)}{\alpha\alpha} = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}.$$

§. 23. Hinc ergo pro ſecundo ordine termini formae BC erunt $(\overset{n}{B}C) = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}$, hincque

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot 2BC + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\delta}{2\alpha} \cdot 2BD$$
$$+ \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot 2CD + \text{etc.}$$

quibus ſi adiungantur termini formae B^2 modo ante inventi, totus ordo ſecundus iam eſt abſolutus.

Inveſtigatio
Terminorum tertii ordinis.

§. 24. Prima forma in hoc ordine occurrens eſt B^3, pro cuius coëfficiente ſupra nacti ſumus hanc aequationem:

B)

$$(\overset{n}{B^3}) - (\overset{n-\alpha}{B^3}) = (\overset{n-\beta}{B^2}).$$

Cum igitur modo invenerimus

$$(\overset{n}{B^2}) = \frac{n(n+\alpha-2\beta)}{\alpha \cdot 2\alpha}, \text{ erit hic}$$

$$(\overset{n-\beta}{B^2}) = \Pi = \frac{n-\beta}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}.$$

Hinc in Lemmate praemiſſo ſumamus $i = 2$, ut inde fiat

$$\Pi = \Delta\,\alpha\,(n'+2n)(n'+\alpha).$$

Vt igitur poſteriores factores evadant aequales, ſtatui debet $n' = n - 3\beta$, quo factore communi ſublato relinquetur haec aequatio:

$$\Delta\,\alpha\,(n'+2n) = \Delta\,\alpha\,(3n-3\beta) = \frac{n-\beta}{2\alpha^2}.$$

Hic igiter commode diviſio per $n-\beta$ ſuccedit, ita ut hinc fiat $\Delta = \frac{1}{6\alpha^3}$, ſicque coëfficiens quaeſitus erit

$$(\overset{n}{B^3}) = \frac{n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha};$$

unde per ſe patet termini C^3 coëfficientem fore

$$(\overset{n}{C^3}) = \frac{n(n+\alpha-3\gamma)(n+2\alpha-3\gamma)}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha}.$$

§. 25. Secunda forma huius ordinis erit B^2C, pro cuius coëfficiente ſupra reperimus hanc aequationem:

$$(\overset{n}{B^2C}) - (\overset{n-\alpha}{B^2C}) = (\overset{n-\gamma}{B^2}) + (\overset{n-\beta}{BC}) = \Pi,$$

ergo ex valoribus iam inventis derivamus iſtas duas partes:

$$(\overset{n-\gamma}{B^2}) = \frac{(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha \cdot 2\alpha};$$

deinde

$$(\overset{n-\beta}{B\,C}) = \frac{2(n-\beta)(n+\ldots-2\beta-\gamma)}{\ldots 2\alpha},$$

ubi evidens eſt poſteriores factores aequales inter ſe prodire debuiſſe; unde ex additione orietur

$$\Pi = \frac{(3n-2\beta-\gamma)(n+\ldots-2\beta-\gamma)}{\ldots 2\alpha}.$$

In Lemmate igitur noſtro ſumi debet $i = 2$, indeque fiet

$$\Pi = \Delta\,\alpha\,(n'+2n)(n'+\alpha);$$

quare, ut poſteriores factores congruant, ſumi debet $n' = n - 2\beta - \gamma$, quibus ſublatis remanebit haec aequatio:

$$\frac{3n-2\beta-\gamma}{2\alpha} = \Delta\,\alpha\,(3n-2\beta-\gamma),$$

ubi iterum diviſio per $3n-2\beta-\gamma$ ſuccedit, ita ut hinc $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$, conſequenter coëfficiens quaeſitus erit

$$(\overset{\ldots}{B^2 C}) = \frac{[illegible](\ldots-2\beta-\gamma)(n+2\ldots-2\beta-\gamma)}{\ldots 2\alpha\alpha},$$

ſive hoc modo

$$\frac{1}{3}(B^2 C) = \frac{n(n+\ldots-2\beta-\gamma)(n+2\ldots-2\beta-\gamma)}{\ldots 2\ldots 3\alpha}.$$

§. 26. Tertia denique forma huius ordinis eſt BCD, pro cuius coëfficiente ſupra data eſt haec aequatio:

$$(B\,C\,D) - (\overset{r}{B\,C\,D}) = (\overset{n-\beta}{C\,D}) + (\overset{n-\gamma}{B\,D}) + (\overset{n-\delta}{B\,C}) = \Pi,$$

ita ut hic Π componatur ex tribus partibus, quae ad praeſentes indices reducendae erunt.

1°. $(\overset{[illegible]}{C\,D}) = [illegible]$

2°. $(\overset{n-\gamma}{B\,D}) = [illegible]$

3°. $(\overset{[illegible]}{B\,C}) = [illegible]$

ubi

ubi evidens eſt poſteriores factores neceſſario inter ſe aequales prodire debuiſſe, ſicque his iunctis erit

$$\Pi = \frac{2(3n - \beta - \gamma - \delta)(n + \alpha - \beta - \gamma - \delta)}{\alpha . 2\alpha}.$$

In noſtro igitur Lemmate ſumi oportet $i = 2$, ut inde prodeat $\Pi = \Delta\,\alpha(n + 2n(n' + \alpha)$; ubi manifeſto ſumi debet $n' = n - \beta - \gamma - \delta$; ſicque etiam priores factores tolli poterunt, hincque concludetur fore $\Delta = \frac{1}{\alpha^3}$, conſequenter coëfficiens quaeſitus producti B C D erit

$$(\mathrm{B}\overset{n}{\mathrm{C}}\mathrm{D}) = \frac{6n(n - \alpha - \beta - \gamma - \delta)(n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta)}{\alpha . 2\alpha . 3\alpha},$$

Inveſtigatio
Terminorum quarti ordinis.

§. 27. Prima forma in hoc ordine occurrens, quando ſcilicet omnes quatuor factores ſunt inter ſe aequales, eſt B^4, pro cuius coëfficiente ſupra haec aequatio eſt data:

$$(\overset{n}{B^4}) - (\overset{n-\alpha}{B^4}) = (\overset{n-\beta}{B^3}) = \Pi.$$

Cum igitur modo invenerimus

$$(\overset{n}{B^3}) = \frac{n}{\alpha} . \frac{n + \alpha - 3\beta}{2\alpha} . \frac{n + 2\alpha - 3\beta}{3\alpha}, \text{ erit}$$

$$(\overset{n-\beta}{B^3}) = \frac{n - \beta}{\alpha} . \frac{n + \alpha - 4\beta}{2\alpha} . \frac{n + 2\alpha - 4\beta}{3\alpha} = \Pi.$$

Quia hic habentur tres factores, in Lemmate praemiſſo ſumi debet $i = 3$, indeque orietur

$$\Pi = \Delta\,\alpha(n' + 3n)(n' + \alpha)(n' + 2\alpha);$$

ubi bini poſteriores factores ſponte ſe tollunt, ponendo $n' = n - 4\beta$; tum autem relinquetur haec aequatio: $\frac{n - \beta}{6\alpha^3} =$

4 Δ

$4\Delta\alpha(n-\beta)$, unde ſit $\Delta = \frac{1}{24\alpha^4}$, ſicque coëfficiens quaeſitus pro forma B^4 erit

$$(\overset{n}{B^4}) = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}.$$

§. 28. Secunda forma hic occurrens eſt B^3C, pro cuius coëfficiente ſupra dedimus hanc aequationem:

$$(\overset{n}{B^3C}) - (\overset{n-\gamma}{B^3C}) = (\overset{n-\gamma}{B^3}) + (\overset{n-\beta}{B^2C}) = II.$$

Colligantur ergo ex formis ſupra inventis hae duae partes, ac reperietur

$$(\overset{n-\gamma}{B^3}) = \frac{n-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}$$

$$(\overset{n-\beta}{B^2C}) = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha};$$

vnde oritur

$$II = \frac{4n-3\beta-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}.$$

In Lemmate ergo pro hoc caſu ſumi debet $i = 3$, ut prodeat inde

$$II = \Delta\alpha(n'+3\alpha)(n'+\alpha)(n'+2\alpha),$$

ubi ſtatim patet ſumi debere $n' = n-3\beta-\gamma$, hocque modo omnes factores litteram n involventes ſe tolli patiantur, quo facto reperietur $\Delta = \frac{1}{6\alpha^4}$, conſequenter formae B^3C coëfficiens quaeſitus erit

$$(\overset{n}{B^3C}) = \frac{4n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-3\beta-\gamma}{4\alpha}.$$

§. 29. Tertia forma in hoc ordine eſt B^2C^2, pro cuius coëfficiente ſupra data eſt haec aequatio:

(B^2

$$\overset{n}{(B^2C^3)} - \overset{n-\alpha}{(B^2C^2)} = \overset{n-\gamma}{(B^2C)} + \overset{n-\beta}{(BC^2)} = \Pi.$$

Hic vero erit primo

$$\overset{n-\gamma}{(B^2C)} = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha}$$

$$\overset{n-\beta}{(BC^2)} = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha},$$

unde ſit

$$\Pi = \frac{2n-\beta-\gamma}{2\alpha^3} \cdot (n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma).$$

Quare ſi in Lemmate ſumamus $i = 3$, quoque ut ante eſſe debet

$$\Pi = \Delta\,\alpha\,(n' + 3\,n)\,(n' + \alpha)\,(n' + 2\,\alpha),$$

ubi manifeſto ſumi debet $n' = n - 2\beta - 2\gamma$, quo facto reperitur $\Delta = \frac{1}{4\alpha^4}$, ſicque huius formae B^2C^2 coëfficiens quaeſitus erit

$$\overset{n}{(B^2C^2)} = \frac{6n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-2\beta-2\gamma}{4\alpha}.$$

§. 30. Quarta forma ad hunc ordinem referenda eſt B^2CD, pro cuius coëfficiente ex principiis ſupra ſtabilitis haec aequatio ſtatui debet:

$$\overset{n}{(B^2CD)} - \overset{n-\alpha}{(B^2CD)} = \overset{n-\delta}{(B^2C)} + \overset{n-\gamma}{(B^2D)} + \overset{n-\beta}{(BCD)} = \Pi,$$

ſicque Π conſtat ex tribus partibus

$$\overset{n-\delta}{(B^2C)} = \frac{3(n-\delta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}$$

$$\overset{n-\gamma}{(B^2D)} = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}$$

$$\overset{n-\beta}{(BCD)} = \frac{6(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}$$

qui-

quibus ergo collectis fit

$$\Pi = \frac{4n-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}(n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta)(n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta)$$

cui ex Lemmate haec expreſſio:

$$\Delta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha)$$

reddi debet aequalis, quod egregie ſuccedet ſumendo $n' = n - 2\beta - \gamma - \delta$; hinc enim colligetur $\Delta = \frac{1}{2\alpha^3}$, conſequenter huius formae B^2CD coëfficiens debitus ita exprimetur:

$$(\overset{n}{B^2CD}) = \frac{12n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{4\alpha}.$$

§. 31. Poſtrema forma huius ordinis eſt BCDE, pro cuius coëfficiente habetur haec aequatio:

$$(BC\overset{n}{D}E) - (BC\overset{n-\alpha}{D}E) = (BC\overset{n-\varepsilon}{D}) + (BC\overset{n-\delta}{E}) + (BD\overset{n-\gamma}{E}) + (CD\overset{n-\beta}{E}).$$

Has igitur quatuor partes hic evolvamus

$$(BC\overset{n-\varepsilon}{D}) = \frac{6(n-\varepsilon)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}$$

$$(\overset{n-\delta}{BCE}) = \frac{6(n-\delta)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}$$

$$(\overset{n-\gamma}{BDE}) = \frac{6(n-\gamma)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}$$

$$(\overset{n-\beta}{CDE}) = \frac{6(n-\beta)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}$$

His igitur in unam ſummam collectis erit

$$\Pi = \frac{4n-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{\alpha}(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)(n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon).$$

Quare ut Lemmatis forma pro Π data huic evadat aequalis manifeſto ſumi debet $n' = n - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon$, unde fit $\Delta = \frac{1}{24\alpha^4}$, ſicque iſtius formae BCDE coëfficiens erit

$$(BC\overset{n}{D}E) = \frac{24n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{4\alpha}$$

Con-

Concluſio generalis.

§. 32. Lex qua iſtae expreſſiones ulterius progrediuntur, iam ita eſt manifeſta, ut ſuperfluum foret has operationes ulterius continuare, id quod unico exemplo illuſtraſſe ſufficiet. Sit igitur propoſita haec forma ordinis noni $B^4 . C^3 . D^2$, cuius coëfficiens naturalis ex lege combinationis ortus eſt, ut conſtat,

$$N = \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots 9}{1 . 2 . 3 . 4 \times 1 . 2 . 3 \times 1 . 2}.$$

Iam ſi brevitatis gratia ponamus $4\beta + 3\gamma + 2\delta = \lambda$, coëfficiens huius formae pro noſtro inſtituto erit

$$(B^4 \overset{n}{C^3} D^2 = N . \frac{n}{\alpha} . \frac{n+\alpha-\lambda}{2\alpha} . \frac{n+2\alpha-\lambda}{3\alpha} . \frac{n+3\alpha-\lambda}{4\alpha} . \frac{n+4\alpha-\lambda}{5\alpha} \ldots\ldots \frac{n+8\alpha-\lambda}{9\alpha}$$

ubi ſi loco N valorem modo datum ſubſtituamus, nanciſcemur

$$(B^4 \overset{n}{C^3} D^2) = \frac{1}{\alpha^9} \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda) \ldots\ldots (n+8\alpha-\lambda)}{1 . 2 . 3 . 4 . \times 1 . 2 . 3 . \times 1 . 2 .}.$$

§. 33. Hinc iam in genere pro producto $B^b . C^c . D^d . E^e$. etc. eundem coëfficientem reperimus, quem iam olim in Tomo Comentar. XV. ex longe aliis principiis elicueram; ſcilicet, ſi ſumma omnium exponentium $b + c + d + e +$ etct. $= i$, quo numero ordo, ad quem hoc productum eſt referendum, indicatur; tum vero ſtatuatur

$$b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.} = \lambda,$$

coëfficiens iſtius producti ita exprimetur:

$$\frac{1}{\alpha^i} . \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda)(n+3\alpha-\lambda) \ldots\ldots\ldots [n+(i-1)\alpha-\lambda]}{1 . 2 . 3 \ldots b \times 1 . 2 . 3 \ldots c \times 1 . 2 . 3 \ldots d \times 1 . 2 . 3 \ldots e \times \text{etc.}}.$$

§. 34. Quod ſi ergo omnia poſſibilia producta litterarum B, C, D, E, etc. cum his coëfficientibus coniuncta

in unam ſummam colligantur, eique unitas praefigatur, habetur valor poteſtatis indefinitae x^{ν}, qui convenit huic aequationi algebraicae:

$$1 = \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{B}{x^{\beta}} + \frac{C}{x^{\gamma}} + \frac{D}{x^{\delta}} + \frac{E}{x^{\varepsilon}} + \text{etc.}$$

§. 35. In hac aequatione omnes numeratores litteris diverſis B, C, D, E, etc. deſignavimus, propterea quod ad diverſas poteſtates ipſius x referuntur. Vnde intelligitur, etiamſi forte eſſet $C = D$, tamen producti quod eſſet B coëfficientem neutiquam ex forma $(\overset{n}{B}B)$, ſed perpetuo ex forma $(\overset{n}{B}C)$ repeti debere.

§. 36. Quoniam ope huius methodi valorem cuiuscunque poteſtatis indefinitae x^{n} formavimus, nil certe facilius eſt, quam hinc ipſam aequationis propoſitae radicem x determinare, ponendo ſcilicet $n = 1$. Vnde hoc inſigne Paradoxon ſe offert, quod eadem methodus nullum plane uſum praeſtatura fuiſſet, ſi eius ope ipſam radicem x elicere voluiſſemus, propterea quod vis iſtius methodi in eo ipſo eſt conſtituenda, quod poteſtatem plane indefinitam x^{n} iam ſtatim ab initio ſimus contemplati, unde omnium aliarum poteſtatum $x^{n-\alpha}$, $x^{n-\beta}$, $x^{n-\gamma}$, etc. valores exprimere licuit. Ceterum alia inſignia Phaenomena, quae ſeries hoc modo formatae offerunt, hic non commemoranda cenſeo, cum hoc argumentum iam alibi fuſius ſim proſecutus, hoc vero loco mihi potiſſimum fuerit propoſitum methodum directam in medium afferre, tales ſeries ſatis expedite inveniendi.

DE

DE CORPORIBVS CYLINDRICIS INCVRVATIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conv. Acad. exhib. die 21 Sept. 1778.

§. 1.

Quemadmodum cylindrus rectus generatur, ſi centrum circuli ita ſecundum lineam rectam promovetur, ut interea planum circuli perpetuo ad iſtam rectam perpendiculare conſervetur: ita ſi centrum circuli ſecundum lineam curvam quamcunque ita promoveatur, ut planum circuli in ſingulis punctis ad tangentem curvae ſitum teneat perpendicularem, hoc modo generabitur cylindrus incurvatus, cuius ſcilicet axis erit linea curva atque omnes ſectiones ad hunc axem normaliter factae erunt circuli circulo genitori aequales.

§. 2. Contemplemur nunc aequationem inter ternas coordinatas, qua natura talium cylindrorum incurvatorum more ſolito exprimi poterit. Hunc in finem referat curva A U, utcunque ſuper plano tabulae deſcripta, viam, qua centrum circuli procedit, pro qua vocemus coordinatas $AT = t$ et $TU = u$, ſitque $\partial u = s\, \partial t$; atque ducta ad curvam normali Tab. I. Fig. 1.

 UN

U N, erit ſubnormalis $TN = \frac{u\partial u}{\partial t} = su$ et ipſa normalis $UN = u\surd(1+ss)$. Haec igitur normalis producta dabit interſectionem circuli genitoris, dum eius centrum per punctum U tranſit, ipſe vero circulus plano tabulae perpendiculariter inſiſtere eſt concipiendus.

§. 3. Sit nunc Z punctum quodcunque in peripheria iſtius circuli, quod ergo ſimul reperietur in ſuperficie corporis, quod hic conſideramus; unde ſi ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, tum vero ab Y ad rectam fixam A B normalis Y X, habebuntur ternae coordinatae, quas vocemus $AX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, inter quas aequatio quaeri debet naturam ſuperficiei genitae exprimens, quae ergo quemadmodum ex indole curvae directricis A U deduci queat, videamus.

§. 4. Vocetur igitur radius circuli genitoris $= a$, et cum ſit intervallum $UZ = a$ et $YZ = z$, erit recta $UY = \surd(aa - zz)$. Iam ducta ex U ad Y X normali U S, ex ſimilitudine triangulorum U S Y et N T U colligemus

$$US = \frac{s\surd(aa-zz)}{\surd(1+ss)} = TX \text{ et } SY = \frac{\surd(aa-zz)}{\surd(1+ss)},$$

hinc ergo nanciſcimur coordinatas

$$AX = x = t - \frac{s\surd(aa-zz)}{\surd(1+ss)} \text{ et}$$

$$XY = y = u + \frac{\surd(aa-zz)}{\surd(1+ss)};$$

unde ſi eliminentur binae quantitates variabiles t et u, una cum littera s inde pendente, reperietur aequatio inter x, y et z, qua natura ſuperficiei deſcriptae exprimetur.

§. 5.

§. 5. Veluti ſi curva A U etiam fuerit circulus, hac aequatione expreſſus: $uu = 2bt - tt$, ob $\partial u = \frac{b\partial t - t\partial t}{\sqrt{(2bt - tt)}}$, erit

$$s = \frac{b-t}{\sqrt{(2bt-tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+ss)} = \frac{b}{\sqrt{(2bt-tt)}},$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus

$$x = +t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b} \text{ et}$$

$$y = \sqrt{(2bt-tt)} + \frac{\sqrt{(aa-zz)(2bt-tt)}}{b},$$

unde eliminando z erit

$$x\sqrt{(2bt-tt)} + y(b-t) = b\sqrt{(2bt-tt)}.$$

Hinc iam haud difficulter elicitur t; multo autem promptius ex priore aequatione

$$x = t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b}: \text{ erit enim}$$

$$t = + \frac{bx + b\sqrt{(aa-zz)}}{b+\sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex altera vero aequatione elicitur

$$\sqrt{(2bt-tt)} = \frac{by}{b+\sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex priori formula colligitur $b - t = \frac{b(b-x)}{b+\sqrt{(aa-zz)}}$; hincque iam penitus expelletur littera t quadratis addendis, ſcilicet

$$(b-t)^2 + (\sqrt{2bt-tt})^2 = bb = \frac{bb[yy+(b-x)^2]}{b+\sqrt{(aa-zz)^2}}, \text{ ſive}$$

$$(b-x)^2 + yy = bb + 2b\sqrt{(aa-zz)} + aa - zz,$$

quae aequatio ad rationalitatem perducta praebet

$$(xx+yy+zz-2bx-aa)^2 = 4bb(aa-zz),$$

quae ergo ad quartum gradum exſurgit.

§. 6. Maxime autem moleſtum, atque adeo ſuperfluum foret, pro quavis curva A U talem aequationem rationalem elicere, cum omnia ſymtomata huiusmodi cylindrorum in-

incurvatorum facillime ex ipſis formulis principalibus

$$x = t - \frac{s\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1 + ss)}} \text{ et } y = u + \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1 + ss)}},$$

derivari queant, quemadmodum non ita pridem oſtendi, cum omnes ſuperficies inveſtigaſſem, in quibus omnes normales ad datum planum productae ſint inter ſe aequales. Evidens enim eſt omnes cylindros incurvatos huic quaeſtioni ſatisfacere, dum omnes normales ad eorum ſuperficiem ductae ſunt radio circuli genitoris aequales.

§. 7. Nunc autem iſtam ideam multo latius extendamus et loco circuli ſubſtituamus aliam curvam quamcunque IZG, cuius punctum fixum I ſimili modo ſecundum datam illam curvam AU continuo ita promoveatur, ut planum figurae IYZ perpetuo tangenti huius curvae in U normaliter inſiſtat. Verum hoc ad motus determinationem nondum ſufficit, ſed inſuper ſtatui oportet, ut iſtius figurae axis IF perpetuo in plano tabulae conſervetur. Quodſi ergo iſtam figuram loco circuli iuxta curvam datam AU promoveri concipiamus, ubi ad punctum U fuerit perventum, ibi ſimul punctum I reperietur, et recta IF incidet in ipſam normalem ſupra definitam UY. Et cum applicata iſtius figurae YZ iam praebeat tertiam noſtram coordinatam z, ponamus eius abſciſſam IY $= r$, exiſtente YZ $= z$, ita ut pro hac figura IFG aequatio inter r et z tanquam cognita ſit ſpectanda.

Tab. I. Fig. 2.

Fig. 1.

§. 8. Cum igitur iſta figura ſuper curva AU in ſitum UYZ fuerit translata, ita ut punctum Z in ſuperficie deſcripta reperiatur, cuius ſitum per ternas coordinatas AX $= x$; XY $= y$ et YZ $= z$ definiri oporteat, propter in-

intervallum UY $= v$ binae coordinatae x et y ſequenti modo exprimentur:

$$x = t - \frac{s v}{\surd (1 + s s)} \text{ et } y = u + \frac{v}{\surd (1 + s s)},$$

hoc ergo modo corpus generabitur ad axem curvilineum AU referendum cuius omnes ſectiones ad iſtum axem normaliter factae ipſi figurae aſſumtae IFG futurae ſint ſimiles et aequales. Omnia igitur corpora hac ratione genita tanquam cylindrica incurvata ſpectare licebit.

§. 9. Plures inſignes proprietates huiusmodi corporum ſponte ſe offerunt ex ipſa generatione. Veluti ſi quaerantur normales in ſingulis punctis ad has ſuperficies ductae, evidens eſt normalem in figura IFG ad punctum Z ductam ſimul eſſe normalem ad ſuperficiem genitam; tum vero etiam tangentes illius figurae quoque ipſam ſuperficiem tangent. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, quod tam ſoliditas horum corporum, quam eorum ſuperficies per notiſſimam regulam Guldini facillime aſſignari queant, dum ſcilicet pro ſoliditate area figurae IFG, pro ſuperficie vero arcu curvae IZG per viam a centro gravitatis deſcriptam multiplicatur. Quoniam enim in hac generatione directio motus perpetuo eſt ad planum figurae deſcribentis normalis, regula Guldini ſine errore adhiberi poteſt.

§. 10. Quodſi autem hinc ex ternis coordinatis x, y et z immediate ſive ſoliditatem ſive ſuperficiem definire voluerimus, in calculos plane inextricabiles illaberemur, unde nihil plane concludere liceret. Cum enim formula integralis duplicata pro ſoliditate ſit $\int\int z\,\partial x\,\partial y$, ſi in ea loco ∂x et ∂y valores ſubſtituantur, evidens eſt nullum

lum plane ſucceſſum inde ſperari poſſe. Multo minus pro ſuperficie exſpectare licebit, quae poſito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$ hac formula integrali duplicata exprimitur:

$$\int\int \partial x\,\partial y\,\sqrt{(1 + pp + qq)}.$$

§. 11. Interim tamen totum hoc negotium ſequenti modo facillime expedire licebit: Cum pro curva A U detur aequatio inter t et u, ducta normali U N vocetur an-
Tab. I. gulus A N U $= \Phi$, eritque $s = \cot.\Phi$, unde formulae pro x
Fig. 3. et y erunt: $x = t - r\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = u + v\,\text{ſin.}\,\Phi$. At vero iſta normalis U N producatur usque ad centrum circuli osculatoris O, ita ut recta U O ſit radius oſculi, quem vocemus $= r$, et cum ſit angulus A $n\,u = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus ad O $= \partial\Phi$. Quodſi ergo elementum curvae U u ponamus $= \partial w$, ut ſit $\partial w = \partial t\sqrt{(1 + ss)} = \frac{\partial t}{\text{ſin.}\,\Phi}$, vel etiam $\partial w = \frac{\partial u}{\text{coſ.}\,\Phi}$ erit $r = \frac{\partial w}{\partial \Phi}$.

§. 12. Conſideremus nunc ſeorſim elementum cur-
Tab. I. vae U $u = \partial w$ et producantur radii oſculi O U et O u
Fig. 4. in Y et y, ita ut ſit U Y $= u\,y = v$, et perpendicula Y Z $= y\,z = z$. Hic ſcilicet repraeſentatur promotio figurae mobilis U Y Z in ſitum proximum $u\,y\,z$, qua punctum Y transfertur in y per ſpatiolum Y $y = \partial w + v\,\partial\Phi$, quod ſimul exprimit translationem puncti Z in z, ita ut ſit Z z $= \partial w + v\,\partial\Phi$.

§. 13. His praeparatis inveſtigemus primo ſoliditatem corporis hoc modo geniti, cuius elementum, dum figura ex U in u promovetur, reperitur, ſi puncta Y et y in figura mobili promoveantur per ſpatiola Y Y′ $= y\,y' = \partial v$, a quo ele-

elementum priſmaticum, cuius baſis eſt

$$YyYy' = \partial v(\partial w + v\partial\Phi),$$

et altitudo $YZ = z$, erit $= z\partial v(\partial w + v\partial\Phi)$, cuius integrale, ex ſola variabilitate ipſius v, dabit elementum ſoliditatis quod quaeritur et quod baſi $UuYy$ inſiſtit, cuius ergo valor erit $= \partial w\int z\partial v + \partial\Phi\int zv\partial v$, quae integralia a puncto U usque ad terminum figurae extendi debent. Hic autem evidens eſt formulam $\int z\partial v$ exprimere aream figurae mobilis VYZ, alteram vero formulam $\int zv\partial v$ exprimere momentum eiusdem areae reſpectu puncti U.

§. 14. Quo haec clariora evadant, conſideremus ipſam figuram mobilem UYZ ſeorſim, cuius centrum gravitatis ſit in G, ex quo ad UY demittatur perpendiculum GH, voceturque intervallum $UH = h$, tota autem area figurae deſcribentis vocetur $= H$, ita ut ſit $H = \int z\partial v$ et $h = \frac{\int vz\partial v}{\int z\partial v}$. His igitur valoribus ſubſtitutis totum incrementum ſoliditatis, dum figura per ſpatiolum Uu promovetur, erit $= H\partial w + Hh\partial\Phi = H(\partial w + h\partial\Phi)$; ubi evidens eſt formulam $\partial w + h\partial\Phi$ exprimere ſpatiolum, per quod interea punctum H promovetur; ſicque incrementum ſoliditatis reperitur, ſi area figurae mobilis, ſcilicet H, ducatur in viam, per quam interea centrum gravitatis figurae promovetur. Tab. I. Fig. 5.

§. 15. Quoniam igitur area figurae per totum motum manet eadem, ſoliditas totius corporis hoc modo geniti facillime determinatur, dum area figurae deſcribentis per viam ab eius centro gravitatis deſcriptam multiplicetur; in quo ipſo continetur regula iam olim a Guldino in medium

 alla-

allata. Poſtmodum autem obſervatum fuit, iſtam regulam tuto adhiberi non poſſe, niſi quovis momento directio motus ad planum figurae fuerit normalis, quemadmodum in caſu quem tractamus manifeſto uſu venit.

§. 16. Dum autem figurae punctum U per lineam curvam A U ita promovetur, uti eſt praeceptum, punctum H, ſive centrum gravitatis figurae, curvam iſti parallelam percurret, quae ex illa formabitur, dum ſingulae normales O U per intervallum U H $= h$ producuntur. Talis ergo linea curva G H cum ipſa curva A U communem habebit evolutam, propterea quod ubique punctis U et H idem centrum circuli oſculatoris O reſpondet. Tum vero etiam ex ipſo elemento, per quod punctum H promoveri vidimus, quod erit $\partial w + h \partial \Phi$, cognoſcimus longitudinem iſtius curvae G H $= w + h \Phi$, ſcilicet ſemper aequatur ipſi curvae A U $=$ W, una cum arcu circuli radio h deſcripti, angulo Φ conveniente, exiſtente hoc angulo Φ amplitudine curvae propoſitae.

Tab. I. Fig. 6.

§. 17. Simili modo ſuperficies corporis hoc motu geniti inveniri poterit, quippe cuius incrementum oritur, dum arcus figurae deſcribentis (Fig. 4.) U Z in ſitum proximum $u z$ promovetur. Hunc in finem ſtatuamus ipſam longitudinem curvae deſcribentis U Z $= q$, ut ſit eius elementum $Z Z' = \partial q$, quod cum transferatur in $z z'$ per ſpatiolum $Zz = \partial w - v \partial \Phi$, iſta areola erit $= Z z Z z' = \partial q (\partial w - v \partial \Phi)$, cuius integrale dabit incrementum totius ſuperficiei, quam quaerimus, ſicque hoc incrementum erit $= q \partial w + \partial \Phi \int v \partial q$, ubi

ubi integralia per totam figuram deſcribendam ſunt extendenda.

§. 18. Quemadmodum igitur in figura (Fig. 5.) U Y Z littera q exprimit longitudinem arcus U Z, ita formula $\int v\,\partial q$ exprimet momentum huius arcus reſpectu puncti U. Quare ſi iam centrum gravitatis in G ſtatuamus, hincque in axem U Y perpendiculum G H demittamus, poſito intervallo G H $= h$ erit $h = \frac{\int v\,\partial q}{q}$, ideoque incrementum ſuperficiei quaeſitum erit $= q\,(\partial w + h\,\partial \Phi)$; ubi evidens eſt formulam $\partial w + h\,\partial \Phi$ exprimere promotionem centri gravitatis momentaneam.

§. 19. Cum igitur q referat totum arcum curvae deſcribentis, quia perpetuo eiusdem manet quantitatis, per integrationem repetitam colligitur tota ſuperficies hoc motu genita $= q\,(w + h\,\Phi)$, ubi $w + h\,\Phi$ manifeſto eſt tota via a centro gravitatis arcus percurſa, id quod iterum egregie cum regula Guldini convenit.

§. 20. Hactenus quidem aſſumſimus totam curvam A U, per quam figura promovetur, in eodem plano eſſe conſtitutam; verum omnia, quae tam de ſoliditate quam ſuperficie determinavimus, pariter valent, etiamſi curva directrix A U non in eodem plano verſetur, ſed per ternas coordinatas A T $= t$; T U $= u$ et U V $= v$ definiri debeat, ſi modo Tab. I.
debita circumſpectio adhibeatur, ut axis figurae, qui erat Fig. 7.
U Y rite quovis momento diſponatur, quod facile fieri poterit, ſi ad illud planum attendamus, in quo bina elementa proxima huius curvae ſunt diſpoſita: in hoc enim plano perpetuo axis figurae mobilis dirigi debebit; tum autem mani-

nifeſtum eſt totum negotium abſolvi poſſe ut ante, ſicque iterum regula Guldini cum optimo ſucceſſu adhiberi poterit.

§. 21. Neque vero hoc modo promotio figurae penitus determinatur: in locis enim, ubi via centri gravitatis nullam habet curvaturam, poſitio baſis figurae prorſus non determinatur. Hic igitur in ſubſidium vocari oportet quae in Mechanica de motu progreſſivo et gyratorio tradi ſolent; quomodocunque ſcilicet corpus quodpiam agitatur, eius motus ſemper reſolvi poteſt in motum progreſſivum centri gravitatis et motum gyratorium circa quempiam axem per ipſum centrum gravitatis tranſeuntem.

§. 22. Hoc igitur notato, in noſtro caſu, quo figura plana promoveri concipitur, motus centri gravitatis ſemper ita debet eſſe comparatus, ut eius directio perpetuo ad planum figurae ſit normalis; praeterea vero motus gyratorius quovis momento fieri debet circa axem per centrum gravitatis tranſeuntem, qui ſimul in ipſo plano figurae ſit ſitus. Hoc enim modo evidens eſt non ſolum directionem motus centri gravitatis ſed etiam omnium figurae punctorum quovis momento ad ipſum planum figurae fore normalem; quae conditio omnino eſt neceſſaria, ut ſive ſoliditas corporis hoc motu geniti, ſive eius ſuperficies ſecundum regulam Guldini, per productum ex ipſa figura in viam a centro gravitatis percurſam rite definiri queat.

INVE-

INVESTIGATIO TRIANGVLI IN QVO DISTANTIAE ANGVLORVM AB EIVS CENTRO GRAVITATIS RATIONALITER EXPRIMANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 17 Dec. 1778.

§. 1.

Cum centrum gravitatis trianguli reperiatur in interſectione ternarum rectarum A F, B G et C H, quae ex ſingulis angulis ductae latera oppoſita biſecant; illud erit in puncto O ubi illae tres rectae ita ſe ſecant. ut ſit $AO = \frac{2}{3}AF$, $BO = \frac{2}{3}BG$ et $CO = \frac{2}{3}CH$. Quoniam igitur requiritur ut diſtantiae A O, B O et C O rationaliter exprimantur; hoc eveniet, ſi totae rectae A F B G et C H fuerint rationales, ſiquidem latera trianguli per numeros rationales repraeſententur. Tab. I. Fig. 8.

§. 2. Ponamus igitur $BF = CF = a$; $CG = AG = b$; $AH = BH = c$; praeterea vero vocemus $AF = f$; $BG = g$ et $CH = h$, ac perpendamus quomodo iſtae tres lineae

f

f, g, h per illas a, b, c exprimantur. Hunc in finem vocemus angulum $AFB = \omega$, et ex triangulo ABF habebimus hanc aequalitatem

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2\,AF \,.\, BF \cos. \omega,$$

at ex triangulo ACF habebimus

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 + 2\,AF \,.\, CF \cos. \omega,$$

quae duae aequalitates additae praebent

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AF^2 + 2\,BF^2$$

ſive $4cc + 4bb = 2ff + 2aa$, unde colligitur $ff = 2cc + 2bb - aa$. Simili modo erit

$$gg = 2aa + 2cc - bb \text{ et } hh = 2aa + 2bb - cc;$$

quocirca pro litteris a, b, c, eiusmodi numeros quaeri oportet, vt iſtae tres formulae reddantur numeri quadrati.

§. 3. Antequam hanc inveſtigationem ſuſcipiamus, conſideremus caſum maxime memorabilem, quo $bb + cc = 2aa$; tum enim erit $ff = 3aa$, ſive $f = a\sqrt{3}$, tum vero $gg = 3cc$, ſive $g = c\sqrt{3}$; et $hh = 3bb$, ſive $h = b\sqrt{3}$, quae eſt inſignis proprietas huiusmodi triangulorum, in quibus $2aa = bb + cc$.

§. 4. Praeterea in genere obſervemus eſſe

$$ff + gg + hh = 3(aa + bb + cc).$$

Cum igitur ſit $AO = \frac{2}{3} f$, multiplicando per $\frac{4}{9}$ erit

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = \tfrac{4}{3}(aa + bb + cc),$$

ſicque patet ſemper eſſe

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = \tfrac{1}{3}(BC^2 + AC^2 + AB^2),$$

quae proprietas eſt etiam maxime notatu digna.

§. 5.

§. 5. Videamus nunc quemadmodum formulae inventae ad quadrata revocari queant, ac ſi incipiamus a prima $ff = 2cc + 2bb - aa$, non tam facile patet, quomodo quadratum obtineri queat; at ſi ſub hac ſpecie repraeſentetur: $ff = (b+c)^2 + (b-c)^2 - aa$, tum ſecundum praecepta Analyſeos ſtatui poterit $f = b + c + \frac{p}{q}(b - c + a)$, qua ſubſtitutione facta habebimus

$$(b+c)^2 + \frac{2p}{q}(b+c)(b-c+a) + \frac{pp}{qq}(b-c+a)^2$$
$$= (b+c)^2 + (b-c)^2 - aa$$

vbi ſublatis membris prioribus, poſterioribus vero per factorem communem $b - c + a$ diviſis orietur

$$\frac{2p}{q}(b+c) + \frac{pp}{qq}(b-c+a) = b - c - a,$$

unde commode definitur

$$a = \frac{(b-c)(qq-pp) - 2pq(b+c)}{pp+qq}.$$

Quodſi ergo litterae a iſte valor tribuatur, littera quidem f rationaliter exprimetur: erit enim

$$f = \frac{(b+c)(qq-pp) + 2pq(b-c)}{pp+qq};$$

at ſi iſtum valorem ipſius a in binis reliquis formulis ſubſtituere vellemus, in calculos nimis complicatos, ac propemodum inextricabiles, delaberemur; quam ob rem alio modo ſolutionem tentare convenit.

§. 6. Iunctim contemplemur binas poſteriores conditiones, quae ſunt

$$gg = 2aa + 2cc - bb \text{ et } hh = 2aa + 2bb - cc,$$

quarum differentia dat $gg - hh = 3(cc - bb)$; unde cum omnia in numeris integris deſiderentur, ſi $cc - bb$ alios

alios ſactores non haberet, praeter $c + b$ et $c - b$, ſtatui deberet $g + h = 3(c + b)$ et $g - h = c - b$, vel $g + h = c + b$ et $g - h = 3(c - b)$. Verum ex illa poſitione ſequeretur $g = 2c + b$ et $h = c + 2b$; ex poſteriore vero $g = 2c - b$ et $h = 2b - c$. Hae autem binae determinationes inter ſe conveniunt; nam quia in formulis principalibus tantum quadrata bb et cc occurrunt, perinde eſt, ſive litterae b et c poſitive ſive negative accipiantur.

§. 7. Quodſi vero loco $g = 2c + b$ hunc valorem ſubſtituamus in aequatione $gg = 2aa + 2cc - bb$ prodit $2aa = 2bb + 2cc + 4bc$, ſive $aa = (b + c)^2$, ideoque $a = b + c$. Hoc ergo caſu in triangulo propoſito ſumma duorum laterum aequalis foret tertio latere, idoque tria puncta A, B, C in rectam caderent, neque ergo amplius foret triangulum, ſicque iſta ſolutio penitus eſt reiicienda.

§. 8. Quoniam haec ſolutio inde eſt nata, quod poſuimus formulam $cc - bb$ alios factores non admittere, praeter $c + b$ et $c - b$, neceſſe eſt vt iſta formula inſuper alios involvat factores. Ponamus igitur eſſe $cc - bb = pqrs$, fierique debebit $gg - hh = 3pqrs$, unde ſtatuatur $g + h = 3pq$ et $g - h = rs$, unde fit $g = \frac{3pq + rs}{2}$ et $h = \frac{3pq - rs}{2}$; ex formula vero $cc - bb = qprs$ ſumamus $c + b = pr$ et $c - b = qs$. Hoc autem modo tantum differentiae binarum formularum ſatisfecimus $gg - hh$ et $cc - bb$, unde inſuper aliae ſeorſim foret ſatisfaciendum. eodem autem redit, ſi inſuper ſummae ſatisfiat. Cum igitur ſit $gg + hh = 4aa + bb + cc$, ſubſtitutio valorum inventorum faciliime efficitur: erit enim

$$2gg + 2hh = 9ppqq + rrss,$$

ſimilique modo erit

$$2cc + 2bb = pprr + qqss,$$

unde aequatio conſicienda ſit

$$9ppqq + rrss = 8aa + pprr + qqss,$$

ideoque fiet

$$8aa = pp(9qq - rr) + ss(rr - qq), \text{ ergo}$$
$$16aa = 2pp(9qq - rr) + 2ss(rr - qq),$$

quam ergo formulam ad quadratum reduci oportet; quod ſi fuerit praeſtitum, duabus formulis poſterioribus penitus erit ſatisfactum, ſicque tantum ſupererit primae conditioni $ff = 2cc + 2bb - aa$ ſatisfieri.

§. 9. Cum igitur eſſe debeat $16ff = 32cc + 32bb - 16aa$, ob $2cc + 2bb = pprr + qqss$, nanciſcemur hanc aequationem:

$$16ff = 8pprr - 8qqss - pp(9qq - rr) - ss(rr - qq),$$

ſive

$$16ff = 9pp(rr - qq) + ss(9qq - rr),$$

hoc ergo modo inſuper requiritur, ut ſequentes duae formulae quadrata efficiantur, quae ſunt

$$16aa = 2pp(9qq - rr) + 2ss(rr - qq) \text{ et}$$
$$16ff = 18pp(rr - qq) + 2ss(9qq - rr).$$

§. 10. Quo harum formularum reſolutio facilior reddatur, ponamus $p = x + y$ et $s = x - y$, tum enim conditio-

ditiones implendae erunt:

$$\text{I. } 4aa = 4qq(xx + yy) + 2xy(5qq - rr) \text{ et}$$
$$\text{II. } 4ff = 4rr(xx + yy) + 2xy(5rr - 9qq).$$

§. 11. Quo has formulas tractabiliores reddamus, ſtatuamus brevitatis gratia

$$\frac{5qq - rr}{4qq} = M \text{ et } \frac{5rr - 9qq}{4rr} = N,$$

ac binae aequationes tractandae erunt

$$\frac{aa}{qq} = xx + yy + 2Mxy \text{ et } \frac{ff}{rr} = xx + yy + 2Nxy.$$

Ecce ergo reſolvendae adhuc ſuperſunt duae formulae inter ſe ſimillimae et ita comparatae, ut utramque ſeorſim facillime reſolvere liceat.

§. 12. Vtramque reſolutionem ſimul ſuſcipiamus, ſtatuendo $\frac{a}{q} = x + ty$ et $\frac{f}{r} = x + uy$, hocque modo prodibunt ſequentes formae:

$$2tx + tty = y + 2Mx \text{ et } 2ux + uuy = y + 2Nx,$$

unde duplici modo nanciſcimur

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - tt}{2(t - M)} = \frac{1 - uu}{2(u - N)}.$$

Hos ergo duos valores inter ſe congruentes reddi oportet; quem in finem primo numeratores aequales ſtatuantur, id quod duplici modo fieri poteſt, ſtatuendo vel $u = t$, vel $u = -t$; priori autem caſu denominatores aequales fieri nequeunt, niſi fuerit $M = N$, id quod fieri nequit. Sumamus ergo $u = -t$, ac denominatorum aequalitas praebet $u = \frac{N - M}{2} = -t$, unde fit $\frac{x}{y} = \frac{(M - N)^2 - 4}{4(M + N)}$, hocque modo iam omnibus conditio-

nibus

nibus erit ſatisfactum. Interim tamen probe notari oportet, hanc ſolutionem tantum eſſe particularem, propterea quod binae fractiones pro $\frac{x}{y}$ inventae infinitis aliis modis aequales fieri poſſent, etiamſi neque numeratores, neque denominatores aequales ſtatuantur. Quoniam autem alii modi ad calculos nimis perplexos perducerent, hac ſolutione eo magis poterimus eſſe contenti, quod nihilominus innumerabiles ſolutiones ſuppeditat.

§. 13. Solutio igitur problematis propoſiti ita ſe habebit. 1°. Binae litterae q et r penitus arbitrio noſtro relinquuntur, quibus igitur pro lubitu ſumtis erit

$$M = \frac{5qq - rr}{4qq} \text{ et } N = \frac{5rr - 9qq}{4rr}.$$

2°. His litteris inventis capiantur $x = (M - N)^2 - 4$ et $y = 4(M + N)$, ſive poſtquam fractio $\frac{(M - N)^2 - 4}{4(M + N)}$ ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro x, denominator vero pro y accipiatur. 3°. Deinde vero erit

$$\frac{a}{q} = x + ty = \frac{2x + (M - N)y}{2},$$

ideoque $a = qx + \frac{1}{2}(M - N)qy$, ſimilique modo erit

$$\frac{f}{r} = x - ty = x - \frac{(M - N)y}{2},$$

ideoque $f = rx - \frac{1}{2}(M - N)ry$. 4°. Cum ſit $p = x + y$ et $s = x - y$, habebitur $b + c = pr$ et $c - b = qs$, ideoque

$$c = \frac{pr + qs}{2} \text{ et } b = \frac{pr - qs}{2},$$

ſicque omnia tria latera trianguli erunt definita, quippe quae erunt

$$2a = 2qr + (M - N)qy;$$

$$2b = pr - qs \text{ et } 2c = pr + qs.$$

O 2 5°.

5°. Denique vero ob $g + h = 3pq$ et $g - h = rs$, erit $g = \frac{3pq + rs}{2}$ et $h = \frac{3pq - rs}{2}$.

§. 14. Iam innuimus binas litteras q et r, ſeu potius earum relationem, arbitrio noſtro eſſe relictam; ubi primum obſervandum occurrit, ſi ſumeretur $q = r$, ob $M = 1$ et $N = -1$ fieri $M + N = 0$, ideoque et $y = 0$, unde nulla ſolutio idonea naſcitur. Idem incommodum oritur, ſi fuerit $r = 3q$, ſiquidem inde fit $M = -1$ et $N = 1$, ideoque iterum $M + N = 0$. Hanc ob rem ut caſum definitum evolvamus, cumque ſimpliciſſimum, ſumamus $q = 2$ et $r = 1$, unde fit $M = \frac{13}{16}$ et $N = -\frac{1}{4}$. Sin autem ſumeremus $q = 1$ et $r = 2$, tum fieret $M = \frac{1}{4}$ et $N = \frac{11}{16}$. quae poſterior ſolutio cum ſit ſimplicior, hunc caſum data opera evolvamus.

Evolutio caſus
quo $q = 1$ et $r = 2$.

§. 15. Hoc ergo caſu erit $M = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ et $N = \frac{11}{16}$, ideoque $M + N = \frac{15}{16}$ et $M - N = -\frac{7}{16}$, unde fit $\frac{x}{y} = -\frac{65}{64}$, quocirca ſumamus $x = -65$ et $y = 64$. Hinc erit porro $a = -79$ et $f = -192$, ſive $a = 79$ et $f = 192$. Deinde autem erit $p = -1$ et $s = -129$, unde colligitur $c + b = -2$ et $c - b = -129$, ideoque $c = -\frac{131}{2}$ et $b = \frac{127}{2}$. Denique $g + h = -3$ et $g - h = -258$, ideoque $g = -\frac{261}{2}$ et $h = \frac{255}{2}$.

§. 16. Solutio ergo huius caſus ita ſe habebit, poſtquam ubique per 2 fuerit multiplicatum: $a = 158$; $b = 127$; $c = 131$; $f = 384$; $g = 261$ et $h = 255$. Ubi plurimum obſervaſſe iuvabit, hinc adeo aliam ſolutionem in minoribus numeris derivari poſſe; nam quia numeri f, g et h per 3 di-

dividi poſſunt, eorum trientes loco litterarum a, b et c accipi poterunt, tum autem praecedentes litterae a, b, c dabunt valores pro f, g et h, ita ut hoc obſervato nanciſcamur iſtam ſolutionem ſimpliciorem:

$$a = 68;\ b = 87;\ c = 85;$$

$$f = 158;\ g = 127;\ h = 131;$$

id quod ſequenti modo oſtendi poteſt.

§. 17. Cum ſpectatis litteris a, b et c tanquam datis alterae f, g et h ita determinari ſunt inventae, ut eſſet

$$f = \surd(2bb + 2cc - aa);$$

$$g = \surd(2aa + 2cc - bb);$$

$$h = \surd(2aa + 2bb - cc);$$

hinc ſequitur fore

$$ff + gg + hh = 3aa + 3bb + 3cc, \text{ hincque}$$

$$2ff + 2gg + 2hh = 6aa + 6bb + 6cc.$$

Subtrahatur primo $3ff = 6bb + 6cc - 3aa$, ac prodibit

$$2gg + 2hh - ff = 9aa,$$

ita ut ſit

$$3a = \surd(2gg + 2hh - ff).$$

Eodemque modo reperietur

$$3b = \surd(2hh + 2ff - gg) \text{ et}$$

$$3c = \surd(2gg + 2ff - hh).$$

§. 18. Quoniam igitur litterae $3a$, $3b$ et $3c$ eodem modo per f, g et h determinantur, quo ante invenimus litteras f, g et h per a, b et c determinari, conſideremus aliud triangulum, ad quod referantur ſimili modo gemini lit-

litterarum ordines a', b' et c' atque f', g' et h', ac ſi fuerit $a'=f$; $b'=g$ et $c'=h$, erit

$$f'=\sqrt{(2b'b'+2c'c'-a'a')}=$$
$$\sqrt{(2gg+2hh-ff)}=3a, \text{ ideoque } f'=3a.$$

Eodemque modo prodibit $g'=3b$ et $h'=3c$, ſicque ex triangulo, ad quod referuntur litterae a, b, c et f, g. h. ſemper aliud triangulum derivari poteſt, cui reſpondeant litterae a', b', c' et f, g', h', ſi capiatur $a'=f$; $b'=g$ et $c'=h$ tum erit $f'=3a$; $g'=3b$ et $h'=3c$; quod eſt theorema maxime notatu dignum.

§. 19. Hinc igitur patet, ſi ex triangulo ante invento aliud formetur, in quo ſit $a'=\frac{1}{3}f$; $b'=\frac{1}{3}g$ et $c'=\frac{1}{3}h$; tum fore $f'=a$; $g'=b$ et $h'=c$; unde prodit alterum triangulum ſupra exhibitum, quod pro ſimpliciſſima ſolutione noſtri problematis merito haberi poteſt. Ante autem quam alia exempla percurramus, plurimum iuvabit, ſolutionem generalem accuratius evolvere et ad calculum accommodare.

Accuratior evolutio ſolutionis generalis.

§. 20. In ſolutione brevitatis gratia poſuimus

$$M=\frac{5qq-rr}{4qq} \text{ et } N=\frac{5rr-9qq}{4rr},$$

poſtquam poſuiſſemus $g+h=3pq$ et $g-h=rs$, tum vero $c+b=pr$ et $c-b=qs$, unde invenimus

$$\frac{x}{y}=\frac{(M-N)(MN-1)}{4(M+N)},$$
$$\frac{a}{q}=x+\frac{1}{2}(M-N)y \text{ et}$$
$$\frac{f}{r}=x-\frac{1}{2}(M-N)y,$$

qui-

quibus valoribus inventis reliquae litterae omnes determinantur. Nunc primo loco M et N valores aſſumtos ſubſtituamus, atque impetrabimus:

$$1°.\ M - N = \frac{9q^4 - r^4}{4qqrr} = \frac{(3qq+rr)(3qq-rr)}{4qqrr};$$

deinde vero erit

$$2°.\ M + N = \frac{10qqrr - r^4 - 9q^4}{4qqrr} = \frac{(9qq-rr)(rr-qq)}{4qqrr}.$$

Iam pro fractionis $\frac{x}{y}$ numeratore $(M-N)^2 - 4$ habebimus eius factores

$$M - N + 2 = \frac{9q^4 - r^4 + 8qqrr}{4qqrr} = \frac{(9qq-rr)(rr+qq)}{4qqrr} \text{ et}$$

$$M - N - 2 = \frac{9q^4 - r^4 - 8qqrr}{4qqrr} = \frac{(9qq+rr)(rr-qq)}{4qqrr},$$

unde totus numerator erit

$$(M-N)^2 - 4 = \frac{(qq+rr)(qq-rr)(9qq+rr)(9qq-rr)}{16q^4r^4};$$

at vero denominator eſt

$$4(M+N) = \frac{10qqrr - r^4 - 9q^4}{qqrr} = \frac{(9qq-rr)(rr-qq)}{qqrr},$$

quibus inventis erit

$$\frac{x}{y} = -\frac{(qq+rr)(9qq+rr)}{16qqrr}.$$

§. 21. Quia haec fractio ulteriorem reductionem in genere non admittit, ſumamus

$$x = (qq+rr)(9qq+rr) \text{ et } y = -16qqrr,$$

hinc iam porro ob $\frac{1}{2}(M-N) = \frac{(3qq+rr)(3qq-rr)}{8qqrr}$ reperiemus

$$\frac{a}{q} = 27q^4 + 10qqrr - r^4 = (qq+rr)(9qq+rr) - 2(3qq+rr)(3qq-rr)$$

$$\frac{f}{r} = -9q^4 + 10qqrr + 3r^4 = (qq+rr)(9qq+rr) + 2(3qq+rr)(3qq-rr)$$

qui-

quibus valoribus inventis ob

$$p = x + y = (qq + rr)(9qq + rr) - 16qqrr$$
$$= 9q^4 - 6qqrr + r^4 \text{ et}$$
$$s = x - y = (qq + rr)(9qq + rr) + 16qqrr$$
$$= 9q^4 + 26qqrr + r^4,$$

prodit $c + b = pr$; $c - b = qs$; $g + h = 3pq$ et $g - h = rs$. Ex litteris ergo q et r pro lubitu aſſumtis omnes ſex valores a, b, c et f, g, h facile eliciuntur.

Exemplum I.

quo $q = 1$ et $r = 3$.

§. 22. Quia iam ſupia obſervavimus ſumendo $q = r$ nullum reperiri triangulum, ſed bina latera tertio eſſe aequalia, ſumamus $q = 1$ et $r = 3$ prodibitque $a = 324$ et $f = 108$. Porro erit $p = 36$ et $s = 324$, hincque porro erit $c = 216$ et $b = 108$. Deinde $g = 540$ et $h = 432$, qui valores ergo ſunt: $a = 324$; $b = 108$; $c = 216$; $f = 108$; $g = 540$ et $h = 432$; qui per 108 depreſſi abeunt in hos valores. $a = 3$; $b = 1$; $c = 2$; $f = 1$; $g = 5$ et $h = 4$; quae ſolutio pariter locum habere nequit, quia duo latera tertio reperiuntur acqualia.

Exemplum II.

quo $q = 2$ et $r = 1$.

§. 23. Hic igitur erit $qq + rr = 5$ et $9qq + rr = 37$, unde colligitur $a = 202$ et $f = 471$. Deinde fit $p = 121$ et $s = 240$, hunc porro $c = \frac{619}{2}$ et $b = \frac{377}{2}$. Denique $g = \frac{975}{2}$ et $h = \frac{477}{2}$. His igitur valoribus duplicatis habebimus $a = 404$; $b = 377$; $c = 619$; $f = 942$; $g = 975$ et $h = 477$.

Exem-

Exemplum III.

quo $q = 2$ et $r = 3$.

§. 24. Hic ergo erit $qq + rr = 13$ et $9qq + rr = 45$; unde colligitur $\frac{a}{2} = 459$ et $\frac{f}{3} = 711$; porro vero $p = 9$ et $s = 1161$. Ex his fit $c = \frac{2349}{2}$ et $b = + \frac{2295}{2}$; denique $g = \frac{3537}{2}$ et $h = \frac{3429}{2}$.

§. 25. Hi ergo valores duplicati et per communem factorem 9 diviſi praebent hanc ſolutionem: $a = 204$; $b = 255$ et $c = 261$; $f = 474$; $g = 393$ et $h = 381$; ubi cum numeri f, g, h diviſibiles ſint per 3, per theorema ſupra allatum orietur ſequens nova ſolutio: $a = 68$; $b = 85$; $c = 87$; $f = 158$; $g = 131$ et $h = 127$. Haec ergo ſolutio idem praebet triangulum, quod ex primo caſu, quo $q = 1$ et $r = 2$, demum ope theorematis ſumus nacti.

Exemplum IV.

quo $q = 3$ et $r = 5$.

§. 26. Hic ergo erit $qq + rr = 34$ et $9qq + rr = 106$, unde fit $\frac{a}{3} = 34 \cdot 106 - 4 \cdot 52 = 3396$ et $\frac{f}{5} = 3812$; porro $p = 4$ et $s = 7404$, hinc $c = 10816$ et $b = 10796$; deinde $2g = 18028$ et $2h = 17992$.

§. 27. Triangulum igitur hoc exemplo inventum, quoniam ſinguli valores factorem habent 4, ſequentibus numeris continetur: $a = 2547$; $b = 2699$; $c = 2704$; $f = 4765$; $g = 4507$ et $h = 4498$. Hinc iam ſatis liquet, quomodo quotcunque huiusmodi triangula exhiberi queant, quibus conditiones praeſcriptae adimpleantur.

INTEGRATIO
FORMVLAE DIFFERENTIALIS

$$N^{n.x} x^m \partial x . (a + b x + c x^2 + k x^3 + l x^4 + \text{etc.}) \times$$
$$\times (e + f x + g x^2 + \text{etc.})^p . (h + r x + t x^2 + \text{etc.})^q,$$

IN QVA *N* EST NVMERVS CVIVS LOGARITHMVS HYPERBOLICVS EST VNITAS, QVANTITATES VERO n, m, a, b, c, k, l, e, f, g, h, r, t, p, q, QVAELIBET DATAE.

Auctore

DANIELE MELANDERHIELM.

Conventui exhibita die 24 Mai 1798.

Doctrinam Calculi integralis hoc imprimis tempore, eo usque promotam eſſe, idque opera praecipue ſummi quondam Geometrae Dom. *Leonhardi Euleri*, fateri oportet, ut ſuperaddi haud multa, ſaltem maioris pretii, poſſe videantur. Haec Matheſeos purae pars eo quoque magis coli et elaborari digna fuit, quo ianuam quaſi aperiat ad ſolvenda fere omnia problemata mathematica altioris indaginis, atque inter eadem praecipue illa, quae ſpectant Mechanicam, quae inter ea pertinentia ad Aſtronomiam Phyſicam inſignem ſibi vindicant locum. Haud itaque ſupervacanea illorum

rum induſtria erit reputanda, qui huic calculo adhuc et ulterius operam ſuam impendunt, licet augmenta quae haec doctrina inde caperet, minoris interdum eſſe momenti iudicentur, cum eadem nihilo tamen minus ad magis magisque completum totum ſyſtema, ut ita dicam, calculi integralis reddendum, pro ſua parte conducant. Hoc itaque conſilio, et cum in Analyſi inſtituenda pro ſolutione Problematum ſaepius occurrant quantitates differentiales formae exponentialis, etiam integrationem propoſitae formulae illius indolis ſuſcepi. In hac integratione perficienda uſus ſum methodo indeterminatarum, quae bono cum ſucceſſu ſaepius adhibita eſt in plurium Mathéſeos tam purae quam applicatae Problematum ſolutionibus. Praecipua difficultas, dum haec methodus in ſubſidium revocatur, conſiſtit in inventione formarum, quibuscum comparationes erunt inſtituendae.

Vt redeam ad differentiale propoſitum, ſit in eodem

$$e + fx + gx^2 + \text{etc.} = R, \text{ et } h + rx + tx^2 + \text{etc.} = S,$$

unde hanc induet formam:

$$N^{nx} x^n \partial x . (a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.}) R^p S^q.$$

Ponatur

$$\int N^{nx} x^n \partial x (a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.}) R^p S^q =$$
$$N^{nx} x^{n+1} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}) R^{p+1} S^{q+1}.$$

Comparando terminos homologos ponatur

$$\int a N^{nx} x^n R^p S^q \partial x = A N^{nx} x^{n+1} R^{p+1} S^{q+1}, \text{ et}$$
$$\int b N^{nx} x^{n+1} R^p S^q \partial x = B N^{nx} x^{n+2} R^{p+1} S^{q+1},$$

nec non

$$\int c N^{nx} x^{n+2} R^p S^q \partial x = C N^{nx} x^{n+3} R^{p+1} S^{q+1},$$

ut et

$$\int k N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x = D N^{nx} x^{m+4} R^{p+1} S^{q+1},$$

ſimiliterque

$$\int l N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x = E N^{nx} x^{m+5} R^{p+1} S^{q+1}.$$

Harum aequationum reſumatur prima

$$\int a N^{nx} x^m R^p S^q \partial x = A N^{nx} x^{m+1} R^{p+1} S^{q+1},$$

quae differentiata dat

$$a N^{nx} x^{m} R^p S^q \partial x = A n N^{nx} x^{m+1} R^{p+1} S^{q+1} \partial x$$
$$+ A(m+1) N^{nx} x^m R^{p+1} S^{q+1} \partial x$$
$$+ A(p+1) N^{nx} x^{m+1} R^p S^{q+1} \partial R$$
$$+ A(q+1) N^{nx} x^{m+1} R^{p+1} S^q \partial S.$$

Eſt vero

$$\partial R = f \partial x + 2 g x \partial x \text{ et } \partial S = r \partial x + 2 t x \partial x.$$

Subſtitutis itaque his valoribus ipſorum R, S, ∂R et ∂S orietur:

$$a N^{nx} x^m R^p S^q \partial x = A e h n N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x$$
$$+ A e n r N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A e n t N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$
$$+ A f h n N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A f n r N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$
$$+ A f n t N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + A g h n N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$
$$+ A g n r N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + A g n t N^{nx} x^{m+5} R^p S^q \partial x$$
$$+ A e h(m+1) N^{nx} x^m R^p S^q \partial x + A e r(m+1) N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x$$
$$+ A e t(m+1) N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A f h(m+1) N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x$$
$$+ A f r(m+1) N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A f t(m+1) N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$
$$+ A g h(m+1) N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A g r(m+1) N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$
$$+ A g t(m+1) N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + A f h(p+1) N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x$$
$$+ A f r(p+1) N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + A f t(p+1) N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$$

+

$+ 2Agh(p+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x + 2Agr(p+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x$
$+ 2Agt(p+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x + Aer(q+1)N^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x$
$+ Afr(q+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x + Agr(q+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x$
$+ 2Aet(q+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x + 2Aft(q+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x$
$+ 2Agt(q+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x = Aeh(m+1)N^{nx}x^{m}R^pS^q\partial x$
$+ [Aehn + Aer(m+1) + Afh(m+1) + Afh(p+1) + Aer(q+1)]\times$
$\times N^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x + [Aenr + Afhn + Aet(m+1) + Afr(m+1)$
$+ Agh(m+1) + Afr(p+1) + 2Agh(p+1) + Afr(q+1)$
$+ 2Aet(q+1)]\times N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x + [Aent + Afnr + Aghn$
$+ Aft(m+1) + Agr(m+1) + Aft(p+1) + 2Agr(p+1)$
$+ Agr(q+1) + 2Aft(q+1)]\times N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x$
$+ [Afnt + Agnr + Agt(m+1) + 2Agt(p+1) + 2Agt(q+1)]\times$
$\times N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x + AgntN^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x.$

Modo conſimili aequatio ſecunda $\int bN^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x = BN^{nx}x^{m+2}R^{p+1}S^{q+1}$ differentiata dat:

$$bN^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x = BnN^{nx}x^{m+2}R^{p+1}S^{q+1}\partial x$$
$$+ B(m+2)N^{nx}x^{m+1}R^{p+1}S^{q+1}\partial x$$
$$+ B(p+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^{q+1}\partial R$$
$$+ B(q+1)N^{nx}x^{m+2}R^{p+1}S^q\partial S,$$

ex qua per ſubſtitutionem valorum ipſorum R, S, ∂R, ∂S, invenitur:

$$bN^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x = BehnN^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x$$
$$+ BenrN^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x + BentN^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$$
$$+ BfhnN^{nx}x^{m+3}B^pS^q\partial x + BfnrN^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$$
$$+ BfntN^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x + BghnN^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$$
$$+ BgnrN^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x + BgntN^{nx}x^{m+6}R^pS^q\partial x$$

+

$+Beh(m+2)N^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x+Ber(m+2)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x$
$+Bet(m+2)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+Bfh(m+2)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x$
$+Bfr(m+2)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+Bft(m+2)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+Bgh(m+2)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+Bgr(m+2)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+Bgt(m+2)N^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x+Bfh(p+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x$
$+Bfr(p+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+Bft(p+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+2Bgh(p+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+2Bgr(p+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+2Bgt(p+1)N^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x+Ber(q+1)N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x$
$+Bfr(p+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+Bgr(q+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+2Bet(q+1)N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+2Bft(q+1)N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x$
$+2Bgt(q+1)N^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x = Beh(m+2)N^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x$
$+[Behn+Ber(m+2)+Bfh(m+2)+Bfh(p+1)+Ber(q+1)]\times$
$\times N^{nx}x^{m+2}R^pS^q\partial x+[Benr+Bfhn+Bet(m+2)+Bfr(m+2)$
$+Bgh(m+2)+2Bgh(p+1)+Bfr(p+1)+Bfr(q+1)$
$+2Bet(q+1)]\times N^{nx}x^{m+3}R^pS^q\partial x+[Bent+Bfnr+Bghn$
$+Bft(m+2)+Bgr(m+2)+2Bgr(p+1)+Bft(p+1)+2Bft(q+1)$
$+Bgr(q+1)]\times N^{nx}x^{m+4}R^pS^q\partial x+[Bfnt+Bgnr+Bgt(m+2)$
$+2Bgt(p+1)+2Bgt(q+1)]\times N^{nx}x^{m+5}R^pS^q\partial x+Bgnt\times$
$\times N^{nx}x^{m+6}R^pS^q\partial x.$

Totum pro hac aequatione ſecunda calculum exponere volui, cum inde conſtet, comparationem inſtituendo cum calculo pro aequatione prima, quomodo valor ipſius $b\,N^{nx}x^{m+1}R^pS^q\partial x$ prodeat ex valore aequationis primae ipſius $a\,N^{nx}x^mR^pS^q\partial x$, ponendo ubique B pro A et $m+1$ pro m, quod etiam ex inſpectione ipſorum terminorum has aequationes conſtituentium facile colligi potuit. Hoc idem co-

eodem modo obtinebit in aequationibus ſequentibus, ita ut valor ipſius $c N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x$ in aequatione tertia prodeat ſcribendo in aequatione ſecunda ubique C pro B et $m+1$ pro m; unde patet quomodo haec ſeries aequationum facillime produci queat quousque libuerit.

Colligendo omnes aequationes hac ratione prodeuntes in unam ſummam orietur

$$a N^{nx} x^m R^p S^q \partial x + b N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x + c N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x$$
$$+ k N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x + l N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + \text{etc.} =$$
$$A e h (m+1) N^{nx} x^m R^p S^q \partial x + [A e n h + A e r (m+1)$$
$$+ A f h (m+1) + A f h (p+1) + A e r (q+1)] \times$$
$$\times N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x + [A e n r + A f h n + A e t (m+1)$$
$$+ A f r (m+1) + A g h (m+1) + A f r (p+1) + 2 A g h (p+1)$$
$$+ A f r (q+1) + 2 A e t (q+1)] N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x$$
$$+ [A e n t + A f n r + A g h n + A f t (m+1) + A g r (m+1)$$
$$+ A f t (p+1) + 2 A g r (p+1) + A g r (q+1) + 2 A f t (q+1)] \times$$
$$\times N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x + [A f n t + A g n r + A g t (m+1)$$
$$+ 2 A g t (p+1) + 2 A g t (q+1)] \times N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x$$
$$+ A g n t N^{nx} x^{m+5} R^p S^q \partial x + B e h (m+2) N^{nx} x^{m+1} R^p S^q \partial x$$
$$+ [B e h n + B e r (m+2) + B f h (m+2) + B f h (p+1)$$
$$+ B e r (q+1)] N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + [B e n r + B f h n$$
$$+ B e t (m+2) + B f r (m+2) + B g h (m+2) + 2 B g h (p+1)$$
$$+ B f r (p+1) + 2 B e t (q+1) + B f r (q+1)] \times$$
$$\times N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x + [B e n t + B f n r + B g h n + B f t (m+2)$$
$$+ B g r (m+2) + 2 B g r (p+1) + B f t (p+1) + 2 B f t (q+1)$$

$+ B g r$

$+ Bgr(q+1)] \times N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + [Bfnt + Bgnr$
$+ Bgt(m+2) + 2Bgt(p+1) + 2Bgt(q+1)] \times N^{nx} x^{m+5} \times$
$\times R^p S^q \partial x + Bgnt N^{nx} x^{m+6} R^p S^q \partial x + Ceh(m+3)$
$\times N^{nx} x^{m+2} R^p S^q \partial x + [Cenh + Cer(m+3) + Cfh(m+3)$
$+ Cfh(p+1) + Cer(q+1)] \times N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x$
$+ [Cenr + Cfhn + Cet(m+3) + Cfr(m+3) + Cgh(m+3)$
$+ 2Cgh(p+1) + Cfr(p+1) + 2Cet(q+1)$
$+ Cfr(q+1)] \times N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + [Cent + Cfnr$
$+ Cghn + Cft(m+3) + Cgr(m+3) + 2Cgr(p+1)$
$+ Cft(p+1) + 2Cft(q+1) + Cgr(q+1)] \times N^{nx} x^{m+5} \times$
$\times R^p S^q \partial x + [Cfnt + Cgnr + Cgt(m+3) + 2Cgt(p+1)$
$+ 2Cgt(q+1)] \times N^{nx} x^{m+6} R^p S^q \partial x + Cgnt N^{nx} x^{m+7} \times$
$\times R^p S^q \partial x + Deh(m+4) \times N^{nx} x^{m+3} R^p S^q \partial x + [Dehn$
$+ Der(m+4) + Dfh(m+4) + Dfh(p+1) + Der(q+1)] \times$
$\times N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x + [Denr + Dfhn + Det(m+4) + Dfr(m+4)$
$+ Dgh(m+4) + Dfr(p+1) + 2Dgh(p+1) + Dfr(q+1)$
$+ 2Det(q+1)] \times N^{nx} x^{m+5} R^p S^q \partial x + [Dent + Dfnr$
$+ Dghn + Dft(m+4) + Dgr(m+4) + Dft(p+1)$
$+ 2Dgr(p+1) + Dgr(q+1) + 2Dft(q+1)] N^{nx} x^{m+6} \times$
$\times R^p S^q \partial x + [Dfnt + Dgrr + Dgt(m+4) + 2Dgt(p+1)$
$+ 2Dgt(q+1)] \times N^{nx} x^{m+7} R^p S^q \partial x + Dgnt N^{nx} x^{m+8} \times$
$\times R^p S^q \partial x + Eeh(m+5) N^{nx} x^{m+4} R^p S^q \partial x$
$+ [Eehn + Eer(m+5) + Efh(m+5) + Efh(p+1)$
$+ Eer(q+1)] \times N^{nx} x^{m+5} R^p S^q \partial x + [Eenr + Efhn$
$+ Eet(m+5) + Efr(m+5) + Egh(m+5) + Efr(p+1)$
$+ 2Egh(p+1) + Efr(q+1) + 2Eet(q+1)] N^{nx} x^{m+6} R^p S^q \partial x$
$+ [Eent$

$+ [\mathrm{E}ent + \mathrm{E}fnr + \mathrm{E}ghn + \mathrm{E}ft(m+5) + \mathrm{E}gr(m+5)$
$+ \mathrm{E}ft(p+1) + 2\mathrm{E}gr(p+1) + \mathrm{E}gr(q+1) + 2\mathrm{E}ft(q+1)] \times$
$\times \mathrm{N}^{nx} x^{m+7} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q \partial x + [\mathrm{E}fnt + \mathrm{E}gnr + \mathrm{E}gt(m+5)$
$+ 2\mathrm{E}gt(p+1) + 2\mathrm{E}gt(q+1)] \times \mathrm{N}^{nx} x^{m+8} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q \partial x$
$+ \mathrm{E}gnt \times \mathrm{N}^{nx} x^{m+9} \partial x +$ etc.

Per comparationem terminorum homologorum erit itaque

$a\,\mathrm{N}^{nx} x^m \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q = \mathrm{A}eh(m+1)\,\mathrm{N}^{nx} x^m \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q$

$b\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+1} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q =$
$[\mathrm{A}.[ehn + er(m+1) + fh(m+1) + fh(p+1) + er(q+1)]$
$+ \mathrm{B}eh(m+2)]\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+1} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q$

$c\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+2} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q = [\mathrm{A}.[enr + fnh + et.(m+1) + fr.(m+1)$
$+ gh(m+1) + fr(p+1) + 2gh(p+1) + fr(q+1)$
$+ 2et(q+1)] + \mathrm{B}[ehn + er(m+2) + fh(m+2)$
$+ fh(p+1) + er(q+1)] + \mathrm{C}eh(m+3)]\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+2} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q$

$k\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+3} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q = [\mathrm{A}[ent + fnr + hng + ft(m+1)$
$+ rg(m+1) + ft(p+1) + 2gr(p+1) + gr(q+1)$
$+ 2ft(q+1)] + \mathrm{B}[enr + fhn + et(m+2)$
$+ fr(m+2) + gh(m+2) + fr(p+1)$
$+ 2et(q+1) + 2gh(p+1) + fr(q+1)]$
$+ \mathrm{C}[ehn + er(m+3) + fh(m+3) + fh(p+1)$
$+ er(q+1)] + \mathrm{D}eh(m+1) \times \mathrm{N}^{nx} x^{m+3} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q.$

$l\,\mathrm{N}^{nx} x^{m+4} \mathrm{R}^p \mathrm{S}^q = [\mathrm{A}[fnt + gnr + gt(m+1) + 2gt(p+1)$
$+ 2gt(q+1)] + \mathrm{B}[ent + fnr + ghn + ft(m+2)$
$+ gr(m+2) + 2gr(p+1) + tf(p+1) + 2ft(q+1)$
$+ gr(q+1)] + \mathrm{C}[enr + fhn + et(m+3) + fr(m+3)$

 $+ gh$

$$+ gh(m+3) + 2gh(p+1) + fr(p+1) + 2et(q+1)$$
$$+ fr(q+1)] + D[ehn + er(m+4) + fh(m+4)$$
$$+ fh(p+1) + er(q+1) + Eeh(m+5)] \times N^{nx} x^{m+4} R^p S^q.$$

Quae ſeries facile continuari poteſt, ita ut ſi eſſet in forma differentiali propoſita adhuc unus terminus, ut $u N^{nx} x^{m+5}$, haberetur

$$u N^{nx} x^{m+5} R^p S^q = [A g n t + B[f n t + g n r + g t(m+2)$$
$$+ 2gt(p+1) + 2gt(q+1)] + C[ent + fnr + ghn$$
$$+ ft(m+3) + gr(m+3) + 2gr(p+1) + ft(p+1)$$
$$+ 2ft(q+1) + gr(q+1)] + D[enr + fhn$$
$$+ et(m+4) + fr(m+4) + gh(m+4) + fr(p+1)$$
$$+ 2gh(q+1) + fr(q+1) + 2et(q+1)] + E[ehn$$
$$+ er(m+5) + fh(m+5) + fh(p+1) + er(q+1)]$$
$$+ Feh(m+5)] \times N^{nx} x^{m+5} R^p S^q.$$

Hinc erit

$$A = \frac{a}{eh(m+1)}$$

$$B = \frac{b - A(ehn + er(m+1) + fh(m+1) + fh(p+1) + er(q+1))}{eh(m+2)}$$

$$C = \frac{c - A(enr + fhn + et(m+1) + fr(m+1) + gh(m+1)}{eh(m+3)}$$
$$\frac{+ fr(p+1) + 2gh(p+1) + fr(q+1) + 2et(q+1))}{eh(m+3)}$$
$$\frac{- B(ehn + er(m+2) + fh(m+2) + fh(p+1) + er(q+1))}{eh(m+3)}$$

$$D = \frac{k - A(ent + fnr + hgn + ft(m+1) + gr(m+1) + ft(p+1)}{eh(m+4)}$$
$$\frac{+ 2gr(p+1) + gr(q+1) + 2ft(q+1)) - B(enr + fhn}{eh(m+4)}$$
$$\frac{+ et(m+2) + fr(m+2) + gh(m+2) + 2gh(p+1) + fr(p+1)}{eh(m+4)}$$
$$\frac{+ 2et(q+1) + fr(q+1)) - C(ehn + er(m+3) + fh(m+3)}{eh(m+4)}$$
$$\frac{+ fh(p+1) + er(q+1))}{eh(m+4)}.$$

E =

$$E = \frac{l - A[fnt + gnr + gt(m+1) + 2gt(p+1) + 2gt(q+1)]}{eh(m+5)}$$
$$- \frac{B[ent + fnr + ghn + ft(m+2) + gr(m+2) + 2gr(p+1)]}{eh(m+5)}$$
$$- \frac{B[ft(p+1) + 2ft(q+1) + gr(q+1)]}{eh(m+5)}$$
$$- \frac{C[enr + fhn + et(m+3) + fr(m+3) + gh(m+3) + 2gh(p+1)]}{eh(m+5)}$$
$$- \frac{C[fr(p+1) + 2et(q+1)] + fr(q+1)}{eh(m+5)}$$
$$- \frac{D[ehn + er(m+4) + fh(m+4) + fh(p+1) + er(q+1)]}{eh(m+5)}$$

$$F = \frac{u - Agnt - B[fnt + gnr + gt(m+2) + 2gt(p+1) + 2gt(q+1)]}{eh(m+6)}$$
$$- \frac{C[ent + fnr + ghn + ft(m+3) + gr(m+3)]}{eh(m+6)}$$
$$- \frac{C[2gr(p+1) + ft(p+1) + 2ft(q+1) + gr(q+1)]}{eh(m+6)}$$
$$+ \frac{D[enr + fhn + et(m+4) + fr(m+4) + gh(m+4)]}{eh(m+6)}$$
$$- \frac{D[fr(p+1) + 2gh(p+1) + fr(q+1) + 2et(q+1)]}{eh(m+6)}$$
$$- \frac{E[ehn + er(m+5) + fh(m+5) + fh(p+1) + er(q+1)]}{eh(m+6)}$$

etc. etc.

Quod ſi in antecedenti formula differentiali eſſet $(h + rx + tx^2)^l = 1$, unde indueret hanc formam:

$N^{nx} x^m \partial x . [a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.}] .$
$(e + fx + gx^2 + \text{etc.})^p$, ubi ut ante
$(e + fx + gx^2 + \text{etc.})^p = R^p$, et ponatur
$\int N^{nx} x^m \partial x [a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.}] R^p$
$= N^{nx} x^{m+1} R^{p+1} \partial x . [A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}]$

invenientur valores coëfficientium A, B, C, D, E, F, etc. in hac formula integrali, ponendo in valoribus inventis eorumdem in formula ſuperiori, $h = 1$, $r = 0$, $t = 0$, quo

ipſo fiet $(h + r x + t x^2)^q = 1$. Hac ratione fiet

$$A = \frac{a}{e(m+1)},$$

$$B = \frac{b - A[en + f r(m-1) + f(p+1)]}{e(m+2)},$$

$$C = \frac{c - A[fn + g(m+1) + 2g(p+1)] - B[en + f(m+2) + f(p+1)]}{e(m+3)}$$

$$D = \frac{k - Agn - B[fn + g(m+2) + 2g(p+1)] - C[en + f(m+3) + f(p+1)]}{e(m+4)}$$

$$E = \frac{l - Bgn - C[fn + g(m+3) + 2g(p+1)] - D[en + f(m+4) + f(p+1)]}{e(m+5)},$$

$$F = \frac{u - Cgn - D[fn + g(m+4)] - 2Dg(p+1) - E[en + f(m+5) + f(p+1)]}{e(m+6)},$$

Modo conſimili ſi quoque eſſet $(e + f r + g x^2)^p = 1$, unde differentiale propoſitum erit

$$N^{nx} x^m \partial x \, [a + b x + c x^2 + k x^3 + l x^4 + \text{etc.}],$$

et ponatur

$$\int N^{nx} x^m \partial x \, [a + b x + c x^2 + k x^3 + l x^4 + \text{etc.}]$$
$$= N^{nx} x^{m+1} \partial x \, [A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \text{etc.}]$$

invenientur valores coëfficientium A, B, C, D, E, F, etc. in hac formula integrali, ponendo in valoribus eorundem in formula proxime praecedenti $e = 1$, $f = 0$, $g = 0$, unde habebitur $(e + f x + g x^2)^p = 1$. Hoc modo fiet

$$A = \frac{a}{m+1}, \; B = \frac{b - An}{m+2}, \; C = \frac{c - Bn}{m+3}, \; D = \frac{k - Cn}{m+4},$$
$$E = \frac{l - Dn}{m+5}, \; F = \frac{u - En}{m+6}, \text{ etc.}$$

S V M.

SVMMATIO PLVRIVM SERIERVM EX SINVBVS VEL COSINVBVS ARCVVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM FORMATARVM.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Conv. Acad. exhibita die 11 Ianuar. 1796.

§. 1.

Iam ante triginta, et quod excurrit, annos Cel. quondam *Eulerus* in diſſertatione ſua, *Subſidium Calculi Sinuum* inſcripta et Tomo V. Novorum Commentariorum inſerta, Theorema protulerat ita enuntiatum: *Si aſſignari queat ſumma huius ſeriei infinitae:*

$$A z^m + B z^{m+n} + C z^{m+2n} + D z^{m+3n} + \text{etc.}$$

ſemper quoque exhiberi poterunt ſummae harum ſerierum:

$$A \operatorname{coſ.} m\psi + B \operatorname{coſ.} (m+n)\psi + C \operatorname{coſ.} (m+2n)\psi + \text{etc.} = S,$$

$$A \operatorname{ſin} m\psi + B \operatorname{ſin.} (m+n)\psi + C \operatorname{ſin.} (m+2n)\psi + \text{etc.} = T.$$

Demonſtratio huius Theorematis, ut rem brevi complectar, ita ſe habet: Cum poſito $\operatorname{coſ.} \psi + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \psi = p$ et $\operatorname{coſ.} \psi - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \psi = q$, ſit

coſ.

$$\text{coſ.}\ \mu\,\psi + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \mu\,\psi = p^{\mu},$$
$$\text{coſ.}\ \mu\,\psi - \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \mu\,\psi = q^{\mu},\ \text{crit}$$
$$S + T\sqrt{-1} = A\,p^{m} + B\,p^{m+n} + C\,p^{m+2n} + \text{etc.} = P,$$
$$S - T\sqrt{-1} = A\,q^{m} + B\,q^{m+n} + C\,q^{m+2n} + \text{etc.} = Q,$$
ideoque $S = \frac{P+Q}{2}$ et $T = \frac{P-Q}{2\sqrt{-1}}$, ubi P et Q per hypotheſin dantur, imaginaria vero quovis caſu ſponte ſe deſtruunt.

Methodo generali hic adumbrata frequenter uſus ſum in inveſtigandis ſummis ſerierum ex ſinibus coſinibusve arcuum arithmetice progredientium formatarum; quarum ſummationum praecipuas nunc colligere iunctimque exponere conſtitui. Quanquam enim *Eulerus* ipſe methodum ſuam ad varias huiusmodi ſeries accommodaverat: tamen Problemata, quorum ſolutionem hic tradere animus eſt, non ſolum varias continebunt ſeries a nemine adhuc, quantum quidem mihi conſtat, ſummatas, ſed etiam omnia, quae paſſim circa huiusmodi ſeries a variis Auctoribus ſunt inventa, ſub forma generaliori complectentur. Praeterea autem ipſa Theorematis veritas ex iſta caſuum determinatorum tractatione plus firmamenti capiet, quo eo magis indigere videtur, quod, imaginaria ſponte ſe deſtruere in genere non tam facile perſpicitur, cum adeo, ubi de ſeriebus determinatis agitur, quomodo imaginaria e medio tollantur, minime ſit obvium.

Problema 1.

§. 2. *Propoſitis binis ſeriebus infinitis*

$$A = \text{ſin.}\ \alpha + a\ \text{ſin.}\ (\alpha + \phi) + a^2\ \text{ſin.}\ (\alpha + 2\,\phi) + \text{etc.}$$
$$B = \text{coſ.}\ \alpha + a\ \text{coſ.}\ (\alpha + \phi) + a^2\ \text{coſ.}\ (\alpha + 2\,\phi) + \text{etc.}$$
utriusque ſummam inveſtigare.

So-

Solutio.

Ponatur $\alpha = \lambda \Phi$ et noſtrae binae ſeries propoſitae ita ſe habebunt:

$$A = \text{ſin.}\,\lambda\Phi + a\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\Phi + a^2\,\text{ſin.}\,(\lambda+2)\Phi + \text{etc.}$$

$$B = \text{coſ.}\,\lambda\Phi + a\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\Phi + a^2\,\text{coſ.}\,(\lambda+2)\Phi + \text{etc.}$$

Quod ſi igitur ponatur

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = p,$$

$$\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = q,$$

ita ut ſit

$$\text{coſ.}\,\mu\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\mu\Phi = p^\mu,$$

$$\text{coſ.}\,\mu\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\mu\Phi = q^\mu,$$

habebimus

$$B + A\sqrt{-1} = p^\lambda + a\,p^{\lambda+1} + a^2\,p^{\lambda+2} + \text{etc.} = \frac{p^\lambda}{1 - a\,p},$$

$$B - A\sqrt{-1} = q^\lambda + a\,q^{\lambda+1} + a^2\,q^{\lambda+2} + \text{etc.} = \frac{q^\lambda}{1 - a\,q}.$$

Hinc autem deducitur

$$2\,B = \frac{p^\lambda + q^\lambda - a\,p\,q\,(p^{\lambda-1} + q^{\lambda-1})}{1 - a\,(p+q) + a\,a\,p\,q},$$

$$2\,A\sqrt{-1} = \frac{p^\lambda - q^\lambda - a\,p\,q\,(p^{\lambda-1} - q^{\lambda-1})}{1 - a\,(p+q) + a\,a\,p\,q}.$$

Cum igitur ſit $p\,q = 1$, tum vero

$$p^\mu + q^\mu = 2\,\text{coſ.}\,\mu\Phi,$$

$$p^\mu - q^\mu = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\mu\Phi,$$

erit

$$2\,B = \frac{2\,\text{coſ.}\,\lambda\Phi - 2\,a\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\Phi}{1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\Phi + a\,a},$$

$$2\,A\sqrt{-1} = \frac{2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi - 2\,a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\Phi}{1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\Phi + a\,a},$$

ita

ita ut ſummae quaeſitae, ob $\lambda\Phi = \alpha$, ſequenti modo exprimantur:

$$A = \frac{\text{ſin.}\,\alpha - a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \Phi)}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa},$$

$$B = \frac{\text{coſ.}\,\alpha - a\,\text{coſ.}\,(\alpha - \Phi)}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa}.$$

Corollarium 1.

§. 3. Quodſi nunc ſtatuamus $\lambda = 1$, ita ut $\alpha = \Phi$, prodibunt ſequentes ſummationes iam pridem inventae:

$$\text{ſin.}\,\Phi + a\,\text{ſin.}\,2\Phi + a^2\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa}$$

$$\text{coſ.}\,\Phi + a\,\text{coſ.}\,2\Phi + a^2\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\Phi - a}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa}$$

quae convenient cum illis quas Eulerus iam olim in medium protulit (a).

Corollarium 2.

§. 4. Si vero ponatur $a = 1$, manente angulo α, ſeu multiplicatore λ, ob

$$\text{ſin.}\,\alpha - \text{ſin.}\,(\alpha - \Phi) = 2\,\text{coſ.}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\Phi)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$

$$\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,(\alpha - \Phi) = 2\,\text{ſin.}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\Phi)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$

obtinebuntur ſequentes ſummationes:

$$\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,(\alpha + \Phi) + \text{ſin.}\,(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\Phi)}{2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi}$$

$$\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,(\alpha + \Phi) + \text{coſ.}\,(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.} = -\frac{\text{ſin.}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\Phi)}{2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi}$$

quemadmodum *Eulerus* olim (b) ſcalae relationis ope invene-

(a) V. Nov. Comment. Tom. V. pag. 202; nec non Tom. XVIII. pag. 34.

(b) V. Introd. in Anal. Inf. pag. 218 et 219.

venerat, et poſt eum ſubtiliſſimi Geometrae *Lexell* (*c*) et *Klügel* (*d*), uterque methodo peculiari.

Corollarium 3.

§. 5. Si in ſummationibus modo traditis ſumatur $\alpha = \Phi$, prodibunt ſequentes:

$$\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,2\,\Phi + \text{ſin.}\,3\,\Phi + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi$$

$$\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}.$$

Vtramque iam dudum *Eulerus* (*e*) et poſt eum *Dan. Bernoulli* (*f*) exhibuit.

Corollarium 4.

§. 6. Si denique ponatur $\alpha = m\,\psi$ et $\Phi = n\,\psi$, prodibunt ſeries Theorematis initio allati litteris S et T deſignatae, quarum ſummae igitur ſequenti modo exprimentur:

$$S = \frac{\text{coſ.}\,m\,\psi - a\,\text{coſ.}\,(m-n)\,\psi}{1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\psi + a\,a},$$

$$T = \frac{\text{ſin.}\,m\,\psi - a\,\text{coſ.}\,(m+n)\,\psi}{1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\psi + a\,a}.$$

Problema 2.

§. 7. *Propoſitis binis ſeriebus infinitis*

$$C = a\,\text{ſin.}\,(\alpha+\Phi) + \tfrac{a^2}{2}\,\text{ſin.}\,(\alpha+2\,\Phi) + \tfrac{a^3}{3}\,\text{ſin.}\,(\alpha+3\,\Phi) + \text{etc.}$$

D =

(*c*) Nov. Comment. Tom. XVIII. pag 42 et 43.

(*d*) Analytiſche Trigonometrie. S. 42 et 43.

(*e*) Nov. Comment. Tom. V. pag. 202.

(*f*) Nov. Comment. Tom. XVI. pag. 81 et 85.

$$D = a\,\text{coſ.}(\alpha + \Phi) + \tfrac{a^2}{2}\,\text{coſ.}(\alpha + 2\Phi) + \tfrac{a^3}{3}\,\text{coſ.}(\alpha + 3\Phi) + \text{etc.}$$

utriusque ſummam inveſtigare.

Solutio.

Poſito, ut ſupra, $\alpha = \lambda\,\Phi$, ita ut ſeries propoſitae hanc induant formam:

$$C = a\,\text{ſin.}(\lambda + 1)\Phi + \tfrac{a^2}{2}\,\text{ſin.}(\lambda + 2)\Phi + \tfrac{a^3}{3}\,\text{ſin.}(\lambda + 3)\Phi + \text{etc.}$$

$$D = a\,\text{coſ.}(\lambda + 1)\Phi + \tfrac{a^2}{2}\,\text{coſ.}(\lambda + 2)\Phi + \tfrac{a^3}{3}\,\text{coſ.}(\lambda + 3)\Phi + \text{etc.}$$

habebimus

$$D + C\sqrt{-1} = p^\lambda\,[a\,p + \tfrac{a^2 p^2}{2} + \tfrac{a^3 p^3}{3} + \text{etc.}]$$

$$D - C\sqrt{-1} = q^\lambda\,[a\,q + \tfrac{a^2 q^2}{2} + \tfrac{a^3 q^3}{3} + \text{etc.}]$$

conſequenter

$$D + C\sqrt{-1} = -\,p^\lambda\,l\,(1 - a\,p)$$

$$D - C\sqrt{-1} = -\,q^\lambda\,l\,(1 - a\,q)$$

unde reſtituto arcu Φ erit

$$D + C\sqrt{-1} = -\,(\text{coſ.}\,\lambda\,\Phi + \sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi) \times$$
$$\times\, l\,(1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi - a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi)$$

$$D - C\sqrt{-1} = -\,(\text{coſ.}\,\lambda\,\Phi - \sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi) \times$$
$$\times\, l\,(1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi - a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi).$$

Hinc porro facile derivantur valores

$$2\,D = -\,\text{coſ.}\,\lambda\,\Phi\; l\,(1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\Phi + a^2)$$
$$+ \sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi\; l\,\frac{1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi + a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi}{1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi - a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi}$$

$$2\,C\sqrt{-1} = \text{coſ.}\,\lambda\,\Phi\; l\,\frac{1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi + a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi}{1 - a\,\text{coſ.}\,\Phi - a\sqrt{-1}\;\text{ſin.}\,\Phi}$$
$$-\sqrt{-1}\,.\;\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi\; l\,(1 - 2\,a\,\text{coſ.}\,\Phi + a^2).$$

Cum autem ſit

l

$$l\,\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{A tang.}\,x$$

poſito $x = \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi}$ habebimus

$$l\,\frac{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi+a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi-a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi} = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

quo obſervato ſummae quaeſitae erunt

$$C = \text{coſ.}\,\alpha\,.\,\text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi} - \text{ſin.}\,\alpha\,.\,l\sqrt{(1-2a\,\text{coſ.}\,\Phi+aa)};$$

$$D = \text{ſin.}\,\alpha\,.\,\text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi} - \text{coſ.}\,\alpha\,.\,l\sqrt{(1-2a\,\text{coſ.}\,\Phi+aa)}.$$

Corollarium 1.

§. 8. Sit $\lambda = 0$, hoc eſt $\alpha = 0$, orientur ſequentes ſummationes:

$$a\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{a^2}{2}\,\text{ſin.}\,2\Phi + \frac{a^3}{3}\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi}$$

$$a\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{a^2}{2}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \frac{a^3}{3}\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} =$$
$$-\,l\sqrt{(1-2a\,\text{coſ.}\,\Phi+aa)},$$

quam utramque *Eulerus* olim (g) exhibuit.

Corollarium 2.

§. 9. Statuamus $a = 1$, et naſcentur ſeries

$$\text{ſin.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\Phi + \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = \text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi}$$

$$\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} = -\,l\sqrt{(2-2\,\text{coſ.}\,\Phi)}.$$

At vero eſt

$$\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{\pi-\Phi}{2}$$

$$\sqrt{(2-2\,\text{coſ.}\,\Phi)} = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$

unde ſequitur fore

 ſin. Φ

(g) Nov. Comment. Tom. XVIII. pag. 35 et 36.

$$\text{ſin.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\,\Phi + \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi + \text{etc.} = \tfrac{\pi - \Phi}{2},$$

$$\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{etc.} = l\,\frac{1}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,\Phi},$$

quae ſummae egregie conveniunt cum iis quas Cel. *Dan. Bernoulli* (h) olim elicuit, ſeries ſupra §. 5. allatas per $\partial\,\Phi$ multiplicando et integrando, poſtquam ſcilicet conſtans per integrationem ingreſſa debito modo fuerit determinata.

Corollarium 3.

§. 10. Quodſi in binis ſeriebus ſuperioris corollarii ponatur $\Phi = \frac{\pi}{2}$, orientur ſequentes ſeries:

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.} = \tfrac{\pi}{4}$$

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} + \text{etc.} = l\,\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

quarum prior eſt ſeries notiſſima *Leibnitii*, poſterior vero, ducta in -2, abit in ſeriem illam pariter notiſſimam, qua logarithmus binarii exprimitur.

Scholion.

§. 11. Si ſeries C et D in hoc ſecundo Problemate tractatas comparemus cum ſeriebus A et B, quarum ſummationem in primo Problemate tradidimus, ſumtis differentialibus priorum deprehendemus fore

$$\partial\,C = B\,\partial\,\Phi - \partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha$$

$$\partial\,D = -A\,\partial\,\Phi + \partial\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha,$$

ita ut, ſubſtitutis loco A et B valoribus ſupra §. 2. inventis, contrahendo et ordinando reperiamus:

$\partial\,C$

(h) Nov. Comment. Tom. XVII. pag. 7 et 17.

$$\partial C = \text{coſ.}\, \alpha . \frac{a \partial \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - a a \partial \Phi}{1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a} - \text{ſin.}\, \alpha . \frac{a \partial \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi}{1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a}$$

$$\partial D = - \text{ſin.}\, \alpha . \frac{a \partial \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - a a \partial \Phi}{1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a} - \text{coſ.}\, \alpha . \frac{a \partial \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi}{1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a},$$

unde integrando nanciſcimur

$$C = \text{coſ.}\, \alpha \,\text{A tang.}\, \frac{a \,\text{ſin.}\, \Phi}{1 - a \,\text{coſ.}\, \Phi} - \text{ſin.}\, \alpha\, l \sqrt{(1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a)}$$

$$D = - \text{ſin.}\, \alpha \,\text{A tang.}\, \frac{a \,\text{ſin.}\, \Phi}{1 - a \,\text{coſ.}\, \Phi} - \text{coſ.}\, \alpha\, l \sqrt{(1 - 2 a \,\text{coſ.}\, \Phi + a a)};$$

prorſus ut ſupra §. 7. invenimus.

Problema 3.

§. 12. *Propoſitis binis ſeriebus infinitis*

$$E = \text{ſin.}\, \alpha + a \,\text{ſin.}\, (\alpha + \Phi) + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \,\text{ſin.}\, (\alpha + 2 \Phi) + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \,\text{ſin.}\, (\alpha + 3 \Phi) + \text{etc.}$$

$$F = \text{coſ.}\, \alpha + a \,\text{coſ.}\, (\alpha + \Phi) + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \,\text{coſ.}\, (\alpha + 2 \Phi) + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \,\text{coſ.}\, (\alpha + 3 \Phi) + \text{etc.}$$

utriusque ſummam inveſtigare.

Solutio.

Poſito $\alpha = \lambda \Phi$ ſeries propoſitae hanc induent formam commodiorem:

$$E = \text{ſin.}\, \lambda \Phi + a \,\text{ſin.}\, (\lambda + 1) \Phi + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \,\text{ſin.}\, (\lambda + 2) \Phi + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \,\text{ſin.}\, (\lambda + 3) \Phi + \text{etc.}$$

$$F = \text{coſ.}\, \lambda \Phi + a \,\text{coſ.}\, (\lambda + 1) \Phi + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \,\text{coſ.}\, (\lambda + 2) \Phi + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \,\text{coſ.}\, (\lambda + 3) \Phi + \text{etc.}$$

Hinc igitur ſequitur fore

$$F + E \sqrt{-1} = p^\lambda \left[1 + a p + \frac{a^2 p^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 p^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}\right] = p^\lambda . e^{a p}$$

F —

$$F - E\sqrt{-1} = q^\lambda [1 + aq + \frac{a^2 q^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}] = q^\lambda \cdot e^{aq}$$

ex quo conſequitur

$$2F = p^a \cdot e^{ap} + q^\lambda \cdot e^{aq}$$
$$2E\sqrt{-1} = p^\lambda \cdot e^{ap} - q^\lambda \cdot e^{aq}$$

denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Conſtat autem eſſe

$$e^{u + v\sqrt{-1}} = e^u (\text{coſ.}\, v + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)$$

unde poſito $a\, \text{coſ.}\, \Phi = u$ et $a\, \text{ſin.}\, \Phi = v$ erit

$$e^{ap} = e^u (\text{coſ.}\, v + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)$$
$$e^{aq} = e^u (\text{coſ.}\, v - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)$$

et facta ſubſtitutione prodibit

$$2F = e^u (\text{coſ.}\, v + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)(\text{coſ.}\, \lambda\Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi)$$
$$+ e^u (\text{coſ.}\, v - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)(\text{coſ.}\, \lambda\Phi - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi)$$
$$2E\sqrt{-1} = e^u (\text{coſ.}\, v + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)(\text{coſ.}\, \lambda\Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi)$$
$$- e^u (\text{coſ.}\, v - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, v)(\text{coſ.}\, \lambda\Phi - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi)$$

Facta autem evolutione hae expreſſiones ad ſequentes formas ſimpliciores reducuntur:

$$2F = 2e^u [\text{coſ.}\, v\, \text{coſ.}\, \lambda\Phi - \text{ſin.}\, v\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi]$$
$$2E\sqrt{-1} = 2e^u \sqrt{-1} [\text{ſin.}\, v\, \text{coſ.}\, \lambda\Phi + \text{coſ.}\, v\, \text{ſin.}\, \lambda\Phi]$$

ita ut ſummae quaeſitae ſerierum propoſitarum ſint

$$E = e^u\, \text{ſin.}\, (\alpha + v)$$
$$F = e^u\, \text{coſ.}\, (\alpha + v)$$

exiſtente $v = a\, \text{ſin.}\, \Phi$ et $u = a\, \text{coſ.}\, \Phi$.

Corollarium 1.

§. 13. Ponatur $\alpha = 0$, et reſultabunt ſequentes ſummationes:

$a\, \text{ſin.}\, \Phi$

$$a\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{a^2}{1.2}\,\text{ſin.}\,2\Phi + \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,v,$$

$$1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{a^2}{1.2}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} = e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,v,$$

quae cum prorſus novae ſint & ſingulare quid habeant, operae pretium videtur eas exemplo illuſtrare. Sumamus hunc in finem $\Phi = 10^\circ$ & $a = \frac{1}{2}$, eritque

$$u = a\,\text{coſ.}\,\Phi = 0,4924039,$$
$$v = a\,\text{ſin.}\,\Phi = 0,0868241.$$

Tum vero erit

$$e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi} = (2,7182818)^{0,4924039},$$

conſequenter

$$l\,e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi} = 0,4924039 \times 0,4342945.$$

Eſt vero

$$l\,0,4924039 = 9,6923215$$
$$l\,0,4342945 = 9,6377843$$

ideoque $l\,l\,e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi} = 9,3301058$
ergo $l\,e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi} = 0,2138483.$

Quod porro valorem v attinet, is in gradus eiusque partes converſus erit

$$v = \frac{180 \cdot 0,0868241}{\pi} = 4^\circ, 58', 28\tfrac{3}{4}'',$$

quo invento ſequitur fore

$$l\,\text{ſin.}\,v = 8,9380944$$
$$l\,\text{coſ.}\,v = 9,9983610$$

quibus logarithmis ſi addatur utrique $l e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi} = 0,2138483$, prodibit

$$l\,e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,v = 9,1519427$$
$$l\,e^{a\,\text{coſ.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,v = 0,2122093$$

et

et ſerierum noſtrarum ſummae erunt

$$a\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{a^2}{1\cdot 2}\,\text{ſin.}\,2\Phi + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = 0{,}1418870,$$

$$1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{a^2}{1\cdot 2}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.} = 1{,}6300815.$$

Nunc videamus quid ſit proditurum ſi harum ſerierum valde convergentium priores termini in unam ſummam colligantur. Eſt vero

$a\,\text{ſin.}\,\Phi = 0{,}0868241$	$1 = 1{,}0000000$
$\frac{a^2}{1\cdot 2}\,\text{ſin.}\,2\Phi = 0{,}0427525$	$a\,\text{coſ.}\,\Phi = 0{,}4924039$
$\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\text{ſin.}\,3\Phi = 0{,}0104166$	$\frac{a^2}{1\cdot 2}\,\text{coſ.}\,2\Phi = 0{,}1174616$
$\frac{a^4}{1\ldots 4}\,\text{ſin.}\,4\Phi = 0{,}0016739$	$\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\text{coſ.}\,3\Phi = 0{,}0180422$
$\frac{a^5}{1\ldots 5}\,\text{ſin.}\,5\Phi = 0{,}0001995$	$\frac{a^4}{1\ldots 4}\,\text{coſ.}\,4\Phi = 0{,}0019949$
$\frac{a^6}{1\ldots 6}\,\text{ſin.}\,6\Phi = 0{,}0000188$	$\frac{a^5}{1\ldots 5}\,\text{coſ.}\,5\Phi = 0{,}0001674$
$\frac{a^7}{1\ldots 7}\,\text{ſin.}\,7\Phi = 0{,}0000014$	$\frac{a^6}{1\ldots 6}\,\text{coſ.}\,6\Phi = 0{,}0000108$
	$\frac{a^7}{1\ldots 7}\,\text{coſ.}\,7\Phi = 0{,}0000005$.
Summa $= 0{,}1418868$	Summa $= 1{,}6300813$

quae igitur ſummae egregie conveniunt cum ſupra inventis.

Corollarium 2.

§. 14. Quodſi in ſummationibus corollarii ſuperioris ponatur $\Phi = 90^\circ$, ob $a\,\text{coſ.}\,\Phi = 0$ et $v = a$ reperietur

$$a - \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^5}{1\ldots 5} - \frac{a^7}{1\ldots 7} + \text{etc.} = \text{ſin.}\,a\,,$$

$$1 - \frac{a^2}{1\cdot 2} + \frac{a^4}{1\ldots 4} - \frac{a^6}{1\ldots 6} + \text{etc.} = \text{coſ.}\,a\,,$$

ſeries notiſſimae.

Corol-

Corollarium 3.

§. 15. Revertamur ad ſeries E et F noſtri Problematis, quae, ſi a in iis negative capiatur, ad ſequentes conducunt:

$$\mathfrak{E} = \text{ſin.}\,\alpha - a\,\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi) + \frac{a^2}{1.2}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 2\,\Phi) - \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 3\,\Phi) + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{F} = \text{coſ.}\,\alpha - a\,\text{coſ.}\,(\alpha + \Phi) + \frac{a^2}{1.2}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 2\,\Phi) - \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 3\,\Phi) + \text{etc.}$$

et ſi iſtae ſeries, quarum ſummae ſunt

$$\mathfrak{E} = e^{-u}\,\text{ſin.}\,(\alpha - v)$$

$$\mathfrak{F} = e^{-u}\,\text{coſ.}\,(\alpha - v)$$

ad ſeries E et F addantur, ab iisque auferantur, prodibunt ſequentes:

$$\frac{E+\mathfrak{E}}{2} = \text{ſin.}\,\alpha + \frac{a^2}{1.2}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 2\,\Phi) + \frac{a^4}{1\ldots4}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 4\,\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{F+\mathfrak{F}}{2} = \text{coſ.}\,\alpha + \frac{a^2}{1.2}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 2\,\Phi) + \frac{a^4}{1\ldots4}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 4\,\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{E-\mathfrak{E}}{2} = a\,\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi) + \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 3\,\Phi) + \frac{a^5}{1\ldots5}\,\text{ſin.}\,(\alpha + 5\,\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{F-\mathfrak{F}}{2} = a\,\text{coſ.}\,(\alpha + \Phi) + \frac{a^3}{1.2.3}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 3\,\Phi) + \frac{a^5}{1\ldots5}\,\text{coſ.}\,(\alpha + 5\,\Phi) + \text{etc.}$$

quarum ſerierum ſummae erunt:

$$\frac{E+\mathfrak{E}}{2} = \tfrac{1}{2}e^{u}\,\text{ſin.}\,(\alpha + v) + \tfrac{1}{2}e^{-u}\,\text{ſin.}\,(\alpha - v),$$

$$\frac{F+\mathfrak{F}}{2} = \tfrac{1}{2}e^{u}\,\text{coſ.}\,(\alpha + v) + \tfrac{1}{2}e^{-u}\,\text{coſ.}\,(\alpha - v),$$

$$\frac{E-\mathfrak{E}}{2} = \tfrac{1}{2}e^{u}\,\text{ſin.}\,(\alpha + v) - \tfrac{1}{2}e^{-u}\,\text{ſin.}\,(\alpha - v),$$

$$\frac{F-\mathfrak{F}}{2} = \tfrac{1}{2}e^{u}\,\text{coſ.}\,(\alpha + v) - \tfrac{1}{2}e^{-u}\,\text{coſ.}\,(\alpha - v),$$

quae ſummationes omnes, ni fallor, novae ſunt.

Problema 4.

§. 16. *Propoſitis binis ſeriebus infinitis:*

$$G = \text{ſin.}\,\alpha + [\tfrac{n}{1}]a\,\text{ſin.}(\alpha + \Phi) + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{ſin.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$

$$H = \text{coſ.}\,\alpha + [\tfrac{n}{1}]a\,\text{coſ.}(\alpha + \Phi) + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{coſ.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$

utriusque ſummam inveſtigare.

Solutio.

Hic ſcilicet characteres uncinulis incluſi denotant coëfficientes poteſtatis binomii n^{mae}. Poſito igitur, ut hactenus, $\alpha = \lambda\Phi$, ita ut ſeries propoſitae hanc formam induant:

$$G = \text{ſin.}\,\lambda\Phi + [\tfrac{n}{1}]a\,\text{ſin.}(\lambda + 1)\Phi + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{ſin.}(\lambda + 2)\Phi + \text{etc.}$$

$$H = \text{coſ.}\,\lambda\Phi + [\tfrac{n}{1}]a\,\text{coſ.}(\lambda + 1)\Phi + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{coſ.}(\lambda + 2)\Phi + \text{etc.}$$

habebimus

$$H + G\sqrt{-1} = p^\lambda + [\tfrac{n}{1}]a\,p^{\lambda+1} + [\tfrac{n}{2}]a^2\,p^{\lambda+2} + \text{etc.}$$
$$= p^\lambda(1 + ap)^n,$$

$$H - G\sqrt{-1} = q^\lambda + [\tfrac{n}{1}]a\,q^{\lambda+1} + [\tfrac{n}{2}]a^2\,q^{\lambda+2} + \text{etc.}$$
$$= q^\lambda(1 + aq)^n,$$

conſequenter

$$2H = p^\lambda(1 + ap)^n + q^\lambda(1 + aq)^n,$$

$$2G\sqrt{-1} = p^\lambda(1 + ap)^n - q^\lambda(1 + aq)^n.$$

Cum igitur ſit

$$1 + ap = 1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi + a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

$$1 + aq = 1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi - a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ſi haec ita repraeſentemus:

$$1 + ap = (1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi)\left(1 + \frac{a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi}\right),$$

$$1 + aq = (1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi)\left(1 - \frac{a\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi}\right),$$

po-

poſito $\frac{a\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{1+a\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}=\mathrm{tang.}\,\omega$, erit

$$1+ap=\frac{a\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{\mathrm{tang.}\,\omega}(1+a\sqrt{-1}\,\mathrm{tang.}\,\omega)$$
$$1+aq=\frac{a\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{\mathrm{tang.}\,\omega}(1-a\sqrt{-1}\,\mathrm{tang.}\,\omega),$$

unde porro intelligitur fore

$$(1+ap)^n=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}(\mathrm{coſ.}\,n\omega+\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,n\omega)$$

$$(1+aq)^n=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}(\mathrm{coſ.}\,n\omega-\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,n\omega),$$

quibus ſubſtitutis prodibit

$$2G\sqrt{-1}=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}[\mathrm{coſ.}\,n\omega(p^\lambda-q^\lambda)+\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,n\omega(p^\lambda+q^\lambda)],$$

$$2H=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}[\mathrm{coſ.}\,n\omega(p^\lambda+q^\lambda)+\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,n\omega(p^\lambda-q^\lambda)].$$

Cum igitur ſit

$$p^\lambda+q^\lambda=2\,\mathrm{coſ.}\,\alpha,$$
$$p^\lambda-q^\lambda=2\sqrt{-1}\,\mathrm{ſin.}\,\alpha,$$

ſummae quaeſitae ita erunt expreſſae:

$$G=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}\,\mathrm{ſin.}\,(\alpha+n\omega),$$

$$H=\frac{a^n\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^n}{\mathrm{ſin.}\,\omega^n}\,\mathrm{coſ.}\,(\alpha+n\omega),$$

ubi meminiſſe oportet eſſe $\omega=A\,\mathrm{tang.}\frac{a\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{1+a\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}$.

Corollarium 1.

§. 17. Statuamus nunc $a=1$, eritque

$$\omega=A\,\mathrm{tang.}\frac{\mathrm{ſin.}\,\Phi}{1+\mathrm{coſ.}\,\Phi}=\tfrac{1}{2}\Phi,$$

unde emergunt ſequentes novae ſummationes:

$$\text{ſin.}\,\alpha + [{n \atop 1}]\,\text{ſin.}(\alpha + \Phi) + [{n \atop 2}]\,\text{ſin.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$
$$= 2^n\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^n\,\text{ſin.}(\alpha + \tfrac{1}{2}n\Phi),$$
$$\text{coſ.}\,\alpha + [{n \atop 1}]\,\text{coſ.}(\alpha + \Phi) + [{n \atop 2}]\,\text{coſ.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$
$$= 2^n\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^n\,\text{coſ.}(\alpha + \tfrac{1}{2}n\Phi),$$

quarum neutram apud eos auctores inveni qui de ſummatione huiusmodi ſerierum tractarunt.

Corollarium 2.

§. 18. Sin autem in ſummationibus Corollarii praecedentis ponatur $\alpha = 0$, prodibunt iſtae:

$$[{n \atop 1}]\,\text{ſin.}\,\Phi + [{n \atop 2}]\,\text{ſin.}\,2\Phi + [{n \atop 3}]\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$= 2^n\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^n\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}n\Phi,$$
$$1 + [{n \atop 1}]\,\text{coſ.}\,\Phi + [{n \atop 2}]\,\text{coſ.}\,2\Phi + [{n \atop 3}]\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$= 2^n\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^n\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}n\Phi,$$

quas Cel. *Eulerus* (*i*), una cum evolutione plurimorum caſuum particularium inde derivatorum, olim exhibuit.

Corollarium 3.

§. 19. Sit $\Phi = 90°$, et cum ſit

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa)}} = \frac{a}{\sqrt{(1 + aa)}},$$

ſeries noſtrae fient:

$$\left.\begin{aligned}&\text{ſin.}\,\alpha\,(1 - [{n \atop 2}]a^2 + [{n \atop 4}]a^4 - [{n \atop 6}]a^6 + \text{etc.})\\ &+ \text{coſ.}\,\alpha\,([{n \atop 1}]a - [{n \atop 3}]a^3 + [{n \atop 5}]a^5 - [{n \atop 7}]a^7 + \text{etc.})\end{aligned}\right\} = (1 + aa)^{\frac{1}{2}n}\,\text{ſin.}(\alpha + n\omega),$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{coſ.}\,\alpha\,(1 - [{n \atop 2}]a^2 + [{n \atop 4}]a^4 - [{n \atop 6}]a^6 + \text{etc.})\\ &- \text{ſin.}\,\alpha\,([{n \atop 1}]a - [{n \atop 3}]a^3 + [{n \atop 5}]a^5 - \text{etc.})\end{aligned}\right\} = (1 + aa)^{\frac{1}{2}n}\,\text{coſ.}(\alpha + n\omega).$$

Corol-

(*i*) Nova Acta Tom. VII. pro Anno 1789, pag. 87 ſeqq.

Corollarium 4.

§. 20. Quodſi in ſummationibus corollarii praecedentis ponatur $\alpha = 0$, fiet:

$$[\tfrac{n}{1}]a - [\tfrac{n}{3}]a^3 + [\tfrac{n}{5}]a^5 - \text{etc.} = (1 + aa)^{\frac{1}{2}n} \text{ſin.}\, n\omega,$$

$$1 - [\tfrac{n}{2}]a^2 + [\tfrac{n}{4}]a^4 - [\tfrac{n}{6}]a^6 + \text{etc.} = (1 + aa)^{\frac{1}{2}n} \text{coſ.}\, n\omega.$$

Hinc vero, ob $\text{tang.}\,\omega = \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + a\,\text{coſ.}\,\Phi} = a$ et $\text{coſ.}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{(1 + aa)}}$, ſequentes deducuntur ſeries pro ſinu et coſinu anguli multipli.

$$\text{ſin.}\, n\omega = \text{coſ.}\,\omega^n ([\tfrac{n}{1}]\,\text{tang}\,\omega - [\tfrac{n}{3}]\,\text{tang.}\,\omega^3 + [\tfrac{n}{5}]\,\text{tang.}\,\omega^5 - \text{etc.})$$

$$\text{coſ.}\, n\omega = \text{coſ.}\,\omega^n (1 - [\tfrac{n}{2}]\,\text{tang.}\,\omega + [\tfrac{n}{4}]\,\text{tg.}\,\omega^4 - [\tfrac{n}{6}]\,\text{tg.}\,\omega^6 + \text{etc.})$$

quas iam alibi exhibui et directe demonſtravi. (k)

Corollarium 5.

§. 21. Ponatur hic $\omega = \frac{\pi}{4}$ et ob $\text{tang.}\,\omega = 1$ et $\text{coſ.}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, iſtae orientur ſeries:

$$[\tfrac{n}{1}] - [\tfrac{n}{3}] + [\tfrac{n}{5}] - [\tfrac{n}{7}] + \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\, \text{ſin.}\, \tfrac{n\pi}{4},$$

$$1 - [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{4}] - [\tfrac{n}{6}] + [\tfrac{n}{8}] - \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\, \text{coſ.}\, \tfrac{n\pi}{4},$$

quarum poſterior etiam apud Eulerum occurrit (l); prior autem nova eſt, et utraque omni attentione digna videtur.

Corollarium 6.

§. 22. Notari quoque hic meretur, ſummationes in Problemate primo §. 2. inventas in hoc poſtremo Problemate

(k) Nova Acta, Tom. IV. pro Anno 1791. pag. 217.

(l) Nova Acta, Tom. VII. pro Anno 1789 pag 95.

te contineri. Si enim ponatur $n = -1$, ipſum a vero negative capiatur, ſeries noſtrae erunt:

$$G = A = \text{ſin.}\,\alpha + a\,\text{ſin.}(\alpha + \Phi) + a^2\,\text{ſin.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$

$$H = B = \text{coſ.}\,\alpha + a\,\text{coſ.}(\alpha + \Phi) + a^2\,\text{coſ.}(\alpha + 2\Phi) + \text{etc.}$$

ſummae autem cum ſint

$$G = -\frac{\text{ſin.}\,\omega}{a\,\text{ſin.}\,\Phi}\,\text{ſin.}\,(\alpha - \omega),$$

$$H = -\frac{\text{ſin.}\,\omega}{a\,\text{ſin.}\,\Phi}\,\text{coſ.}\,(\alpha - \omega),$$

ob $\frac{\text{ſin}\,\omega}{-a\,\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa)}}$,

$$\text{ſin.}\,(\alpha - \omega) = \frac{\text{ſin.}\,\alpha - a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \Phi)}{\sqrt{(1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa)}},$$

$$\text{coſ.}\,(\alpha - \omega) = \frac{\text{coſ.}\,\alpha - a\,\text{coſ.}\,(\alpha - \Phi)}{\sqrt{(1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa)}},$$

erit, ut ſupra loco citato invenimus:

$$G = \frac{\text{ſin.}\,\alpha - a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \Phi)}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa} = A,$$

$$H = \frac{\text{coſ.}\,\alpha - a\,\text{coſ.}\,(\alpha - \Phi)}{1 - 2a\,\text{coſ.}\,\Phi + aa} = B.$$

Corollarium 7.

§. 23. Si denique quoque in ſummationibus generalibus in poſtremo Problemate exhibitis a negative capiatur, naſcentur ſequentes ſeries:

$$\mathfrak{G} = \text{ſin.}\,\alpha - [\tfrac{n}{1}]\,a\,\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi) + [\tfrac{n}{2}]\,a^2\,\text{ſin.}\,(\alpha + 2\Phi) - \text{etc.}$$

$$\mathfrak{H} = \text{coſ.}\,\alpha - [\tfrac{n}{1}]\,a\,\text{coſ.}\,(\alpha + \Phi) + [\tfrac{n}{2}]\,a^2\,\text{coſ.}\,(\alpha + 2\Phi) - \text{etc.}$$

quarum ſummae ita exprimentur:

$$\mathfrak{G} = \pm\frac{a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\,\text{ſin.}\,(\alpha + n\,\omega_{,}),$$

$$\mathfrak{H} = \pm\frac{a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\,\text{coſ.}\,(\alpha + n\,\omega_{,}),$$

ubi

ubi $\omega_{,} = \text{A tang} \frac{-a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-a\,\text{coſ.}\,\Phi}$, ſignum vero ambiguum $\pm$ ita eſt intelligendum, ut $+$ valeat quando n eſt numerus par, $-$ vero quando n eſt numerus impar. Quodſi hae ſeries $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ ad ſeries G et H addantur, atque ab iis auferantur, orientur ſequentes:

$$\frac{G+\mathfrak{G}}{2} = \text{ſin.}\,\alpha + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{ſin.}(\alpha+2\Phi) + [\tfrac{n}{4}]a^4\,\text{ſin.}(\alpha+4\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{H+\mathfrak{H}}{2} = \text{coſ.}\,\alpha + [\tfrac{n}{2}]a^2\,\text{coſ.}(\alpha+2\Phi) + [\tfrac{n}{4}]a^4\,\text{coſ.}(\alpha+4\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{G-\mathfrak{G}}{2} = [\tfrac{n}{1}]a\,\text{ſin.}(\alpha+\Phi) + (\tfrac{n}{3})a^3\,\text{ſin.}(\alpha+3\Phi) + [\tfrac{n}{5}]a^5\,\text{ſin.}(\alpha+5\Phi) + \text{etc.}$$

$$\frac{H-\mathfrak{H}}{2} = [\tfrac{n}{1}]a\,\text{coſ.}(\alpha+\Phi) + [\tfrac{n}{3}]a^3\,\text{coſ.}(\alpha+3\Phi) + [\tfrac{n}{5}]a^5\,\text{coſ.}(\alpha+5\Phi) + \text{etc.}$$

ſummae vera harum quatuor novarum ſerierum ita ſe habebunt:

$$\frac{G+\mathfrak{G}}{2} = \tfrac{1}{2}a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n\left[\frac{\text{ſin.}(\alpha+n\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^n} \pm \frac{\text{ſin.}(\alpha+n\omega_{,})}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\right]$$

$$\frac{H+\mathfrak{H}}{2} = \tfrac{1}{2}a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n\left[\frac{\text{coſ.}(\alpha+n\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^n} \pm \frac{\text{coſ.}(\alpha+n\omega_{,})}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\right]$$

$$\frac{G-\mathfrak{G}}{2} = \tfrac{1}{2}a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n\left[\frac{\text{ſin.}(\alpha+n\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^n} \mp \frac{\text{ſin.}(\alpha+n\omega_{,})}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\right]$$

$$\frac{H-\mathfrak{H}}{2} = \tfrac{1}{2}a^n\,\text{ſin.}\,\Phi^n\left[\frac{\text{coſ.}(\alpha+n\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^n} \mp \frac{\text{coſ}(\alpha+n\omega_{,})}{\text{ſin.}\,\omega_{,}^{\,n}}\right].$$

Scholion.

§. 24. Ex ſummationibus in his quatuor Problematibus, eorumque Corollariis, exhibitis innumeras alias derivare liceret, quas autem, ne huic argumento nimis immoremur, omittere eo minus dubitamus, quod evolutio caſuum ſpe-

ſpecialium in his Problematibus contentorum nulla difficultate laborat. Scopo noſtro abunde ſatisfecimus, oſtendendo, quomodo ſummas imaginarias ad formam realem revocare liceat, id quod, ſaltem in poſtremis tribus Problematibus minime erat obvium.

RE-

RECHERCHES
SUR
QUELQUES CAS D'ÉQUILIBRE
DANS LES FILS PARFAITEMENT FLEXIBLES.

Par

NICOLAS FUSS.

Préſenté à l'Académie le 10 Nov. 1796.

§. 1.

L'Académie avoit promis, dans ſon programme de 1794, un prix de 50 Ducats, à l'auteur du meilleur Mémoire ſur un ſujet quelconque de Phyſico-Mathématique, ou à celui de la meilleure invention utile & nouvelle, faite dans quelque genre de machinerie que ce ſoit, qui lui ſeroit préſentée avant la fin de l'année paſſée. Parmi les Mémoires que l'Académie a reçu à cette occaſion il y en avoit un qui contenoit le projet & la déscription d'un pont ſur la Neva, ſuspendu par des chaînes verticales à quatre chaines tendues d'un bord du fleuve à l'autre. Un examen ſérieux de cette ſinguliere idée, qui frappe l'imagination par ſa hardieſſe autant que par ſon originalité, auroit pu paroître ſuperflu dans toute autre occaſion que celle qui a engagé ſon auteur à la préſenter à l'Académie; attendu qu'un tact naturel fait preſſentir l'impoſſibilité du projet, même aux perſonnes dénuées de toute notion de Théorie. Mais un jugement de l'Académie devoit être appuyé ſur une

 baſe

baſe plus ſolide que le ſentiment confus de l'impoſſibilité de l'exécution, excité par la disproportion palpable entre la force des chaines & leur énorme poids, augmenté encore de celui d'un pont duëment ſolide & praticable. J'avois donc cru devoir ſoumettre cette idée à un examen plus reflèchi, en y appliquant les principes de l'équilibre des corps flexibles; & cet examen m'ayant mis dans la néceſſité de réſoudre un problème, particulier à la vérité, mais qui n'a pas encore été traité par perſonne que je ſache, & qui, indépendamment du projet qui y a donné occaſion, peut intéreſſer par ſon utilité dans d'autres recherches ſemblables: je me ſuis propoſé d'en donner ici la ſolution à la ſuite d'une double ſolution du problème général ſur l'état d'équilibre d'un fil parfaitement flexible, ſuspendu par ſes extrémités, & ſollicité dans chaque point par des forces quelconques. J'aurois pu déduire l'une & l'autre des deux ſolutions que je vais préſenter de ce problème, de la ſolution que feu M. Euler a donné autrefois, dans le dernier volume des nouveaux Commentaires, pour les lames élaſtiques. Mais ayant vu que cet avantage ne feroit acheté qu'au prix de la clarté & de l'évidence, & que pour les corps parfaitement flexibles le problème, ſoit qu'on faſſe uſage, pour le réſoudre, du principe des momens, ou de celui de la tenſion, étoit ſusceptible de ſolutions directes aſſez ſuccinctes, ſans qu'on fut obligé de renvoyer le lecteur à d'autres ouvrages, j'ai mieux aimé les déduire immédiatement l'une & l'autre des premiers principes.

Problème général.

Tab. II. Fig. 1. §. 2. *Si à chaque élément d'un fil parfaitement flexible, ſuspendu en N & M, ſont appliquées des forces quelcon-*

conques, déterminer la figure que le fil aura, lorsqu'il ſera en équilibre.

Premiere Solution
déduite du principe des momens.

Soit N A M la figure que le fil aura dans l'état d'équilibre, A étant ſon point le plus bas. Par ce point A tirons la tangente B *b*, qui ſera par conſéquent horiſontale, ou perpendiculaire à la direction de la peſanteur; & il eſt clair qu'en fixant le point A au moyen d'un clou, la portion A M gardera ſa figure, lors même qu'on en retranchera l'autre portion A N, vu que la courbe N A M repréſente la figure que le fil aura dans l'état d'équilibre. Or ce clou fixé en A eſſuyera une certaine force, parceque la tenſion du fil agit ſur lui dans la direction A *b*. Je nommerai cette force A *b* = A, & en retirant le clou, pour que la portion A M garde ſa figure, il faudra lui appliquer cette même force A dans la direction A B.

Prenons les abſciſſes ſur la ligne A C tirée par A perpendiculairement ſur B *b*. & ſoit pour le point M l'abſciſſe A P = x, l'ordonnée P M = y & l'arc A M = s. Quant aux forces appliquées au point M, nous les décompoſerons en une force verticale M Q = $q\,\partial s$ & en une force horiſontale M P = $p\,\partial s$. Quant à la force A, ſi c'étoit la ſeule, & que le fil fut ſuſpendu en M, l'effet de cette force ſeroit de faire mouvoir le fil autour du point M, & ſon moment ſeroit A . A P = A x.

Pour déterminer les momens des forces élémentaires appliquées à chaque point de l'arc A M, regardons le point M Tab. II. Fig. 2.

 com-

comme ſixe, & pour un autre point quelconque Y de l'arc A M, nommons l'abſciſſe A X = X & l'ordonnée X Y = Y & l'arc A Y = S. Quant aux forces appliquées à ce point Y, ſoit la force horiſontale Y X = P ∂ S & la force verticale Y Z = Q ∂ S; & en abaiſſant du point M ſur X Y prolongée la perpendiculaire M S & prolongeant Z Y jusqu'en R, on aura pour les forces Y X & Y Z les momens:

$$Y X . Y R = P \partial S (x - X);$$

$$Y Z . Y S = Q \partial S (y - Y);$$

à l'égard du point M regardé comme fixe. La ſomme des momens des forces qui agiſſent ſur l'arc entier A Y, pour en augmenter la courbure, ſera par conſéquent

$$x \int P \partial S - \int P X \partial S$$

& la ſomme des momens des forces qui agiſſent ſur l'arc entier A Y, pour en diminuer la courbure, ſera

$$y \int Q \partial S - \int Q Y \partial S.$$

En avançant donc le point Y jusqu'en M, de maniere que $X = x$, $Y = y$, $S = s$, $P = p$ & $Q = q$, on aura pour l'arc entier A M la ſomme des momens des forces qui tendent à en augmenter la courbure

$$A x + x \int p \partial s - \int p x \partial s,$$

ou bien ſimplement

$$x \int p \partial s - \int p x \partial s,$$

parceque la conſtante A peut être regardée comme compriſe dans l'intégrale $\int p \partial s$; & la ſomme des momens de toutes les forces qui tendent à diminuer la courbure de l'arc A M, ſera

$$y \int q \partial s - \int q y \partial s.$$

Or

Or pour le cas d'équilibre ces momens doivent être égaux, de façon que

$$x\int p\,\partial s - \int p\,x\,\partial s = y\int q\,\partial s - \int q\,y\,\partial s,$$

& en prenant les différenticlles, on aura

$$\partial x\int p\,\partial s = \partial y\int q\,\partial s,$$

équation qui renferme la ſolution complette du problême général propoſé.

Seconde Solution

déduite du principe des tenſions.

Soit, comme dans la ſolution précédente, A le point le plus bas de la courbe que formera le fil dans l'état d'équilibre, ſoit la ligne verticale A C, tirée par ce point, l'axe des abſciſſes, & mettons pour un point quelconque M l'abſciſſe A P $= x$, l'ordonnée P M $= y$ & l'arc A M $= s$. Quant aux forces élémentaires appliquées à chaque élément M du fil, nous les décompoſerons en une force verticale M Q $= q\,\partial s$ & en une force horiſontale M P $= p\,\partial s$, que nous regardons l'une & l'autre comme connue. Tab. II. Fig. 3.

Tirons par M la tangente M T qui rencontre la droite verticale C A prolongée en T, & ſoit T la tenſion qui agit dans la direction de cette tangente; & ſi nous décompoſons cette force M T $=$ T ſelon les directions M Q et M P, en nommant l'angle de courbure P M T $= \Phi$, nous aurons une force ſelon M Q $=$ T ſin. Φ & une force ſelon M P $=$ T coſ. Φ.

Que ſi nous paſſons au point m infiniment proche de M, en examinant les forces dont cet élément eſt ſollicité,

cité, nous trouvons pour la direction verticale mq la force T ſin. $\Phi + q\,\partial s$, & pour la direction horiſontale mp la force T coſ. $\Phi + p\,\partial s$. Ainſi les forces élémentaires $q\,\partial s$ et $p\,\partial s$ étant les accroiſſemens des forces T ſin. Φ et T coſ. Φ, il eſt évident que

$$\text{I. } q\,\partial s = \partial\,.\,T \text{ ſin. } \Phi = \partial T \text{ ſin. } \Phi + T\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi;$$

$$\text{II. } p\,\partial s = \partial\,.\,T \text{ coſ. } \Phi = \partial T \text{ coſ. } \Phi - T\,\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi.$$

Faiſons les combinaiſons ſuivantes:

$$\text{I. ſin.}\Phi + \text{II. coſ.}\Phi = q\,\partial s \text{ ſin.}\Phi + p\,\partial s \text{ coſ.}\Phi = \partial T;$$

$$\text{I. coſ.}\Phi - \text{II. ſin.}\Phi = q\,\partial s \text{ coſ.}\Phi - p\,\partial s \text{ ſin.}\Phi = T\,\partial\Phi.$$

La derniere équation fournit la tenſion

$$T = \frac{q\,\partial s \text{ coſ. } \Phi - p\,\partial s \text{ ſin. } \Phi}{\partial \Phi},$$

& en intégrant la premiere, on obtient une autre expreſſion pour la tenſion, qui comparée avec celle-là, conduit à l'équation ſuivante:

$$\frac{q\,\partial s \text{ coſ. } \Phi - p\,\partial s \text{ ſin. } \Phi}{\partial \Phi} = \int q\,\partial s \text{ ſin. } \Phi + \int p\,\partial s \text{ coſ. } \Phi,$$

qui nous donne à connoitre la courbe cherchée, & qui renferme la ſolution complette du problême.

Scholie I.

§. 1. Pour montrer l'accord de cette ſeconde ſolution avec la précédente, je conſidére les deux équations ſuivantes:

$$\text{I. } T \text{ ſin. } \Phi = \int q\,\partial s,$$

$$\text{II. } T \text{ coſ. } \Phi = \int p\,\partial s,$$

tirées de la ſeconde ſolution, & je fais cette combinaiſon:

$$\text{II. } \partial s \text{ ſin. } \Phi - \text{I. } \partial s \text{ coſ. } \Phi,$$

qui me donne

$$\partial s \text{ ſin. } \Phi \int p\,\partial s - \partial s \text{ coſ. } \Phi \int q\,\partial s = 0,$$

c'eſt

c'eſt à dire

$$\partial x \int p \partial s = \partial y \int q \partial s$$

comme nous avons trouvé par la premiere ſolution.

Scholie 2.

§. 4. La ſeconde ſolution eſt préférable à la premiere, parceque nous y avons déterminé la tenſion T, qu'il eſt important de connoître, afin qu'on puiſſe examiner, ſi le fil a aſſez de force, pour réſiſter à cette tenſion, ou non? Quant à la figure que le fil revêt dans l'état d'équilibre, l'équation

$$\partial x \int p \partial s = \partial y \int q \partial s$$

à laquelle nous a conduit la premiere ſolution, auſſi bien que l'équation

$$\frac{q \partial s \, \mathrm{coſ.} \Phi - p \partial s \, \mathrm{ſin.} \Phi}{\partial \Phi} = \int q \partial x + \int p \partial y$$

que nous a fourni la ſeconde ſolution, feront l'une & l'autre également propres à déterminer cette figure, comme nous ferons voir par l'application de ces deux ſolutions générales au problème connu de la *Chainette*.

Problème particulier 1.

§. 5. *Une corde ou une chaine également épaiſſe & homogéne étant ſuspendue par ſes extrémités, déterminer la figure qu'elle prend lorsqu'elle eſt en équilibre.*

Solution.

Comme la chaine eſt ſuppoſée homogène et d'épaisſeur égale, la longueur de l'arc $AM = s$ pourra être regardée

gardée comme ſon poids. L'élément $M m = \partial s$ eſt donc ſollicité par une force élémentaire verticale $q \partial s = \partial s$ et par une force élémentaire horiſontale $p \partial s = 0$, de ſorte que $\int q \partial s = s$ et $\int p \partial s = a$, partant l'équation qui exprime la nature de la courbe, trouvée dans la premiere ſolution générale, deviendra ici $a \partial x = s \partial y$. Mettons $\partial y = p \partial x$, et nous aurons $s = \frac{a}{p}$, partant

$$\partial s = \partial x \surd (1 + p p) = - \frac{a \partial p}{p p},$$

donc $\partial x = \frac{- a \partial p}{p p \surd (1 + p p)}$, et en prenant l'intégrale

$$b + x = \frac{a \surd (1 + p p)}{p}.$$

Or comme au point A, où $x = 0$, il y a $p = \infty$, il faut que $b = a$, & partant $a + x = \frac{a \surd (1 + p p)}{p}$. De cette équation on tire $p = \frac{a}{\surd (2 a x + x x)}$ & l'ordonnée

$$y = a \int \frac{\partial x}{\surd (2 a x + x x)}.$$

Pour intégrer cette derniere formule mettons

$$\surd (2 a x + x x) = u x,$$

de façon que

$$x = \frac{2 a}{u u - 1} \text{ \& } \partial x = - \frac{4 a u \partial u}{(u u - 1)^2};$$

& nous aurons

$$\surd (2 a x + x x) = \frac{2 a u}{u u - 1};$$

& partant

$$y = - 2 a \int \frac{\partial u}{u u - 1} = a l C + a l \frac{u + 1}{u - 1},$$

& en reſtituant x, on aura

$$y = a l C + a l \frac{\surd (2 a + x) + \surd x}{\surd (2 a + x) - \surd x}$$

on

ou bien, parceque $y = 0$, lorsque $x = 0$, on peut omettre la conſtante C, & l'on a

$$y = a \log. \frac{\sqrt{(2a + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2a + x)} - \sqrt{x}}$$

équation connue de la Chainette.

Scholie 1.

§. 6. La même équation réſulte auſſi de la ſeconde ſolution générale. Car, à cauſe de $q = 1$ & $p = 0$ (§. 5.), l'équation, à laquelle nous a conduit la ſeconde ſolution devient (§. 4.)

$$\frac{\partial s \cos \Phi}{\partial \Phi} = \int \partial x = a + x.$$

Or $\partial s \cos. \Phi = \partial y = p \partial x$ & $\partial \Phi = \frac{-\partial p}{1 + pp}$, ce qui étant ſubſtitué, notre équation ſera

$$-\frac{p \partial x (1 + pp)}{\partial p} = a + x$$

d'où l'on tire, en ſéparant les variables,

$$\frac{\partial x}{a + x} = \frac{-\partial p}{p(1 + pp)} = \frac{-\partial p}{p} + \frac{p \partial p}{1 + pp},$$

équation dont l'intégrale eſt

$$l(a + x) = l b - l p + l \sqrt{(1 + pp)}$$

deſorte qu'en remontant aux nombres on obtient

$$a + x = \frac{b \sqrt{(1 + pp)}}{p}.$$

Or comme x doit évanouir au point A, où $p = \infty$, il faudra que $b = a$, partant

$$a + x = \frac{a \sqrt{(1 + pp)}}{p}$$

ce qui eſt la même équation que nous avons trouvée ci-deſſus au §. 5, & qui nous avoit donné l'ordonnée

$$y = a \log. \frac{\sqrt{(2a + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2a + x)} - \sqrt{x}}.$$

Scholie 2.

§. 7. En mettant $q = 1$ & $p = 0$, nous aurons $T = \frac{\lambda s c + \Phi}{\lambda \Phi}$ (§. 2.), d'où il ſuit que $T = a + x$ (§. 6.) En ſuppoſant donc la corde ou chaine telle, que la longueur d'une portion qui pèſe λ livres ſoit de L pieds, la tenſion dans chaque point M équivaudra à un poids de $\frac{\lambda(a + x)}{L}$ livres. Elle croît donc avec l'abſciſſe, & peut rompre la corde, lorsque x devient fort grand.

Scholie 3.

§. 8. Quant à la conſtante introduite par l'intégration dans le calcul, elle pourra être déterminée, pour quelque cas que ce ſoit, par une expérience très facile. Car ayant meſuré la longueur de la corde, depuis le point le plus bas A jusqu'au point de ſuſpenſion D, la profondeur du point A au deſſous de la ligne horiſontale CD, & la ligne CD même, en nommant l'arc $AD = k$, $AC = b$, $CD = c$, comme l'arc $AD = \sqrt{(2ab + bb)}$ (§. 5.), on aura $a = \frac{kk - bb}{2b}$, & partant

$$y = \frac{kk - bb}{2b} \log. \frac{\sqrt{(kk - bb + bx)} + \sqrt{bx}}{\sqrt{(kk - bb + bx)} - \sqrt{bx}},$$

équation qui peut auſſi être repréſentée ſous la forme ſuivante, plus commode pour le calcul:

$$y = \frac{kk - bb}{b} \log. \frac{\sqrt{(kk - bb + bx)} + \sqrt{bx}}{\sqrt{(kk - bb)}}.$$

Problème particulier 2.

Tab. II. Fig. 4. §. 9. *Une corde homogène & également épaiſſe étant ſuspendue dans les points B & D pris dans une même ligne horiſontale, trouver la figure que cette corde prend, lorsqu'elle eſt tendue en B & D par des forces données.*

Solu-

Solution.

La corde étant homogène & d'épaiſſeur uniforme, il eſt clair que la droite verticale A C, tirée par le milieu C de la ligne horiſontale B D, paſſe par le point le plus bas A & coupe la courbe en deux parties ſemblables & égales. En prenant donc les abſciſſes ſur cette ligne A C, & mettant A P $= x$, P Y $= y$ & l'arc A Y $= s$, parce que la force verticale ∂s eſt encore la ſeule force élémentaire qui agit ſur le point Y, nous aurons, comme dans le problême précédent, $a \partial x = s \partial y$, (§. 5.) donc

$$\partial y = \frac{a \partial x}{s} = \frac{a \partial x}{\sqrt{(2ax + xx)}},$$

& partant

$$y = a \log. \frac{\sqrt{(2a + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2a + x)} - \sqrt{x}}$$

où la conſtante a pourra être déterminée par la force tendante donnée de la maniere ſuivante:

Soit F la force, avec laquelle la corde eſt tendue en B & D, & ſoit C A $= b$ la profondeur, à laquelle ſe trouve le point A au-deſſous de B D dans l'état d'équilibre, & comme la tenſion en Y eſt $T = \frac{\lambda(a + x)}{L}$ (§. 7.), en B & D elle ſera $T = \frac{\lambda(a + b)}{L}$, deſorte que $F = \frac{\lambda(a + b)}{L}$, donc $a = \frac{LF - \lambda b}{\lambda}$, ce qui étant ſubſtitué, on aura

$$y = \frac{LF - \lambda b}{\lambda} \log. \frac{\sqrt{[2(LF - \lambda b) + \lambda x]} + \sqrt{\lambda x}}{\sqrt{[2(LF - \lambda b) + \lambda x]} - \sqrt{\lambda x}}.$$

Corollaire 2.

§. 10. Suppoſons que la corde ſoit tendue au point de pouvoir regarder A C comme très petit par rapport à B D, & x ſera ſi petit par rapport à a, que dans l'expreſ-

 ſion

ſion $s = \sqrt{(2ax + xx)}$ on pourra negliger la ſeconde puiſſance xx, & mettre ſimplement $s = \sqrt{2ax}$, deſorte que $\partial y = \frac{a \partial x}{\sqrt{2ax}}$ & partant $y = \sqrt{2ax}$. Ainſi dans le cas préſent la courbe ſera une parabole.

Corollaire 2.

§. 11. Pour déterminer le paramètre & le ſommet A de cette parabole, par les données L, F, λ, c, obſervons que $a + b = \frac{LF}{\lambda}$, (§. 9.), & qu'ayant mis $CD = CB = c$ (§. 8.), on aura $c = \sqrt{2ab}$ (§. 10.), deſorte que

$$\text{I.} \quad aa + 2ab + bb = \frac{LLFF}{\lambda\lambda}$$

$$\text{II.} \quad 4ab = 2cc.$$

De là on tire cette équation:

$$\text{I} - \text{II} = (a - b)^2 = \frac{LLFF}{\lambda\lambda} - 2cc$$

& en extrayant la racine, on obtient

$$a - b = \frac{\sqrt{(LLFF - 2\lambda\lambda cc)}}{\lambda}.$$

Or ayant vu tantòt que

$$a + b = \frac{LF}{\lambda}$$

la ſomme de ces deux équations donne le demi-paramètre de la parabole

$$a = \frac{LF + \sqrt{(LLFF - 2\lambda\lambda cc)}}{2\lambda},$$

& leur différence donne la flèche AC ou

$$b = \frac{LF - \sqrt{(LLFF - 2\lambda\lambda cc)}}{2\lambda}.$$

Mais b étant très-petit en comparaiſon de a, il eſt clair que $aa + 2ab + bb$ ſera très grand vis-à-vis de $4ab$, donc $LLFF$ très-grand vis-à-vis de $2\lambda\lambda cc$, c'eſt pourquoi

quoi on pouvra mettre

$$\sqrt{(LLFF - 2\lambda\lambda cc)} = LF - \frac{\lambda\lambda cc}{LF}$$

& on aura

$$a = \frac{2LLFF - \lambda\lambda cc}{2\lambda LF} \text{ \& } b = \frac{\lambda cc}{2LF}.$$

Corollaire 3.

§. 12. Cherchons auſſi la longueur de la corde B A D, & comme $AB = AD = \sqrt{(2ab + bb)}$, à cauſe de $2ab = cc$ & b très petit, on aura

$$AD = \sqrt{(cc + bb)} = cc + \frac{bb}{2c},$$

par conſéquent

$$BAD = 2c + \frac{\lambda\lambda c^3}{4LLFF}.$$

Corollaire 4.

§. 13. Que ſi l'on demande réciproquement quelle eſt la force F qui tend une corde B A D en B & D, au point que le milieu A ſoit à une profondeur donnée au deſſous de la ligne horiſontale B D, très petite ce pendant en comparaiſon de B D, cette force ſera $F = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{cc}{2b}$. C'eſt-à-dire, une corde, dont une portion longue de 1 pied peſe λ livres, pourra être tendue par la force $F = \lambda \cdot \frac{cc}{2b}$, appliquée à ſes extrémités B & D au point que la dépreſſion moyenne ne ſoit que $AC = b$; & cette force F eſt la même qu'eſſayeroit le bout ſupérieur de cette même corde longue de $\frac{cc}{2b}$ pieds, ſuſpendue verticalement. Où il ſera bon de remarquer que cette longueur $\frac{cc}{2b}$ eſt en même tems le demi-paramètre a de la parabole que forme la corde tendue en B & D par la force $F = \lambda \cdot \frac{cc}{2b}$.

§. 14.

Scholie 1.

§. 14. Pour ſavoir ſi une corde eſt en étât de ſupporter ce degré de tenſion, il faut voir quel poids un morceau de cette même corde peut porter avant que d'en être déchiré, & chercher la longueur d'une corde de la même eſpèce qui auroit le même poids. Que ſi cette longueur étoit de l pieds, pour que la corde ſût en état de ſupporter la tenſion F, il faudroit que $l > \frac{cc}{v}$. En indiquant donc par C la circonférence de la corde, exprimée en lignes, par P le poids qu'elle a porté, & par n le poids d'un pied cubique de cette corde, le poids de cette corde longue de l pieds ſera $= \frac{nCCl}{4 \cdot 12^4 \cdot \pi}$, ce qui étant mis égal à P donne la longueur $l = \frac{4 \cdot 12^4 \cdot \pi P}{nCC}$. De là on voit que la plus grande tenſion qu'une corde peut ſoûtenir eſt celle qui fait

$$b = \frac{nccCC}{4 \cdot 12^4 \cdot \pi P}.$$

Scholie 2.

§. 15. On trouve dans la Phyſique de Muſſchenbroek un grand nombre d'expériences ſur la fermeté des cordes, qui ſeroient très-propres à déterminer la longueur l ſi l'auteur eût indiqué la peſanteur ſpécifique des cordes ſoumiſes à ſes expériences. Faute de connoître la valeur de n pour chaque eſpèce, je mettrai conſtamment $n = 60$ livres de Ruſſie ou 53 livres de Leyde, nombre moyen que m'ont donné pluſieurs obſervations; & en faiſant uſage des expériences rapportées dans la traduction Françoiſe de l'ouvrage cité, par Sigaud de la Fond, Tome 2. page 58., je trouve

(*)

(*) Pour C = 6 lignes	& P = 190 ℔,	l =	25948
- - - 8	- - - 330	- -	25351
- - - 10	- - - 540	- -	26549
- - - 12	- - - 750	- -	25607
- - - 13	- - - 840	- -	24437
- - - 15	- - - 990	- -	21633
- - - 16	- - - 1030	- -	19781
- - - 20	- - - 2080	- -	25566
- - - 24	- - - 3000	- -	25607
- - - 30	- - - 4730	- -	25839
- - - 36	- - - 7000	- -	26555

& d'après une autre expérience rapportée p. 85.

Pour C = 36 lignes & P = 6816 ℔, $l = 25857$.

En prenant le milieu nous aurons $l = 24894$ d'où nous voyons qu'en tendant une corde dont la circonférence ſurpaſſe 6 lignes au point que $b = \frac{cc}{50000}$, ce ſera tout ce qu'on pourra ſe promettre de ſa fermeté enviſagée ſous ce point de vue général.

Problème particulier 3.

§. 16. *Si chaque élément Yy d'une corde BAYD, ſuspendue dans les points B et D de la ligne horiſontale BD, porte outre ſon propre poids, encore un poids proportionnel à l'élément Xx de la droite BD, trouver la courbe que la cor-*

(*) Les nombres de la premiere colonne ſont donnés dans l'ouvrage cité pour le *diamètre* de la corde; mais il eſt évident qu'ils en marquent la *circonférence*; car autrement les valeurs de l deviendroient presque dix fois plus petits, ce qui eſt impoſſible. Auſſi la dernière expérience, qui eſt ſi bien d'accord avec les précédentes, & où C marque expreſſément la circonférence, prouve-t'elle ce que j'avance. Dans l'original les nombres C ſont nommés ſimplement *craſſities*.

corde formera dans l'état d'équilibre & la tenſion dans chaque point.

Solution.

Par C, milieu de BD tirons la droite verticale AC, & du point Y abaiſſons ſur AC la perpendiculaire YP. Mettons $AC = b$, $CB = CD = c$, $AP = x$, $PM = y$ & l'arc $AY = s$; & puiſque $Yy = \partial s$, en indiquant par ff l'épaiſſeur de la corde, le poids de l'élément Yy ſera $ff\partial s$. Or comme cet élément doit porter encore un autre poids proportionnel à $Xx = \partial y$, que nous mettrons $= gg\partial y$, toute la force verticale qui agit ſur l'élément Yy ſera

$$q\partial s = ff\partial s + gg\partial y,$$

de ſorte que la ſomme des forces verticales élémentaires qui agiſſent ſur l'arc AY eſt

$$\int q\partial s = C + ffs + ggy.$$

Quant aux forces horiſontales, comme il n'y en a point dans le cas préſent, on a $p\partial s = 0$ & $\int p\partial s = A$. L'équation fondamentale trouvée dans la premiere ſolution du problème général deviendra donc ici

$$A\partial x = \partial y(C + ffs + ggy).$$

En prenant les quarrés & mettant $\partial s^2 - \partial y^2$ à la place de ∂x^2, cette équation devient

$$AA(\partial s^2 - \partial y^2) = \partial y^2(C + ffs + ggy)^2$$

de laquelle on tire

$$A\partial s = \partial y\sqrt{[AA + (C + ffs + ggy)^2]}.$$

Pour ſéparer les variables, je mettrai $C + ffs + ggy = z$, de ſorte que $s = \frac{z - C - ggy}{ff}$ & $\partial s = \frac{\partial z - gg\partial y}{ff}$, ce qui étant ſub-

ſubſtitué, l'équation prendra cette forme:

$$\frac{A\partial z - A g g \partial y}{ff} = \partial y \sqrt{(AA + zz)};$$

de laquelle réſulte pour la courbe l'équation

$$\partial y = \frac{A\partial z}{Agg + ff\sqrt{(AA + zz)}}.$$

Quant à la tenſion, ayant trouvé §. 3. $T \sin. \Phi = \int q \partial s$, on aura $T = \frac{\int q \partial s}{\sin. \Phi}$. Or $\text{tang.} \Phi = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{C + ffs + ggy}{A} = \frac{z}{A}$, donc $\sin. \Phi = \frac{z}{\sqrt{(AA + zz)}}$, & partant $T = \sqrt{(AA + zz)}$.

Corollaire 1.

§. 17. Suppoſons que la corde ſoit tendue au point que b puiſſe être regardé comme fort petit en comparaiſon de c, & l'arc AY différera ſi peu de l'ordonnée PY, qu'on pourra mettre $s = y$ & $\int q \partial s = C + (ff + gg) y$. Ainſi notre équation ſera

$$A \partial x = \partial y [C + (ff + gg) y],$$

dont l'intégrale eſt

$$A x = C y + \tfrac{1}{2}(ff + gg) y y.$$

Or la conſtante C doit être déterminée de façon qu'en mettant $x = b$ il y ait $y = c$, d'où l'on déduit

$$C = \frac{Ab}{c} - \tfrac{1}{2} c (ff + gg).$$

Cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation, celle-ci deviendra

$$A x = [\tfrac{Ab}{c} - \tfrac{1}{2} c (ff + gg)] y + \tfrac{1}{2}(ff + gg) y y,$$

où la conſtante A doit être déterminée de manière que ſi l'on met $x = b$, il y ait $y = -c$, ce qui donne $A = \frac{cc(ff + gg)}{2b}$ & partant $C = 0$. L'équation pour la courbe ſera donc

$ccx = byy$, équation pour une parabole qui a ſon ſommet en A, & dont le paramètre eſt $\frac{cc}{2b}$.

Corollaire 2.

§. 18. Pour la tenſion au point Y, à cauſe de

$$A = \frac{cc(ff+gg)}{2b} \text{ \& } z = (ff+gg)y,$$

elle ſera

$$T = \sqrt{\left[\frac{c^4(ff+gg)^2}{4bb} + (ff+gg)^2 yy\right]},$$

expreſſion qui, en mettant à la place de y^2 ſa valeur $\frac{ccx}{b}$, pourra être repréſentée ainſi :

$$T = \frac{c(ff+gg)}{2b}\sqrt{(cc+4bx)}.$$

Ainſi en mettant $x = o$, on aura la tenſion au point A, ſavoir $T = \frac{cc(ff+gg)}{2b}$, & en mettant $x = b$, on trouvera la tenſion dans les points B et D, qui eſt

$$T = \frac{c(ff+gg)}{2b}\sqrt{(cc+4bb)}.$$

Corollaire 3.

§. 19. Soit l la longueur qu'une corde, dont l'épaiſſeur $= ff$, devroit avoir, pour être déchirée par ſon propre poids, lorſqu'on la ſuſpend verticalement, & il faudra que $ffl > \frac{c(ff+gg)}{2b}\sqrt{(cc+4bb)}$. En ſuppoſant donc attaché à des fils verticaux BE, AH, YQ, DF. &c. ſuſpendus dans pluſieurs points de la corde, un pont EF dont la longueur $= BD = 2c$, & l'épaiſſeur reduite à la même matiere $= gg$, il eſt clair que ſi $l < \frac{c(ff+gg)\sqrt{(cc+4bb)}}{2bff}$, la corde ne ſera pas en état de porter le pont.

Scho-

Scholie.

§. 20. Pour le projet qui a donné occaſion à ces recherches il y a d'après les deſſins de l'auteur $c = 415$ pieds & $b = 20$ pieds, & il faudroit, d'après le paragraphe précédent que $l > \frac{4325\,(ff + gg)}{ff}$. Or ſelon les regles que l'auteur donne pour la fabrication des chaines principales & du pont ſuspendu, on peut évaluer le profil des premieres à 24 pouces quarrées chacune; & après avoir reduit en profil de fer toutes les parties qui compoſent le pont, & les fardeaux qu'il peut être dans le devoir de porter, en trouve par un calcul très modique, un profil de 504 pouces quarrées, dont une des quatre chaines principales aura à porter la quatrième partie, deſorte que $ff = 24$ & $gg = 126$; par conſéquent il faudroit que $l > 27000$ pieds.

Mais en évaluant le poids de ces chaines, ſelon les données du mémoire, je trouve qu'une portion longue d'un pied peſeroit 107 livres de Ruſſie. Ainſi chaque chaine, pour être en état de porter la quatrième partie du pont qui y eſt ſuspendu, devroit avoir aſſez de force pour que le premier chainon, quand elle eſt ſuspendue verticalement, pût réſiſter au poids de la chaine entiere longue de 27000 pieds, c'eſt à dire à un poids de 2889000 livres.

Or ſelon les expériences que Muschenbroek a faites ſur la cohéſion des fils métalliques, un fil de fer de $\frac{1}{10}$ pouce du pied de Rhin de diamètre a été rompu par un poids de 450 livres d'Amſterdam. Ainſi un fil de 0,008326 pouces quarrées de Londres ſera rompu par un poids de $543\frac{1}{2}$ livres de Ruſſie. D'où il ſuit qu'un cylindre de 6 pouces

X 2 quar-

quarrées d'épaiſſeur, tel que ceux dont les chainons ſont faits, ne pourra pas porter un poids de 391-00 livres, ſans ſe rompre, d'autant moins que la forge la plus ſoigneuſe ne peut pas donner à une telle maſſe le degré de fermeté & d'homogénéité que doit avoir eu le fil de fer de l'expérience mentionnée, qui a paſſé à différentes repriſes par la filière. De là il eſt évident que le double cylindre ne pourra pas porter un poids de 2589000 livres, ſurtout lorsque ce poids eſt ſuſpendu dans le milieu recourbé du double cylindre, comme la chaine eſt ſuſpendue au premier chainon.

TRIGONOMETRIA SPHAERICA
E
PTOLEMAEO.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conventui exhibit. die 22 Decemb. 1796.

§. 1.

Quae in Triangulis tam orthogonalibus quam aliis occurrunt Problemata tam intricata ſunt nexuque tam arcto cohaerent, ut recentiorum Geometrarum non pauci magnum in id contulerint ſtudium ut ex uno principio generali omnia illa Problemata ſolverent omnesque quibus Trigonometria Sphaerica componitur proportiones derivarent. Nemo autem quantum equidem ſciam, hunc in finem Theorema illud adhibuit, quo in *Almageſto* ſuo uſus eſt *Claudius Ptolemaeus* ad ſolvendum nonnulla problemata in triangulis ſphaericis rectangulis obvia e. gr. ad determinandum arcuum Eclipticae declinationem rectamque ascenſionem (*). Quamobrem non inutile duxi oſtendere, quomodo exinde cuncta trigonometriae ſphaericae problemata facillime ſolvantur, ut itaque *Ptolemaeus* Trigonometriae Sphaericae non minus quam Aſtronomiae conditor iure ſit appellandus.

§. 2.

(*) Almag Lib. I. Cap. 13. 14.

§. 2. Poſtquam Ptolemaeus docuit, datis quibuscunque circuli arcubus, duplorumque arcuum chordis (quarum ſemiſſes *ſinus* appellamus), invenire tum chordam complementi ad ſemicirculum (*coſinum*), tum ſummae binorum arcuum ac differentiae duplae chordam, etc. horumque dogmatum ope omnium arcuum ad ſingula quindecim minuta ſinus & coſinus computavit (*), ad triangula ſphaerica orthogonalia progreſſurus ſequens praemittit Theorema, idque ſequente modo demonſtrat (**).

Theorema.

Tab. II. Fig. 5. §. 3. *Ductis quibuscunque & in quolibet ſitu maximorum circulorum in ſphaerae ſuperficie arcubus AB, AG, & e terminis eorum B, G, arcubus BE, GD, qui arcui oppoſito in E, D, ſibi invicem in F occurrant, ſemper chordarum duplorum arcuum GE, AE, ratio compoſita eſt e rationibus chord. 2 GF : chord. 2 DF, & chord. 2 BD : ch. 2 BA;* h. e. ſin GE : ſin AE = ſin GF. ſin BD ; ſin DF. ſin BA.

Demonſtratio huius Theorematis pluribus aliis, quae tanquam Lemmata hic praemittemus, innititur.

Lemma.

Fig. 6. §. 4. *Ductis quibuscunque rectis AB, AG, & e terminis earum B, G, rectis BE, GD, quae lineis oppoſitis in E, D ſibi invicem in F occurrant, ratio AG : AE compoſita eſt e rationibus DG : DF & BF : BE.* Ducta namque EI parallela rectae GD, erit AG : AE = DG : EI = DG.DF : DF.EI, ſeu ob DF : EI = BF : BE, AG : AE = DG.BF : DF.BE. Q. E. D.

Lem-

(*) l. c. Cap. 9. 10.

(**) l. c. Cap. 12.

Lemma.

§. 5. *Eadem facta conſtructione ratio GE : AE compoſita eſt e rationibus GF : FD & BD : BA.* Ducta nempe AH # BE, quae rectae GD occurrat in H, habemus GE : AE = GF : FH = GF . FD : FD . FH, unde ob FD : DH = BD : AD, ideoque FD : FH = BD : BA, ſequitur GE : AE = GF . BD : FD . BA. Q. E. D.

Lemma.

§. 6. *Aſſumtis in ſemicirculo tribus quibuscunque punctis A, B, G, ductaque chorda AG, cui radius CB occurrat in E, chordae duplorum arcuum AB, BG, ſunt in ratione rectarum AE, EG.* Demiſſis enim in radium normalibus AF, GH, chordae arcuum 2AB, 2BG, ſunt ut earum ſemiſſes AF, GH, unde ob AF : GH = AE : EG, ſequitur Lemma. Fig. 7.

Lemma.

§. 7. *Aſſumtis in ſemicirculo tribus punctis A, B, G, ductaque per centrum C & punctum A diametro HE, quae chordae prolongatae GB in E occurrat, chordae duplorum arcuum AG, AB, ſunt in ratione rectarum EG, EB.* Ductis etenim in diametrum normalibus BF, GH, chordae duplorum arcuum AG, AB, ſunt ut earum ſemiſſes GH, BF, h. e. ut rectae EG, EB. Q. E. D. Fig. 8.

§. 8. Hinc iam facilis erit Theorematis propoſiti (§. 3.) demonſtratio. Ductis enim e Sphaerae centro C radiis CB, CF, CE, qui chordis AD, GD, AG, in punctis T I L, occurrant, linea per haec tria puncta T I L erit recta, interſectio ſcilicet planorum circuli maximi BFEC, atque Fig. 9.

que trianguli G A D. Habemus itaque quatuor rectas A G, A T, G D, T L, in quibus eſt GL:AL = GI.TD:DI.TA (§. 5.). Quare cum ſit GL:AL = ſin GE:ſin AE (§. 6.), GI:DI = ſin GF:ſin DF (§. 6.), & TD:TA = ſin BD:ſin BA (§. 7.), ſequitur ſin GE:ſin AE = ſin GF.ſin BD:ſin DF.ſin BA, quod erat Theorema propoſitum (§. 5.).

§. 9. Huic Theoremati Ptolemaeus aliud tanquam Corollarium ſine demonſtratione ſubiungit, quod hic breviter demonſtraſſe iuvabit.

Theorema.

Fig 10. *In Sphaerae ſuperficie circulorum maximorum arcubus ut ſupra ductis quibuscunque AB, AG, BE, GD, eſt ſin AG:ſin AE = ſin GD.ſin BF:ſin DF.ſin BE.*

Demonſtratio.

Ductis e Sphaerae centro C radiis C A, C D, C B, qui chordis prolongatis GE, GF, EF, in punctis L, I, T, occurrant, tria haec puncta erunt in linea recta LIT, interſectione nempe planorum circuli ADBC, & trianguli rectilinei GEF. Quatuor itaque habemus rectas LT, LG, TE, GI, in quibus haec obtinet proportio: LG:LE = GI.TF:IF.TE (§. 4.). Quare cum ſit (§. 7.) LG:LE = ſin AG:ſin AE, IG.IF = ſin DG:ſin DF, TF:TE = ſin BF:ſin BE, nanciscimur ſin AG:ſin AE = ſin DG.ſin BF:ſin DF.ſin BE. Q. E. D.

§. 10. Nihil iam ſupereſt, niſi ut oſtendamus, quo pacto e duplici hoc Theoremate omnes Trigonometriae Sphaericae proportiones derivari, omniaque quae in triangulis ſphae-

ſphaericis cum rectangulis tum obliquangulis occurrunt problemata, ſolvi poſſint. Quem in ſinem brevitatis cauſa binas hic adiiciemus tabulas, quae omnia Trigonometriae Sphaericae problemata ob oculos ponunt.

Tab. I. pro Triangulis rectangulis.

Praeter angulum rectum

Dantur	*Quaeritur*
I. Bina latera	
1. Bini Catheti - -	*a*) Hypothenuſa.
	b) Alteruter angulus.
2. Hypothenuſa & Cathetus -	*a*) Alter Cathetus.
	b) Angulus interpoſitus.
	c) Angulus oppoſitus.
II. Latus & angulus	
1. Cathetus & angulus attingens	*a*) Alter angulus.
	b) Alter Cathetus.
	c) Hypothenuſa.
2. Cathetus & angulus oppoſitus	*a*) Alter angulus.
	b) Alter Cathetus.
	c) Hypothenuſa.
3. Hypothenuſa et angulus -	*a*) Alter angulus.
	b) Cathetus attingens.
	c) Cathetus oppoſitus.
III. Bini anguli - - - -	*a*) Hypothenuſa.
	b) Alteruter Cathetus.

§. 11.

Tab. II. pro Triangulis obliquangulis.

Dantur	*Quaeritur*
I. Tria latera - - - - - -	Angulus.

Dantur	*Quaeritur*
II. Duo latera cum angulo	
1. interpoſito - - -	a) Tertium latus.
	b) Alteruter angulus.
2. oppoſito - - -	a) Angulus interpoſitus.
	b) Angulus alteri lateri oppoſitus.
	c) Tertium latus.
III. Duo anguli cum latere	
1. interpoſito - - -	a) Tertius angulus.
	b) Alterutrum latus.
2. oppoſito - - -	a) Tertius angulus.
	b) Latus interpoſitum.
	c) Latus alteri angulo oppoſitum.
IV. Tres anguli - - -	Latus.

§. 12. Propoſito iam Triangulo ſphaerico BDF rectangulo ad D, prolongentur DF, BD, donec ſint DG, BA, quadrantes, perque puncta G, A, ducatur circulus maximus, cui Hypothenuſa BF prolongata occurrat in puncto E. Cum itaque ſit angulus D rectus & GD $= 90°$, erit G polus circuli BA, ideoque BA $= 90°$, & angulus A rectus, unde ſequitur, circuli GA polum eſſe in B, conſequenter BE $= 90°$ angulumque E rectum.

Fig. 11.

§. 13. Inter quatuor circulos AB, AG, BE, GD, haec intercedit relatio (§. 3.):

$$\text{ſin}\, GE = \frac{\text{ſin}\, AE \cdot \text{ſin}\, GD \cdot \text{ſin}\, BD}{\text{ſin}\, DE \cdot \text{ſin}\, BA}, \text{ h. e.}$$

$$\text{coſ}\, AE = \frac{\text{ſin}\, AE \cdot \text{coſ}\, DF \cdot \text{ſin}\, BD}{\text{ſin}\, DE \text{ [illegible]}},$$

unde

unde poſito $BF = \alpha$, $DF = \beta$, $BD = \gamma$, nanciſcimur

$$\text{tang}\, B \,\text{ſin}\, \gamma = \text{tang}\, \beta\,,$$

qua aequatione ſolvuntur caſus I. 1. *b*. II. 1. *b*. II. 2. *b*. (§. 10.).

§. 14. Eodem modo, permutatis arcubus AB, AG, fit (§. 3.)

$$\text{ſin}\, BD = \frac{\text{ſin}\, AD\, \text{ſin}\, BF\, \text{ſin}\, GE}{\text{ſin}\, EF\, \text{ſin}\, AG} = \frac{\text{coſ}\, BD\, \text{ſin}\, BF\, \text{coſ}\, AE}{\text{coſ}\, BF}, \text{ h. e.}$$

$$\text{tang}\, \gamma = \text{tang}\, \alpha \,\text{coſ}\, B\,,$$

qua aequatione reſolvuntur caſus I. 2. *b*. II. 1. *c*. II. 3. *b*. (§. 10.).

§. 15. Altera adhibita proportione (§. 9.) nanciſcimur

$$\text{ſin}\, AG = 1 = \frac{\text{ſin}\, AE\, \text{ſin}\, GD\, \text{ſin}\, BF}{\text{ſin [illegible] ſin [illegible]}\, E},$$

proinde $\text{ſin}\, AE\, \text{ſin}\, BF = \text{ſin}\, DF$, h. e.

$$\text{ſin}\, B\, \text{ſin}\, \alpha = \text{ſin}\, \beta\,,$$

qua aequatione reſolvuntur caſus I. 2. *c*. II. 2. *c*. II. 3. *c*. (§. 10.).

§. 16. Permutatis arcubus AB, AG, per eandem proportionem (§. 9.) habemus

$$\text{ſin}\, AB = 1 = \frac{\text{ſin}\, AD\, \text{ſin}\, BE\, \text{ſin}\, FG}{\text{ſin}\, EF\, \text{ſin}\, DG},$$

h. e. $\text{ſin}\, AD\, \text{ſin}\, FG = \text{ſin}\, EF$, conſequenter

$$\text{coſ}\, \gamma\, \text{coſ}\, \beta = \text{coſ}\, \alpha\,,$$

unde ſolvuntur caſus I. 1. *a*. I. 2. *a*. (§. 10.).

§. 17. Aequationes (§. 13. 15.) univerſaliter pro omnibus Triangulis orthogonalibus demonſtrata, ſi iam in Triangulo GEF ad E rectangulo adhibeantur, nanciſcimur (§. 13.) tang F ſin EF = tang EG, h. e.

tang F coſ α = cot B,

qua aequatione reſolvuntur caſus II. 3. *a*. III. *a*. (§. 10.).

§. 18. In eodem Triangulo eſt (§. 15.) ſin F ſin FG = ſin EG, h. e.

ſin F coſ β = coſ B,

unde ſolvuntur caſus II. 1. *a*. II. 2. *a*. III. *b*. (§. 10.); atque his ſex aequationibus omnia Trigonometriae ſphaericae rectangulae problemata reſoluta ſunt.

§. 19. Propoſito iam Triangulo ſphaerico non rectan-
Fig. 12. gulo ABC, cuius anguli ſunt A, B, C, latera BC = α, AC = β, AB = γ, priora α et β producantur, donec fuerit CE = CD = 90°, ideoque C polus circuli ED, cui arcus BA productus occurrat in F: ſicque orientur Triangula BEF, ADF, ad E, D, rectangula, ubi BE = 90° − α, AD = 90° − β, ED = C, DAF = A, EBF = 180° − B.

§. 20. In his Triangulis, per proprietates rectangulorum modo demonſtratas, habemus (§. 15.) coſ F = ſin EBF coſ EB, et coſ F = ſin DAF coſ AD, unde ſequitur

ſin B ſin α = ſin A ſin β,

qua aequatione reſolvuntur caſus II. 2. *b*. III. 2. *c*. (§. 11.).

§. 21. Ibidem eſt (§. 13.) tg EF = tg EBF ſin EB = − tg B coſ α, tg DF = tg A coſ β, et (§. 14.) tg BF = $\frac{\text{tang BE}}{\text{coſ EBF}}$ =

$= \frac{\cot\alpha}{\cos B}$; tang A F $= \frac{\cot\beta}{\cos A}$: unde nanciſcimur tang E D $=$ tang (E F — D F), h. e.

$$\text{tang } C = \frac{\text{tang } B \cos\alpha + \text{tang } A \cos\beta}{\text{tang } B \,\text{tang } A \cos\alpha \cos\beta - 1},$$

unde ſequitur ſolutio caſuum II. 2. *a*. III. 2. *a*. (§. 11.): datis nempe ternis quantitatum A, B, α, β, datur et quarta (§. 20.).

§. 22. Eodem modo reperitur (§. 21.) tang A B $=$ tang (B F — A F), h. e.

$$\text{tang } \gamma = \frac{\cot\alpha \cos A + \cot\beta \cos B}{\cot\alpha \cot\beta - \cos A \cos B}, \text{ ſive}$$

$$\text{tang } \gamma = \frac{\cos A \,\text{tang } \beta + \cos B \,\text{tang } \alpha}{1 - \cos A \cos B \,\text{tang } \alpha \,\text{tang } \beta},$$

quae aequatio offert ſolutionem caſuum II. 2. c. III. 2. b. (§. 11.).

§. 23. In Triangulis orthogonalibus B E F, A D F, habemus

$$\text{tang } F = \frac{\text{tang } B E}{\sin E F} = \frac{\text{tang } A D}{\sin D F} \text{ (§. 13.)}$$
$$= \frac{\cot E B F}{\cos B F} = \frac{\cot D A F}{\cos A F} \text{ (§. 17.), et}$$
$$\sin F = \frac{\sin B E}{\sin B F} = \frac{\sin A D}{\sin A F} \text{ (§. 15.)}$$
$$= \frac{\cos E B F}{\cos E F} = \frac{\cos D A F}{\cos D F} \text{ (§. 18.)},$$

unde ſequentes obtinemus aequationes:

$$\sin E F = \frac{\text{tang } \beta}{\text{tang } \alpha} \sin D F, \quad \cos E F = -\frac{\cos B}{\cos A} \cos D F,$$
$$\sin B F = \frac{\cos\alpha}{\cos A} \cos D F, \quad \cos B F = -\frac{\text{tang } \beta}{\text{tang } B} \sin D F,$$
$$\sin A F = \frac{\cos\beta}{\cos A} \cos D F, \quad \cos A F = \frac{\text{tang } \beta}{\text{tang } A} \sin D F.$$

Cum itaque poſito $1 + \text{tang}^2 A \cos^2\beta = R^2$ ſit (§. 21.)

$$\sin D F = \frac{\text{tang } A \cos\beta}{R}, \quad \cos D F = \frac{1}{R},$$

aequa-

aequationes illae abeunt in ſequentes:

$1.\ \mathrm{ſin}\,EF = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{tang}\,A}{R\ \mathrm{tang}\,\alpha},\quad 2.\ \mathrm{coſ}\,EF = -\frac{\mathrm{coſ}\,B}{R\ \mathrm{coſ}\,A},$

$3.\ \mathrm{ſin}\,BF = \frac{\mathrm{coſ}\,\alpha}{R\ \mathrm{coſ}\,A},\quad 4.\ \mathrm{coſ}\,BF = -\frac{\mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{tang}\,A}{R\ \mathrm{tang}\,B},$

$5.\ \mathrm{ſin}\,AF = \frac{\mathrm{coſ}\,\beta}{R\ \mathrm{coſ}\,A},\quad 6.\ \mathrm{coſ}.\,AF = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta}{R}.$

§. 24. Quare cum ſit $C = ED = EF - DF$, et $\gamma = BF - AF$, reperitur

$\mathrm{ſin}\,C = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A + \mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{tang}\,A\ \mathrm{coſ}\,B}{R^2\ \mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,A}$ (§. 23. *n.* 1. 2.),

$\mathrm{coſ}\,C = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A\ \mathrm{tang}\,A - \mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,B}{R^2\ \mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,A}$ (§. 23. *n.* 1. 2.),

$\mathrm{ſin}\,\gamma = \frac{\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{tang}\,B + \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{tang}\,A}{R^2\ \mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{tang}\,B}$ (§. 23. *n.* 3. 4. 5. 6.),

$\mathrm{coſ}\,\gamma = \frac{\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{tang}\,B + \mathrm{ſin}^2\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A\ \mathrm{coſ}\,A}{R^2\ \mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{tang}\,B}$ (§. 23. *n.* 3. 4. 5. 6.).

§. 25. Hinc reperitur $R^2(\mathrm{coſ}\,\gamma - \mathrm{coſ}\,C\ \mathrm{ſin}\,\alpha\ \mathrm{ſin}\,\beta) =$
$\frac{\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{tang}\,B\,(1 - \mathrm{ſin}^2\,\beta\ \mathrm{ſin}^2\,A) + \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{coſ}\,A\,(\mathrm{ſin}\,\alpha\ \mathrm{ſin}\,B - \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A)}{\mathrm{coſ}^2\,A\ \mathrm{tang}\,B}$

$= \frac{\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta\,(1 - \mathrm{ſin}^2\,A\ \mathrm{ſin}^2\,\beta)}{\mathrm{coſ}^2\,A}$ (§. 20.) $= \frac{\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta\,(\mathrm{coſ}^2\,A + \mathrm{ſin}^2\,A\ \mathrm{coſ}^2\,\beta)}{\mathrm{coſ}^2\,A}$

$= R^2\,\mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta$ (§. 23.), proinde

$\mathrm{coſ}\,\gamma = \mathrm{coſ}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,\beta + \mathrm{ſin}\,\alpha\ \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{coſ}\,C,$

qua aequatione nititur ſolutio caſuum I. et II. 1. *a*. (§. 11).

§. 26. Eodem modo invenitur $R^2(\mathrm{coſ}\,\gamma\ \mathrm{ſin}\,A\ \mathrm{ſin}\,B - \mathrm{coſ}\,C) =$
$\frac{\mathrm{coſ}\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A\ \mathrm{tang}\,B\,(\mathrm{ſin}\,\alpha\ \mathrm{ſin}\,B - \mathrm{ſin}\,\beta\ \mathrm{ſin}\,A) + \mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{ſin}\,B\,(1 - \mathrm{ſin}^2\,A\ \mathrm{ſin}^2\,\beta)}{\mathrm{tang}\,\alpha\ \mathrm{coſ}^2\,A\ \mathrm{tang}\,B}$

$= \frac{\mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{coſ}\,B\,(1 - \mathrm{ſin}^2\,A\ \mathrm{ſin}^2\,\beta)}{\mathrm{coſ}^2\,A}$ (§. 20.) $= \frac{\mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{coſ}\,B\,(\mathrm{coſ}^2\,A + \mathrm{ſin}^2\,A\ \mathrm{coſ}^2\,\beta)}{\mathrm{coſ}^2\,A}$

$= R^2\,\mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{coſ}\,B$ (§. 23.), ideoque

$\mathrm{coſ}\,C = \mathrm{ſin}\,A\ \mathrm{ſin}\,B\ \mathrm{coſ}\,\gamma - \mathrm{coſ}\,A\ \mathrm{coſ}\,B,$

qua aequatione reſolvuntur caſus III. 1. *a*. et IV. (§. 11.).

§. 27.

§. 27. Subſtituto α loco γ, ideoque γ loco α et A loco C, fit (§. 25.) $\mathrm{coſ}\,\alpha = \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{coſ}\,\gamma + \mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,\gamma\,\mathrm{coſ}\,A$, ideoque

$$\mathrm{coſ}\,C = \frac{\mathrm{coſ}\,\gamma - \mathrm{coſ}\,\alpha\,\mathrm{coſ}\,\beta}{\mathrm{ſin}\,\alpha\,\mathrm{ſin}\,\beta} = \frac{\mathrm{coſ}\,\gamma\,\mathrm{ſin}\,\beta - \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,\gamma\,\mathrm{coſ}\,A}{\mathrm{ſin}\,\alpha}.$$

Quare cum ſit (§. 20.) $\mathrm{ſin}\,C = \frac{\mathrm{ſin}\,\gamma\,\mathrm{ſin}\,A}{\mathrm{ſin}\,\alpha}$, et $\mathrm{tang}\,C = \frac{\mathrm{ſin}\,C}{\mathrm{coſ}\,C}$, reperitur

$$\mathrm{tang}\,C = \frac{\mathrm{ſin}\,A\,\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{coſ}\,\gamma - \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,\gamma\,\mathrm{coſ}\,A},$$

quae aequatio ſolvit caſum II. 1. *b*. (§. 11.).

§. 28. Simili modo eſt (§. 26.) $\mathrm{coſ}\,B = \mathrm{ſin}\,A\,\mathrm{ſin}\,C\,\mathrm{coſ}\,\beta - \mathrm{coſ}\,A\,\mathrm{coſ}\,C$, proinde

$$\mathrm{coſ}\,\gamma = \frac{\mathrm{coſ}\,C + \mathrm{coſ}\,A\,\mathrm{coſ}\,B}{\mathrm{ſin}\,A\,\mathrm{ſin}\,B} = \frac{\mathrm{coſ}\,C\,\mathrm{ſin}\,A + \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{coſ}\,A\,\mathrm{ſin}\,C}{\mathrm{ſin}\,B},$$

et $\mathrm{ſin}\,\gamma = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,C}{\mathrm{ſin}\,B}$ (§. 20.), unde ob $\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{\mathrm{ſin}\,\gamma}{\mathrm{coſ}\,\gamma}$, fit

$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,C}{\mathrm{ſin}\,A\,\mathrm{coſ}\,C + \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{coſ}\,A\,\mathrm{ſin}\,C},$$

qua aequatione ſolvitur caſus III. 1. *b*. (§. 11.).

Sic igitur ope unius Theorematis Ptolemaici omnia Trigonometriae Sphaericae problemata perfecte ſunt reſoluta, neque ulla ex methodis hactenus uſitatis quoad brevitatem huic videtur anteferenda.

ME-

MÉMOIRE
SUR LA RÉSOLUTION
DES PRINCIPAUX PROBLÈMES
QU'ON PEUT PROPOSER DANS LES COURBES DONT LES ORDONNÉES PARTENT D'UN POINT FIXE.

Par

S. GOURIEFF.

Préſenté à l'Académie le 22 Mai, 1797.

Pour tirer la tangente, déterminer le rayon de courbure, rectifier & trouver la quadrature des courbes, dont les ordonnées partent d'un point fixe, tous les écrivains, tant que je ſache, employent une méthode différente de celle, par laquelle ils trouvent tout cela dans les courbes dont les ordonnées ſont priſes parallèles entr'elles; on y ajoute toujours quelque conſtruction plus ou moins compoſée, en y introduiſant de petits triangles courvilignes, qui quelque fois embarraſſent la demonſtration de façon qu'il eſt presqu'-impoſſible de la retenir dans la mémoire. (*) Maclaurin, qui

(*) Voyez, par exemple, le cours de Mathématiques à l'uſage de la marine de M. Bezout, vol. 4. pag. 94.

qui dans ſon excellent ouvrage intitulé *Treatiſe of Fluxions*, avoit le même but que moi dans mes principes de la Géométrie tranſcendante & du calcul différentiel, a été obligé de ſuppoſer & d'introduire pour ces courbes une partie conſidérable de l'ouvrage d'Archimède ſur la Spirale, ouvrage que le ſavant Mathématicien Bouillaud, de ſon propre aveu, n'a jamais bien compris, & que l'illuſtre Viète ſoupçonnoit injuſtement d'un paralogisme. Il m'eſt venu une idée de dériver tout cela des mêmes principes, ou plûtot de ceux qui ont lieu dans les courbes dont les ordonnées ſont parallèles. Et cette méthode eſt auſſi ſimple & aiſée que directe & naturelle; de ſorte que par ſon moyen j'ai été immédiatement conduit à déterminer la ſurface & la ſolidité des corps produits par la révolution de ces courbes autour d'une ligne invariable, & même à trouver les centres de gravité; c'eſt ce qu'on n'a jamais entrepris. Et comme tout cela peut contribuer en quelque façon à perfectioner la Géométrie ſublime, j'ai réſolu de préſenter ce mémoire à l'Académie.

I.

Soit A M une courbe, dans laquelle la relation entre le rayon vecteur F M ($= z$) & l'angle A F M ($= \omega$) eſt connue, & il s'agit de tirer la tangente M T. Pour cela tout revient à trouver l'angle T M F, ou quelque ligne trigonométrique apartenante à cet angle, en z & ω. Ainſi ſuppoſons l'angle F T M $= \phi$, menons l'ordonnée M P ($= y$) & prenons quelque point pour l'origine des abſciſſes & la ligne A P ($= x$) pour l'abſciſſe même; alors, puisque $\phi + \omega +$ T M F $=$ deux droits, on aura ſin. T M F $=$ ſin. $(\phi + \omega)$, coſ. T M F $= -$ coſ. $(\phi + \omega)$ & tang. T M F $= -\frac{\text{ſin.}\,(\phi+\omega)}{\text{coſ.}\,(\phi+\omega)}$. Mais comme Tab. III. Fig. 1.

$$\text{ſin.}(\Phi + \omega) = \text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega,$$
$$\text{coſ.}(\Phi + \omega) = \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega,$$
$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}} \;\&\; \text{coſ}\,\Phi = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}},$$

il y aura

$$\text{ſin.}\,TMF\,[= \text{ſin.}(\Phi + \omega)] = \frac{\text{coſ.}\,\omega\,\partial y + \text{ſin.}\,\omega\,\partial x}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}},$$
$$\text{coſ.}\,TMF\,[= -\,\text{coſ.}(\Phi + \omega)] = \frac{\text{ſin.}\,\omega\,\partial y - \text{coſ.}\,\omega\,\partial x}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\,TMF = \frac{\text{coſ.}\,\omega\,\partial y + \text{ſin.}\,\omega\,\partial x}{\text{ſin.}\,\omega\,\partial y - \text{coſ.}\,\omega\,\partial x}.$$

À préſent puiſque $y = z\,\text{ſin.}\,\omega$, $v = z\,\text{coſ.}\,\omega$, où $v = PF$, & par conſéquent

$$\partial y = z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z,$$
$$\partial v = \text{coſ.}\,\omega\,\partial z - z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega \;\&$$
$$\partial x\,(= -\,\partial v) = z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z,$$

on aura, en plaçant dans les expreſſions de ſin. T M F, de coſ. T M F & de tang. T M F au lieu de ∂y & ∂x leurs valeurs,

$$\text{ſin.}\,TMF = \frac{\text{coſ.}\,\omega(z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z) + \text{ſin.}\,\omega(z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z)}{\sqrt{[(z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z)^2 + (z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z)^2]}}$$
$$= \frac{z\,(\text{coſ.}^2\,\omega + \text{ſin.}^2\,\omega)}{\sqrt{[z^2\,\partial\omega^2\,(\text{coſ.}^2\,\omega + \text{ſin.}^2\,\omega) + (\text{ſin.}^2\,\omega + \text{coſ.}^2\,\omega)\,\partial z^2]}} = \frac{z\,\partial\omega}{\sqrt{(z^2\,\partial\omega^2 + \partial z^2)}},$$
$$\text{coſ.}\,TMF = \frac{\text{ſin.}\,\omega\,(z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z) - \text{coſ.}\,\omega\,(z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z)}{\sqrt{(z^2\,\partial\omega^2 + \partial z^2)}}$$
$$= \frac{(\text{ſin.}^2\,\omega + \text{coſ.}^2\,\omega)\,\partial z}{\sqrt{(z^2\,\partial\omega^2 + \partial z^2)}} = \frac{\partial z}{\sqrt{(z^2\,\partial\omega^2 + \partial z^2)}}, \;\&$$
$$\text{tang.}\,TMF = \frac{z\,\partial\omega}{\partial z}.$$

Mais ordinairement au lieu de l'angle T M F on détermine une perpendiculaire F R, élevée ſur le rayon vecteur F M du foyer F juſqu'à l'interſection R avec la tangente prolongée. Ainſi, puiſque

T M

$$TM = \frac{y}{\partial y} \sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)} = \frac{y}{\partial y} \sqrt{(z^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)},$$

nous trouvons

$$TQ (= TM.\ \text{ſin.}\ TMF) = \frac{z y \partial \omega}{\partial y} \text{ et}$$
$$MQ (= TM.\ \text{coſ.}\ TMF) = \frac{y \partial z}{\partial y};$$

enſuite par la ſimilitude des triangles TMQ & RMF nous avons $MQ : TQ = MF : FR$, ou $\frac{y \partial z}{\partial y} = \frac{z y \partial \omega}{\partial y} = z : FR$; d'où $FR = \frac{z^2 \partial \omega}{\partial z}$. Cette ligne perpendiculaire FR eſt ce qu'on appelle *la Soutangente* dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe.

Exemple.

Soit propoſé de tirer la tangente à la quadratrice de Dinoſtrate. Pour cet effet on cherche ordinairement la perpendiculaire TQ abaiſſée ſur le rayon vecteur du point d'interſection T de la tangente avec l'axe des abſciſſes. D'abord nous ſuivrons ce moyen, & nous prendrons la formule $TQ = \frac{z y \partial \omega}{\partial y}$, où $z = FM$, $y = MP$ & $\omega = AFM$; puis en déſignant l'arc mC par u, le quart de la circonférence, BC par c, le rayon par r & l'angle MFT par θ, nous aurons par la proprieté de la quadratrice $y : r = u : c$, ou $c y = r u = r^2 \theta$; d'où $r^2 \partial \theta = c \partial y$, & parceque $\partial \theta = - \partial \omega$, il y aura $\partial \omega = - \frac{c \partial y}{r^2}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = - \frac{c}{r^2}$ & Tab. III. Fig. 2.

$$TQ = - \frac{c y z}{r^2} = - \frac{r u z}{r^2} = - \frac{u z}{r},$$

c'eſt-à-dire la même expreſſion qui ſe trouve chez tous les auteurs.

Et à préſent, connoiſſant la perpendiculaire TQ, nous pouvons déterminer TR. Pour cet effet il faut d'abord

bord trouver $MQ = \frac{y \partial z}{\partial y}$; ainſi puisque $y = z \,\text{ſin.}\, \theta$, nous trouvons $\partial y = z \,\text{coſ.}\, \theta \partial \theta + \text{ſin.}\, \theta \partial z$, $\text{ſin.}\, \theta \partial z = \partial y - z \,\text{coſ.}\, \theta \partial \theta$ & $z \,\text{ſin.}\, \theta \partial z = z \partial y - z z \,\text{coſ.}\, \theta \partial \theta$; d'où $y \partial z = z \partial y - z v \partial \theta$, & parceque $c y = r^2 \theta$ ou $\partial \theta = \frac{c \partial y}{r^2}$, il ſera

$$y \partial z = z \partial y - \frac{c z v \partial y}{r^2} \ \& \ \frac{y \partial z}{\partial y} = z - \frac{c z v}{r^2} = \frac{(r^2 - c v) z}{r^2}.$$

Enſuite en faiſant la proportion $MQ : MF = TQ : FR$, ou

$$\frac{(r^2 - c v) z}{r^2} : z = - \frac{u z}{r} : FR,$$

on aura

$$FR = - \frac{r u z}{r^2 - c v} = - \frac{c y z}{r^2 - c v} = - \frac{y z}{\frac{r^2}{c} - v};$$

c'eſt-à-dire : la différence entre la baſe de la quadratrice & l'abſciſſe, en acceptant F pour l'origine des abſciſſes, eſt à l'ordonnée, comme le rayon vecteur eſt à la ſoutangente.

Tab. III. Fig. 3. Mais on peut trouver cette conſéquence avec plus de facilité & directement par le moyen de la formule $FR = \frac{z \partial \omega}{\partial z}$. Soit le ſommet A de la quadratrice pris pour l'origine des abſciſſes, deſorte que $AP = x$, $RM = y$, $AFM = \omega$ & $MF = z$; on aura

$$z = (r - x) \,\text{ſec.}\, \omega = \frac{r - x}{\text{coſ.}\, \omega},$$

$$\partial z = \frac{(r - x) \,\text{ſin.}\, \omega \partial \omega - \text{coſ.}\, \omega \partial x}{\text{coſ.}^2 \omega},$$

mais parceque $x : r = r \omega : c$, & que $\partial x = \frac{r^2 \partial \omega}{c}$, il y aura

$$\partial z = \frac{(c (r - x) \,\text{ſin.}\, \omega - r^2 \,\text{coſ.}\, \omega) \partial \omega}{c \,\text{coſ.}^2 \omega},$$

∂ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{c.\,\mathrm{coſ.}^2\,\omega}{c\,(r-x)\,\mathrm{ſin.}\,\omega - r^2\,\mathrm{coſ.}\,\omega} \quad \&$$

$$\mathrm{F\,R}\left(= \frac{z^2\,\partial\omega}{\partial z}\right) = \frac{c\,z^2\,\mathrm{coſ.}^2\,\omega}{c\,(r-x)\,\mathrm{ſin.}\,\omega - r^2\,\mathrm{coſ.}\,\omega}$$

$$= \frac{c\,(r-x)^2}{c\,(r-x)\,\mathrm{ſin.}\,\omega - \frac{r^2\,(r-x)}{z}} = \frac{c\,(r-x)\,z}{c\,z\,\mathrm{ſin.}\,\omega - r^2}$$

$$= \frac{c\,(r-x)\,z}{c\,y - r^2} = \frac{(r-x)\,z}{y - \frac{r^2}{c}} = -\frac{(r-x)\,z}{\frac{r^2}{c} - y},$$

ce qui eſt la même expreſſion que nous avons trouvée ci-deſſus.

Remarque.

De la formule tang. T M F $= \frac{z\,\partial\omega}{\partial z}$ on trouvera l'équation de la Spirale logarithmique, ce qui eſt connu & je ne m'y arrète pas.

II.

La détermination du rayon de courbure eſt fondée ſur la formule $\mathrm{R} = \frac{\partial s}{\partial \theta}$, où s eſt l'arc de la ligne courbe & θ l'angle que fait la normale avec l'axe des abſciſſes. Puisque $\frac{\partial x}{\partial s} = \mathrm{ſin.}\,\theta$ & $\frac{\partial y}{\partial s} = \mathrm{coſ.}\,\theta$, il y aura

$$\partial\theta\left[= \frac{\partial\,(\mathrm{ſin.}\,\theta)}{\mathrm{coſ.}\,\theta}\right] = \frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\frac{\partial y}{\partial s}} \quad \&$$

$$\mathrm{R} = \partial s : \frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\frac{\partial y}{\partial s}} = \frac{\partial y}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}; \text{ mais}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}} \;\&\; \partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{-\frac{\partial y}{\partial x}\,\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

donc

R =

$$R = \frac{-\partial x\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}.$$

À préſent, en reduiſant cette formule à la forme

$$R = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)},$$

il ne reſte qu'à trouver $\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ en z & ω. Ainſi puiſque

$$\partial y = z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z \;\&$$
$$\partial x = z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z,$$

nous trouvons

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z}{z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z} = \frac{z\,\text{coſ.}\,\omega + \text{ſin.}\,\omega.\,\frac{\partial z}{\partial\omega}}{z\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega.\,\frac{\partial z}{\partial\omega}}.$$

Suppoſons $\frac{\partial z}{\partial\omega} = p$, on aura

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{(z\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\omega)\,\partial(z\,\text{coſ.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\omega) - (z\,\text{coſ.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\omega).\,\partial(z\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\omega)}{(z\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\omega)^2}$$
$$= -\frac{(z^2\,\partial\omega + p\,\partial z + p^2\,\partial\omega - z\,\partial p)}{(z\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\omega)^2}.$$

Remettons au lieu de p ſa valeur égale $\frac{\partial z}{\partial\omega}$, nous aurons

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{-\left[z^2\,\partial\omega + 2\,\frac{\partial z^2}{\partial\omega} - z\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)\right]\partial\omega^2}{(z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z)^2}$$
$$= \frac{-(z^2\,\partial\omega^3 + 2\,\partial z^2\,\partial\omega - z\,\partial\omega^2\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right))}{\partial x^2}$$

& par conſéquent

$$R = \frac{\partial s^3}{(z^2\,\partial\omega^2 + 2\,\partial z^2)\,\partial\omega - z\,\partial\omega^2\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)};$$

mais

∂ s

$$\partial s \, [= \sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}] = \sqrt{(z^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)},$$

comme nous avons vu ci-deſſus, donc

$$\partial s^3 = (z^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)^{\frac{3}{2}} = \partial \omega^3 \left[z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \; \&$$

$$R = \frac{\partial \omega^3 \left[z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(z^2 \partial \omega^2 + 2 \partial z^2) \partial \omega - z \partial \omega^2 \partial \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)} = \frac{\left[z^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial \omega}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[z^2 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 - z \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)}{\partial \omega}\right]}.$$

Remarque.

Pour le rayon de courbure on trouve ordinairement l'expreſſion ſuivante: $\frac{z \partial s^3}{\partial s^2 \partial u - z \partial u^2 \partial \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)}$, où u eſt l'arc d'un cercle dont le rayon z; or cette expreſſion peut être tirée aiſément de celle que nous avons trouvée. Car lorsque $\partial u = z \partial \omega$, alors dans l'expreſſion

$$\frac{\partial s^3}{(z^2 \partial \omega^2 + 2 \partial z^2) \partial \omega - z \partial \omega^2 \partial \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)},$$

en plaçant $\frac{\partial u}{z}$ au lieu de $\partial \omega$, nous aurons

$$\frac{\partial s^3}{\partial s^2 \frac{\partial u}{z} + \frac{\partial z^2 \partial u}{z} - \frac{z \partial u^2}{z^2} \partial . \left(\frac{z \partial z}{\partial u}\right)} = \frac{z \partial s^3}{\partial s^2 \partial u + \partial z^2 \partial u - \partial u^2 \partial \left(\frac{z \partial z}{\partial u}\right)}$$

$$= \frac{z \partial s^3}{\partial s^2 \partial u + \partial z^2 \partial u - \partial u^2 \left[\left(\frac{\partial z^2}{\partial u}\right) + z \partial \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right]}$$

$$= \frac{z \partial s^3}{\partial s^2 \partial u - z \partial u^2 \partial \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)}.$$

Exemple.

Soit propoſé de trouver le rayon de courbure pour un point quelconque de la Spirale d'Archimède. Suppoſons

ra-

rayon du cercle générateur de la Spirale $= r$, ſa circonférence $= c$; nous avons par la propriété de la Spirale $z : r = r\omega : c$, ou $z : r\omega = r : c$. Soit $r : c = b : r$, il vient $z : r\omega = b : r$, ou $z = b\omega$; d'où l'on aura $\frac{\partial z}{\partial \omega} = b$, $\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)}{\partial \omega} = 0$ et

$$R = \frac{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2b^2}.$$

III.

Le lieu où ſe trouve le point d'inflexion ou de rebrouſſement, doit être déduit de la formule $\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = 0$ ou de celle-ci: $\frac{\partial x}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = 0$. Et comme nous avons vu ci-deſſus que

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{-\left[z^2 \partial \omega + 2\frac{\partial z^2}{\partial \omega} - z\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)\right]\partial \omega^2}{(z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial \omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z)^2}$$

& que $\partial x = z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z$, on aura pour le point d'inflexion ou de rebrouſſement la formule ſuivante:

$$\frac{z\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)}{\partial \omega} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 - z^2 = 0,$$

ou $z\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega \,.\, \frac{\partial z}{\partial \omega} = 0$.

Exemple.

Soit propoſé de trouver le lieu du point d'inflexion dans la Conchoïde de Nicomède. Suppoſons la hauteur du ſommet de la Conchoïde $= a$ & celle de ſon pole $= b$; on aura $z = \frac{b}{\text{coſ}\,\omega} + a$, $\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{b\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}^2\,\omega}$,

∂

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)}{\partial \omega} = \frac{b\,\text{coſ.}^2\,\omega + 2\,b\,\text{ſin.}^2\,\omega}{\text{coſ.}^3\,\omega} = \frac{b + b.\,\text{ſin.}^2\,\omega}{\text{coſ.}^3\,\omega} \;\&$$

$$\frac{z\,(b + b\,\text{ſin.}^2\,\omega)}{\text{coſ.}^3\,\omega} - \frac{2\,b^2\,\text{ſin.}^2\,\omega}{\text{coſ.}^4\,\omega} - z^2 = c;$$

d'où, en plaçant au lieu de z ſa valeur $\frac{b + a\,\text{coſ}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega}$, nous aurons

$$a\,b + a\,b\,\text{ſin.}^2\,\omega - 2\,a\,b\,\text{coſ.}^2\,\omega - a^2\,\text{coſ.}^3\,\omega = 0,\text{ ou}$$

$$\text{coſ.}^3\,\omega + \tfrac{3\,b}{a}\,\text{coſ.}^2\,\omega - \tfrac{2\,b}{a} = c.$$

Ainſi il ne reſte qu'à réſoudre une équation cubique. Suppoſons $u = \frac{b}{\text{coſ.}\,\omega}$, il vient coſ. $\omega = \frac{b}{u}$, & l'équation trouvée ſe transforme en $u^3 - \frac{3}{2}\,b^2\,u - \frac{1}{2}\,a\,b^2 = 0$, dans laquelle le ſecond terme ne ſe trouve pas, & qui eſt exactement la même que Wolf a donné dans ſes Elémens par une méthode indirecte & particuliere.

IV.

Quant à la rectification, il faut la chercher de la formule $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}$, laquelle, comme nous avons vu ci-deſſus, après des ſubſtitutions convenables ſe transforme en la ſuivante: $\partial s = \sqrt{(z^2\,\partial\,\omega^2 + \partial\,z^2)}$.

Exemple.

Soit propoſé de trouver la longueur de la Spirale d'Archimède. Vous prenez l'équation de cette courbe $z = b\,\omega$, où $b : r = r : c$, & vous avez

$$\partial s = \sqrt{\left(\tfrac{z^2\,\partial\,z^2}{b^2}\right) + \partial\,z^2} = \frac{\partial\,z\,\sqrt{(z^2 + b^2)}}{b}\;\&$$

$$s = \int .\, \frac{\partial z \sqrt{(z^2 + b^2)}}{b} = \frac{\frac{1}{2} z \sqrt{(z^2 + b^2)}}{b} + \tfrac{1}{2} b \log. \frac{z + \sqrt{(z^2 + b^2)}}{b}.$$

V.

A préſent nous venons à la détermination de la quadrature de ces courbes. Suppoſons la quadrature de l'eſpace AMF = P, la quadrature de l'eſpace AMP = Q & la quadrature du triangle MPF = R; nous aurons

$P = Q + R$ &

$\partial P = \partial Q + \partial R = y\,\partial x + \partial\left(\frac{yv}{2}\right) = y\,\partial x + \frac{y\,\partial v}{2} + \frac{v\,\partial y}{2} =$ (à cauſe de $\partial v = -\partial x$) $\frac{y\,\partial x}{2} + \frac{v\,\partial y}{2}$. Plaçons au lieu de y, v, ∂y & ∂x leurs valeurs z ſin. ω, z coſ. ω, z coſ. $\omega\,\partial\omega$ + ſin. $\omega\,\partial z$, & z ſin. $\omega\,\partial\omega$ — coſ. $\omega\,\partial z$, nous aurons

$$\partial P = \frac{z\,\text{ſin.}\,\omega\,(z\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ.}\,\omega\,\partial z) + z\,\text{coſ.}\,\omega\,(z\,\text{coſ.}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin.}\,\omega\,\partial z)}{2}$$

$$= \frac{z^2\,\text{ſin.}^2\,\omega\,\partial\omega + z^2\,\text{coſ.}^2\,\omega\,\partial\omega}{2} = \frac{z^2\,\partial\omega}{2}, \text{ \&}$$

$$P = \int.\,\frac{z^2\,\partial\omega}{2}.$$

Remarque.

Tab. III. Fig. 4. Cette formule eſt également vraie, lorsque une courbe entre ou part du foyer même F. Soit FBM une telle courbe & ſoit l'eſpace FBM, compris entre le rayon vecteur & la courbe, = P, PBF = Q, BCM = R et PMF = T; on aura

$$P = R + T - Q \text{ \& } \partial P = \partial R + \partial T - \partial Q.$$

Tirons l'ordonnée aboutiſſante NC, & du point d'attouchement une ligne parallele Cp à AF, & ſuppoſons $PB = u$, $pB = p$ & $pM = q$; nous aurons $\partial R = p\,\partial x + q\,\partial x$, $\partial T = \partial\left(\frac{yv}{2}\right)$, $\partial Q = u\,\partial v = -u\,\partial x$ &

$$\partial P = p\,\partial x + q\,\partial x + \partial\left(\frac{yv}{2}\right) + u\,\partial x = (p + q + u)\,\partial x$$
$$+ \partial\left(\frac{yv}{2}\right) = y\,\partial x + \partial\left(\frac{yv}{2}\right); \text{ donc \&c.}$$

Ex-

Exemple.

Soit propoſé de trouver la quadrature de la Spirale d'Archimède. Par la propriété de cette ligne il y a $z = b\omega$; donc $\partial\omega = \frac{\partial z}{b}$, $\partial P \left(= \frac{z^2 \partial\omega}{2}\right) = \frac{z^2 \partial z}{2b}$, & $P = \frac{z^3}{6b}$. Mettons au lieu de b ſa valeur $\frac{r^2}{c}$, nous aurons $P = \frac{cz^3}{6r^2}$. Soit $z = r$, il vient $P = \frac{cr}{x} \cdot \frac{1}{3}$.

VI.

La détermination des ſurfaces de corps produits par la révolution de ces courbes, ſe déduit de la formule $\partial S = 2\pi y \sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}$, laquelle, après les ſubſtitutions z ſin. ω au lieu de y, & $\sqrt{(z^2 \partial\omega^2 + \partial z^2)}$ au lieu de $\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}$, ſe transforme en la ſuivante:

$$\partial S = 2\pi z \,\text{ſin.}\, \omega \sqrt{(z \partial\omega^2 + \partial z^2)}.$$

VII.

La ſolidité de ces corps ſe détermine de la maniere ſuivante.

Suppoſons la ſolidité du corps engendré par la révolution de la ſurface $AMF = P$, la ſolidité du corps engendré par la révolution de la ſurface $AMP = Q$, & la ſolidité du corps engendré par la révolution du triangle $MPF = R$; on aura $P = Q + R$ &

$$\partial P = \partial Q + \partial R = \pi y^2 \partial x + \partial \left(\frac{\pi y^2 v}{3}\right) = \pi y^2 \partial x$$
$$- \frac{\pi y^2 \partial x}{3} + \frac{2\pi v y \partial y}{3} = \frac{2\pi}{3}(y^2 \partial x + v y \partial y)$$
$$= \frac{2\pi}{3}[z^2 \,\text{ſin.}^2\, \omega\, (z \,\text{ſin.}\, \omega \partial\omega - \text{coſ.}\, \omega \partial z)$$
$$+ z^2 \,\text{ſin.}\, \omega \,\text{coſ.}\, \omega\, (z \,\text{coſ.}\, \omega \partial\omega + \text{ſin.}\, \omega \partial z.)]$$
$$= \frac{2\pi}{3}(z^3 \,\text{ſin}^3.\, \omega \partial\omega + z^3 \,\text{ſin.}\, \omega \,\text{coſ.}^2 \omega \partial\omega) = \frac{2\pi}{3} z^3 \,\text{ſin.}\, \omega \partial\omega;$$

d'où $P = \int . \frac{2\pi}{3} z^3 . \,\text{ſin.}\, \omega \partial\omega$.

Remarque.

Ces deux formules $2\pi z\,\text{ſin.}\,\omega\,\sqrt{(z^2\partial\omega^2 + \partial z^2)}$ & $\frac{2\pi}{3} z^3\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega$ exigent qu'on connoiſſe non ſeulement la relation entre le rayon vecteur z & l'angle ω, mais encore la relation entre l'angle ω & ſon ſinus ou toute autre ligne trigonométrique; ce qui ne peut être exprimé que par une ſérie infinie; ainſi la ſurface & la ſolidité de ces corps ne peut être déterminée que par approximation. Cependant il peut arriver que ſin. ω ſorte du calcul. Soit, par exemple, la courbe propoſée contenue dans l'équation $z = \frac{p}{4\,\text{coſ.}^2\,\omega}$; il y aura

$$\partial\omega = \frac{4\,\text{coſ.}^3\,\frac{\omega}{2}\,\partial z}{p\,\text{ſin.}\,\frac{\omega}{2}} \text{ et}$$

$$\partial P \left(= \frac{2\pi}{3} z^3\,\text{ſin.}\,\omega\,\partial\omega = \frac{4\pi}{3} z^3\,\text{ſin.}\,\frac{\omega}{2}\,\text{coſ.}\,\frac{\omega}{2}\,\partial\omega\right)$$

$$= \frac{16\pi}{3p} z^3\,\text{coſ.}^4\,\frac{\omega}{2}\,\partial z,$$

ce qui, à cauſe de $\text{coſ.}^2\,\frac{\omega}{2} = \frac{p}{4z}$, eſt $= \frac{\pi p}{3} z\,\partial z$; d'où $P = \pi z^2 . \frac{p}{6}$, c'eſt-à-dire, la ſurface du cercle décrit par le rayon vecteur z, multipliée par la ſixième partie de ligne conſtante *p*.

VIII.

Quelquefois des courbes aux ordonnées parallèles peuvent-être determinées aiſement par les ordonnées partant d'un point fixe. Nous en avons vu un exemple à la Conchoïde, mais nous pouvons le voir encore aux ſections coniques.

1.) Soit priſe la parabole dont l'équation aux ordonnées parallèles eſt $y^2 = px$, on demande ſon équation entre le rayon vecteur & l'angle qu'il fait avec l'axe.

De-

Déſignant le rayon vecteur par z & l'angle qu'il fait avec l'axe, par ω, nous aurons $y = z\,\text{ſin.}\,\omega$, $x = \frac{p}{4} - z\,\text{coſ.}\,\omega$ et $z^2\,\text{ſin}^2\omega = p(\frac{p}{4} - z\,\text{coſ.}\,\omega) = \frac{p^2}{4} - pz\,\text{coſ.}\,\omega$; d'où il réſultera:

$$z = \frac{(1 - \text{coſ.}\,\omega)p}{2\,\text{ſin.}^2\omega} = \frac{(1 - \text{coſ.}\,\omega)p}{2(1 - \text{coſ.}^2\omega)} = \frac{p}{2(1 + \text{coſ.}\,\omega)}$$

$$= \frac{p}{4\,\text{coſ.}^2\frac{\omega}{2}}.$$

Ainſi l'équation de la parabole entre le rayon vecteur & l'angle eſt $z = \frac{p}{4\,\text{coſ.}^2\frac{\omega}{2}}$; ce qu'on peut auſſi trouver autrement: car il eſt connu que $z = \frac{1}{4}p + x$, mais $x = \frac{1}{4}p - z\,\text{coſ.}\,\omega$, donc $z(1 + \text{coſ.}\,\omega) = \frac{1}{2}p$ et $z = \frac{p}{4\,\text{coſ.}^2\frac{\omega}{2}}$.

2.) Soit priſe l'ellipſe, dont l'équation aux ordonnées parallèles eſt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; on demande ſon équation entre le rayon vecteur z & l'angle ω, que celui-ci fait avec l'axe. Puisque $y = z\,\text{ſin.}\,\omega$, $x = c + z\,\text{coſ.}\,\omega$, où c eſt l'excentricité; on aura:

$$a^2z^2\,\text{ſin.}^2\omega = b^2(a^2 - c^2 - 2cz\,\text{coſ.}\,\omega - z^2\,\text{coſ.}^2\omega)$$
$$= b^2b^2 - 2b^2cz\,\text{coſ.}\,\omega - b^2z^2\,\text{coſ.}^2\omega$$
$$= b^2b^2 - 2b^2cz\,\text{coſ.}\,\omega + c^2z^2\,\text{coſ.}^2\omega - a^2z^2\,\text{coſ.}^2\omega;$$

d'où l'on tire

$$a^2z^2[= a^2z^2(\text{ſin.}^2\omega + \text{coſ.}^2\omega)] = (b^2 - cz\,\text{coſ.}\,\omega)^2,$$
$$az = b^2 - cz\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } z = \frac{a^2 - c^2}{a + c\,\text{coſ.}\,\omega};$$

ce qu'on peut trouver autrement: Car il eſt connu que $z = a - \frac{cx}{a}$, ou $az = a^2 - cx$, mais $x = c + z\,\text{coſ.}\,\omega$, donc $az = a^2 - c^2 - cz\,\text{coſ.}\,\omega$ et $z = \frac{a^2 - c^2}{a + c\,\text{coſ.}\,\omega}$.

3.) On trouvera de la même manière l'équation de l'hyperbole entre le rayon vecteur & l'angle qu'il fait avec l'axe.

Ayant ces équations, on pourra appliquer facilement les formules trouvées ci-deſſus aux ſections coniques.

IX.

A préſent il nous reſte à trouver les formules néceſſaires pour la détermination des centres de gravité. Nous nous bornerons, pour abrèger, à la détermination de ces formules dans la quadrature de ces courbes. Suppoſons que la quadrature AMP = Q, PMF = R et AMF = P, de plus que les diſtances de leurs centres de gravité de la ligne AF ſoyent q, r & p, & que de la ligne BM, éloignée de F de la quantitée connue a, ces diſtances ſoyent q', r' et p'; on aura:

$$1.)\quad p = \frac{Qq + Rr}{Q + R} = \frac{\int \frac{y}{2}\partial Q + \int.\partial\left(\frac{y}{3}.\frac{yv}{2}\right)}{P} =$$

$$\frac{\int.\left[\frac{y^2\partial x}{2} + \partial\left(\frac{y^2 v}{6}\right)\right]}{P} = \frac{\int.\left(\frac{y^2\partial x}{2} - \frac{y^2\partial x}{6} + \frac{2vy\partial y}{6}\right)}{P}$$

$$= \frac{\int.\left(\frac{y^2\partial x + vy\partial y}{3}\right)}{P} =$$

$$\frac{\int.\frac{1}{3}\left[z^2\,\text{ſin}^2\omega\,(z\,\text{ſin}\,\omega\,\partial\omega - \text{coſ}\,\omega\,\partial z) + z^2\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega\,(z\,\text{coſ}\,\omega\,\partial\omega + \text{ſin}\,\omega\,\partial z)\right]}{P}$$

$$= \frac{\int.z^3\,\text{ſin}.\,\omega\,\partial\omega}{3.P}.$$

2.)

$$2.)\quad p' = \frac{Qq' + Rr'}{Q+R} = \frac{\int . x \partial Q + \frac{yv}{2}(x + \frac{v}{3})}{P},$$

où $x = BP$, $= \frac{\int . xy \partial x + \int . \partial [\frac{yv}{2}(x + \frac{v}{3})]}{P} =$

$$\frac{\int . [xy \partial x + \frac{1}{2} y (x + \frac{v}{3}) \partial v + \frac{1}{2} yv (\partial x + \frac{\partial v}{3}) + \frac{1}{2} v (x + \frac{v}{3}) \partial y]}{P} =$$

$$\frac{\int . \frac{1}{6}[y(3x+v)\partial x + v(3x+v)\partial y]}{P} = \frac{\int . \frac{1}{6}[y(3a-v)\partial x + v(3a-v)\partial y]}{P}$$

$$= \frac{\int . \frac{1}{6}(3a - zz \operatorname{coſ}. \omega) z^2 \partial \omega}{P} = \frac{a \int . \frac{z^2 \partial \omega}{2}}{P} - \frac{\frac{1}{3}\int . z^3 \operatorname{coſ}. \omega \partial \omega}{P}$$

$$= a - \frac{\int . z^3 \operatorname{coſ}. \omega \partial \omega}{3P}.$$

INTE-

INTEGRATIO FORMVLAE
$p^3 vv\partial v = nv\partial p + ap\partial v(1-p)(2-p)$.

Auctore

STEPH. RVMOVSKI.

Conventui exhib. die 14 Dec. 1797.

§. 1.

In Tomo V. Novorum Actorum *Leonhardus Eulerus* agens *de motu quodam maxime memorabili ſatis quidem ſimplici at ſolutio difficillimo* pervenit ad aequationem differentialem, cuius integrale eliciendum hic conſtitui. Magnus ille vir cum in prima ſolutione quaeſtionis propoſitae perveniſſet ad aequationem, de qua mihi ſermo eſt, tale de illa fert iudicium, nullam patere viam eius integrale inveſtigandi, niſi forte caſu in eiusmodi multiplicatorem incidamus, qui eam reddat integrabilem. In altera parte ſupra dictae diſſertationis monſtravit equidem *Eulerus* integrale huius aequationis eſſe

$$\frac{n(1-p)^3 + vvnp}{(vvp - n(1-p))^2} = \text{Conſt.}$$

verum ad integrale hoc deductus eſt methodo indirecta; unde mox concludere licuit, dari viam directam integrandi aequationem propoſitam.

§. 2.

§. 2. Aequatio noſtra, prout docet *Eulerus*, ponendo $v = \sqrt{n}\, u$ abit in

$$p^3 u \partial u = 2 u \partial p + p \partial u (1 - p)(2 - p).$$

Invento igitur integrali huius aequationis, dabitur quoque integrale propoſitae.

§. 3. Pro integranda hac aequatione ponatur $\frac{2-p}{p} = q$, ut ſit $p = \frac{2}{1+q}$, et habebitur $1 - p = \frac{q-1}{q+1}$, dein $2 - p = \frac{2q}{q+1}$ nec non $\partial p = - \frac{2 \partial q}{(q+1)^2}$. Subſtitutis his valoribus in noſtra aequatione obtinebitur

$$2 u \partial u = - u \partial q (q + 1) + q \partial u (q - 1).$$

Pro ulteriori reductione huius aequationis ſtatuatur $q = s u$; unde fit $\partial q = s \partial u + u \partial s$, $q - 1 = s u - 1$ et $q + 1 = s u + 1$. Introductis his valoribus aequatio induet ſequentem formam:

$$2 \partial u = - u \partial s - 2 s \partial u - u u s \partial s,$$

quae poſito $u = \frac{1}{r}$ abit in

$$- 2 \partial r = - r \partial s + 2 s \partial r - s \partial s, \text{ ſive}$$

$$2 \partial r - \frac{r \partial s}{1+s} = \frac{s \partial s}{1+s}.$$

§. 4. Iam vero de aequationibus huius formae, in quibus ſcilicet alterutra variabilium non ultra unam dimenſionem adſcendit, conſtat eas reddi integrabiles, multiplicando per certum aliquem multiplicatorem; qui pro noſtro caſu reperitur eſſe $\frac{1}{\sqrt{(1+s)}}$, et habebitur integrale quaeſitum:

$$\frac{2 r}{\sqrt{(1+s)}} = \int \frac{s \partial s}{(1+s)^{\frac{3}{2}}} + \text{conſt.}$$

Cum itaque ſit

$$\int \frac{s\,\partial s}{(1+s)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\,(2+s)}{\sqrt{(1+s)}},$$

prodibit

$$\frac{r}{\sqrt{(1+s)}} = \frac{2+s}{\sqrt{(1+s)}} + 2\,C;$$

vel tollendo ſignum radicale

$$\frac{(r-2-s)^2}{1+s} = 4\,C\,C.$$

Cum igitur ſit $r = \frac{1}{u}$ et $s = \frac{2-p}{p\,u}$ fiet

$$r - 2 - s = \frac{2\,(p - p\,u - 1)}{p\,u} \text{ et}$$

$$1 + s = \frac{p\,u + 2 - p}{p\,u},$$

reſtitutis his valoribus prodibit integrale quaeſitum

$$\frac{(p - 1 - p\,u)^2}{p\,u\,(p\,u - p + 2)} = C\,C,$$

et ſubſtitutio formulam propoſitam integrabilem reddens

$$p = \frac{2}{1 + u\,s} \text{ ſive } \frac{2-p}{p} = u\,s.$$

§. 5. Integrale hoc modo inventum differt aliquantum ab eo, quod dedit magnus *Eulerus*; verum mutata conſtante facile reducitur ad formam ab illo exhibitam; ſcilicet cum ſit

$$\frac{(p - 1 - p\,u)^2}{p\,u\,(p\,u - p + 2)} = C\,C,$$

erit etiam

$$\frac{p\,u\,(p\,u - p + 2)}{(p - 1 - p\,u)^2} = \frac{1}{C\,C}.$$

Dempta utrinque unitate oritur

$$\frac{p\,p\,u - (1-p)^2}{(p - 1 - p\,u)^2} = \frac{1 - C\,C}{C\,C},$$

atque

atque ſic haec aequatio differentietur, prodibit illa ipſa, quam integrandam ſuſcepimus. Subſtituto igitur in locum u illius valore $\frac{vv}{n}$ habebitur integrale quaeſitum aequationis propoſitae:

$$\frac{ppvv - n(1-p)^2}{[n(p-1) - pvv]^2} = \text{conſt.}$$

§. 6. Ope ſubſtitutionis $\frac{1-p}{p} = q$ itidem integrale formulae noſtrae elici poterit, verum adhibita hac ſubſtitutione pervenitur ad aequationem

$$u\,\partial u = -2u\,\partial q(1+q) + q\,\partial u(1+2q)$$

in qua ulterius poni debet $1 + 2q = z$, ut obtineatur aequatio

$$2u\,\partial u = -u\,\partial z(z+1) + z\,\partial u(z-1)$$

ſimilis illi, quam ſupra invenimus.

PROBLEMATA EX DOCTRINA SPHAERICA.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conventui Acad. exhib. d. 9 Apr. 1798.

§. 1.

Data linea recta tanquam baſe trianguli plani, laterumque reliquorum ſumma, vel differentia, vel relatione, locum apicis trianguli priore caſu eſſe ellipſin, altero hyperbolam, tertio circulum, conſtat. Facile autem praevidere licet, eadem problemata ad ſphaeram accommodata perductura eſſe ad ſolutiones non minus elegantes, ſiquidem inter triangula plana atque ſphaerica tanta intercedit ſimilitudo et affinitas. Primum quidem caſum ſphaerae applicatum, ſeu problema, data baſe trianguli ſphaerici laterumque reliquorum ſumma invenire locum verticis, iamdudum examini ſubiecit celeberrimus noſter Academicus *Fuſs*, reperitque ellipſin ſphaericam, cui cum ellipſe Apolloniana plurimae inſignes proprietates ſunt communes (*V. Nova Acta Acad. Sc. Imp. Petropol. Tom. III. pag. 90.*). Problema alterum perpendenti, ubi baſis trianguli ſphaerici et certa quae-

quaedam binorum crurum relatio datur, theoremata nonnulla ſe mihi obtulerunt, quae accurata conſideratione haud indigna mihi videbantur. Facile vero patet, loco laterum trianguli in ſphaera eſſe ſubſtituendos eorum ſinus vel coſinus, etc.

Problema I.

§. 2. *Data baſe trianguli ſphaerici cum ratione ſinuum reliquorum laterum, invenire locum apicis; ſive, dato angulo plano, per cuius crura tranſeuntibus binis planis, quorum interſectio ad anguli illius crura inclinetur angulis, quorum ſinus ſint in ratione conſtante, reperire locum interſectionis horum planorum.*

Ita quidem problema dupliciter expreſſum, duplicem quoque admittet ſolutionem. Cum etenim planorum interſectio ſit linea recta, omnium harum rectarum *locus*, h. e. ſolutio problematis poſteriore modo expreſſi, erit ſuperficies ſolida ſeu corporis, cuius cum ſphaera interſectio problemati priore modo expreſſo ſatisfaciet.

§. 3. Sit $AOB = \alpha$ angulus datus, ſeu $AB = \alpha$ arcus circuli maximi circa centrum ſphaerae O, ſintque AOC, BOC, anguli problemate definiti, ut ſit $\text{ſin}\, AOC = n \,.\, \text{ſin}\, BOC$; denotante n numerum quemcunque conſtantem. Demiſſo iam arcu maximo CD, ſeu plano COD ad planum AOB normali, poſitisque $COD = \psi$, $AOD = \Phi$, $BOD = \alpha - \Phi$, habemus in triangulis ſolidis rectangulis AODC, BODC, $\text{coſ}\, AOC = \text{coſ}\, \Phi\, \text{coſ}\, \psi$, et $\text{coſ}\, BOC = \text{coſ}\,(\alpha - \Phi)\, \text{coſ}\, \psi$, proinde Tab. III. Fig. 5.

$$1 - \text{coſ}^2 \Phi\, \text{coſ}^2 \psi = n^2 - n^2\, \text{coſ}^2 (\alpha - \Phi)\, \text{coſ}^2 \psi,$$

unde

unde ſequitur

$$\cos^2\psi = \frac{n^2 - 1}{n^2\cos^2(\alpha - \Phi) - \cos^2\Phi}, \text{ et}$$

$$\sin^2\psi = \frac{\sin^2\Phi - n^2\sin^2(\alpha - \Phi)}{n^2\cos^2(\alpha - \Phi) - \cos^2\Phi}, \text{ ideoque}$$

$$\text{I. } \tan^2\psi = \frac{\sin^2\Phi - n^2\sin^2(\alpha - \Phi)}{n^2 - 1}.$$

§. 4. Duobus itaque caſibus angulus ψ evaneſcit, quando nempe

$$\sin\Phi = \pm n\sin(\alpha - \Phi) = \pm n\sin\alpha\cos\Phi \mp n\cos\alpha\sin\Phi,$$

unde ſequitur $\tan\Phi = \frac{\pm n\sin\alpha}{1 \pm n\cos\alpha}$. Quodſi itaque curva in ſphaerae ſuperficie E C F problemati ſatisfaciens circulum maximum A B in punctis E, F, ſeu quod idem eſt, ſi corporis quaeſiti ſuperficies E O C F planum A O B in rectis O E, O F, ſecat, erit

$$\tan AOE = \frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha + 1}, \text{ et } \tan AOF = \frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha - 1},$$

proinde

$$\tan EOF = \frac{\frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha - 1} - \frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha + 1}}{1 + \frac{n^2\sin^2\alpha}{n^2\cos^2\alpha - 1}} = \frac{2n\sin\alpha}{n^2 - 1}.$$

§. 5. Poſito iam $EOD = \Phi'$, ac ſubſtituto $AOE + \Phi'$ loco Φ, habemus

$$\sin AOE = \frac{n\sin\alpha}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}},$$

$$\cos AOE = \frac{n\cos\alpha + 1}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}}, \text{ unde ſequitur}$$

$$\sin\Phi = \frac{n\sin\alpha\cos\Phi' + n\cos\alpha\sin\Phi' + \sin\Phi'}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}} = \frac{n\sin(\alpha + \Phi') + \sin\Phi'}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}},$$

$$\cos\Phi = \frac{n\cos(\alpha + \Phi') + \cos\Phi'}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}}, \text{ ideoque}$$

$$\sin(\alpha - \Phi) = \frac{\sin(\alpha - \Phi') - n\sin\Phi'}{\sqrt{(n^2 + 2n\cos\alpha + 1)}},$$

quibus

quibus valoribus in aequatione I (§. 3.) ſubſtitutis nanciscimur

$$\mathrm{tang}^2\psi = \frac{n^2[\sin^2(\alpha+\Phi') - \sin^2(\alpha-\Phi')] + 2n\sin\Phi'[\sin(\alpha+\Phi') + n^2\sin(\alpha-\Phi')] - (n^4-1)\sin^2\Phi'}{(n^2-1)(n^2+2n\cos\alpha+1)}$$

$$= \frac{\sin\Phi'[4n^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\Phi' + 2n(n^2+1)\sin\alpha\cos\Phi' - 2n(n^2-1)\cos\alpha\sin\Phi' - (n^2+1)(n^2-1)\sin\Phi']}{(n^2-1)(n^2+2n\cos\alpha+1)},$$

ſeu

$$\text{II. } \mathrm{tang}^2\psi = \frac{\sin\Phi'[2n\sin\alpha\cos\Phi' - (n^2-1)\sin\Phi']}{n^2-1}.$$

Quam in aequationem ſi introducitur $\mathrm{tang}\, EOF = \frac{2n\sin\alpha}{n^2-1}$ (§. 4.), reſultat II. $\mathrm{tang}^2\psi = \sin\Phi'(\mathrm{tang}\, EOF \cos\Phi' - \sin\Phi')$, h. e.

$$\text{II. } \mathrm{tang}^2\psi = \frac{\sin\Phi' \sin(EOF - \Phi')}{\cos EOF}.$$

§. 6. Si in hac aequatione loco Φ' ſubſtituitur $EOF - \Phi'$, reſultat idem valor

$$\mathrm{tang}^2\psi = \frac{\sin(EOF - \Phi')\sin\Phi'}{\cos EOF},$$

unde ſequitur, capto arcu $FD' = ED$, ſeu e medio G arcus EF, $GD' = GD$, arcum ψ eundem induere valorem: $DC = D'C$. Cum praeterea aequatio quadratica binos ſemper aequales at oppoſitos tangentis anguli ψ valores praebeat $D'C'$ et $D'C''$, perſpicitur, curvam quaeſitam ECFI, arcu HGI arcum EF biſariam et normaliter ſecante, in quatuor quadrantes EGH, HGF, FGI, IGE, ſimiles et aequales diſſecari. Valores anguli ψ ſiunt imaginarii, 1) quando Φ' negativum induit valorem, 2) quando $\Phi' > EOF$. Simul autem ac $\Phi > 180°$, valores tang. ψ ſunt reales, quousque $\Phi' - EOF < 180°$. Productis itaque rectis EO, FO, ad alteram partem, angulus oppoſitus $E'OF'$ eandem curvam ECFI problemati ſatisfacientem, ſive idem corpus EOCFI amplectetur. Conditio nempe problematis $\sin AOC = n \sin BOC$ (§. 3.) angulis $180° -$

AOC

A O C. 180° — B O C, non minus quam angulis A O C, B O C, competit.

§. 7. Valor anguli ψ *maximus* eſt, quando

$$o = \operatorname{coſ}\varphi' \, (\operatorname{tang} EOF \operatorname{coſ}\varphi' - \operatorname{ſin}\varphi') - \operatorname{ſin}\varphi' \, (\operatorname{tang} EOF \operatorname{ſin}\varphi' + \operatorname{coſ}\varphi')$$

(§. 5.), h. e.

$$o = \operatorname{tang} EOF \operatorname{coſ} 2\varphi' - \operatorname{ſin} 2\varphi', \text{ vel}$$

$$\operatorname{tang} 2\varphi' = \operatorname{tang} EOF, \text{ et } \varphi' = \tfrac{1}{2} EOF = EOG.$$

Pro maximo itaque valore anguli $\psi = GOH = GOI$, eſt

$$\operatorname{tang}^2 GOH = \frac{(\operatorname{ſin} \frac{1}{2} EOF)^2}{\operatorname{coſ} EOF} = \frac{1 - \operatorname{coſ} EOF}{2 \operatorname{coſ} EOF},$$

unde

$$\text{ob } \operatorname{coſ} EOF = \frac{n^2 - 1}{\sqrt{[(n^2-1)^2 + 4\,\text{[illegible]}]}} \;(\S.\ 4.) \text{ fit}$$

$$\operatorname{tang}^2 GOH = \frac{\sqrt{[(n^2-1)^2 + 4\,\text{[illegible]}]} - n^2 + 1}{2(n^2-1)}.$$

Eſt autem

$$\operatorname{tang}^2 EOG = \frac{1 - \operatorname{coſ} EOF}{1 + \operatorname{coſ} EOF};$$

quare cum ſemper ſit $1 + \operatorname{coſ} EOF > 2 \operatorname{coſ} EOF$, ſequitur $GOH > GOE$. Curva igitur E H F I non eſt circulus, ſed *curva duplicis curvaturae*.

§. 8. Curvae huius natura quo melius perſpiciatur, corpus E O H F I examinemus, e cuius cum ſphaera interſectione illa oritur. Quem in finem quemcunque aſſumamus ſitum planorum A O C, B O C, et ex quopiam puncto C interſectionis eorum O C ad planum A O B demiſſo perpendiculo C K, ductaque K L ad O A, K M ad O B normali,

mali, erit quoque C L ad O A, et C M ad O B normalis. Quodſi iam dicuntur $OL = x$, $LK = y$, $KC = z$, erit $OC = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, $CL = OC \sin AOC$, $CM = OC \sin BOC$, ideoque $CL = n \cdot CM$. Poſito autem $AOD = \Phi$, eſt

$$\tang \Phi = \frac{y}{x},\ \sin \Phi = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$
$$\cos \Phi = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},\ OK = \sqrt{(x^2 + y^2)},$$
$$KM = OK \sin(\alpha - \Phi) = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$
$$OM = OK \cos(\alpha - \Phi) = x \cos \alpha + y \sin \alpha,\ \&$$
$$CM^2 = CK^2 + KM^2 = z^2 + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2,$$
$$CL^2 = y^2 + z^2, \text{ unde ſequitur}$$
$$y^2 + z^2 = n^2 z^2 + n^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2, \text{ h. e.}$$
$$\text{III. } z^2 = \frac{y^2 - n^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2}{n^2 - 1}.$$

§. 9. Aſſumto alio quocunque abſciſſarum axe O E, priorem O A ſub angulo $AOE = \omega$ ſecante, ducatur K N ad O E normalis, ſitque $ON = u$, $NK = v$, $KC = z$. Vnde ob $KPN = OPL = 90° - \omega$, obtinemus

$PN = v \tang \omega$, $PK = v \sec \omega$, ideoque $OP = u - v \tang \omega$,

$$x = OP \cos \omega = u \cos \omega - v \sin \omega,$$
$$LP = OP \sin \omega = u \sin \omega - \frac{v \sin^2 \omega}{\cos \omega},$$
$$y = LP + PK = u \sin \omega + v \cos \omega.$$

Quibus valoribus in aequatione III (§. 8.) ſubſtitutis nanciſcimur

$$(n^2 - 1) z^2 = u^2 [\sin^2 \omega - n^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \omega + 2 n^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega \cos \omega$$
$$- n^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \omega] + 2 u v [\sin \omega \cos \omega - n^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \omega \cos \omega$$
$$+ n^2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)] + v^2 [\cos^2 \omega - n^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \omega$$
$$- 2 n^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega \cos \omega - n^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \omega].$$

 An-

Angulum ω ita determinare licet, ut terminus $u\,v$ evaneſcat, poſito nempe

$$0 = \sin 2\omega - n^2 \cos 2\alpha \sin 2\omega + n^2 \sin 2\alpha \cos 2\omega, \text{ h. e.}$$
$$\tang 2\omega = \frac{n^2 \sin 2\alpha}{n^2 \cos 2\alpha - 1}.$$

Eſt autem

$$\tg 2 AOG = \tg (AOE + AOF) = \frac{\frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha + 1} + \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha - 1}}{1 - \frac{n^2 \sin^2 \alpha}{n^2 \cos^2 \alpha - 1}} = \frac{n^2 \sin 2\alpha}{n^2 \cos 2\alpha - 1}$$

(§. 4.), proinde $\omega = AOG$.

§. 10. Aſſumta itaque recta OG pro abſciſſarum u axe, erit (§. 9.)

$$2(n^2 - 1) z^2 = u^2 [1 - \cos 2\omega - n^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos 2\omega) + n^2 \sin 2\alpha \sin 2\omega$$
$$- n^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos 2\omega)] + v^2 [1 + \cos 2\omega - n^2 \sin^2 \alpha (1 - \cos 2\omega)$$
$$- n^2 \sin 2\alpha \sin 2\omega - n^2 \cos^2 \alpha (1 + \cos 2\omega)]$$
$$= u^2 [1 - n^2 - \cos 2\omega + n^2 \cos 2\alpha \cos 2\omega + n^2 \sin 2\alpha \sin 2\omega]$$
$$+ v^2 [1 - n^2 + \cos 2\omega - n^2 \cos 2\alpha \cos 2\omega - n^2 \sin 2\alpha \sin 2\omega],$$

unde ob $\tang 2\omega = \frac{n^2 \sin 2\alpha}{n^2 \cos 2\alpha - 1}$ (§. 9.), ideoque

$$\sin 2\omega = \frac{n^2 \sin 2\alpha}{\sqrt{(n^4 + 1 - 2 n^2 \cos 2\alpha)}},$$
$$\cos 2\omega = \frac{n^2 \cos 2\alpha - 1}{\sqrt{(n^4 + 1 - 2 n^2 \cos 2\alpha)}}, \text{ poſito}$$
$$n^4 + 1 - 2 n^2 \cos 2\alpha = k^2, \quad n^2 - 1 = l, \text{ obtinemus}$$
$$2 k l z^2 = u^2 [n^4 (\sin 2\alpha)^2 + (n^2 \cos 2\alpha - 1)^2 - k l]$$
$$- v^2 [k l + (n^2 \cos 2\alpha - 1)^2 + n^4 (\sin 2\alpha)^2]$$
$$= u^2 (k^2 - k l) - v^2 (k l + k^2), \text{ h. e.}$$

IV. $2 l z^2 = (k - l) u^2 - (k + l) v^2.$

Poſito $z = 0$, eſt

$$\frac{v}{u} = \tang GOD = \pm \sqrt{\frac{k - l}{k + l}} = \frac{\sqrt{k^2 - l^2}}{k + l},$$

ideoque

tang.

$$\text{tang } 2\,GOD = \frac{2(k+l)\sqrt{(k^2-l^2)}}{(k+l)^2-(k^2-l^2)} = \frac{2\sqrt{(k^2-l^2)}}{(k+l)-(k-l)} = \frac{\sqrt{(k^2-l^2)}}{l}$$

$$= \frac{\sqrt{2n^2(1-\cos 2\alpha)}}{l} = \frac{2n \sin\alpha}{n^2-1} = \text{tang } EOF \text{ (§. 4.)};$$

ſeu $GOD = GOE$. Superficies igitur aequatione IV expreſſa planum A O B ad rectas O E, O F. ſecat, unde iam perſpicere licet, eam eſſe corporis *conoidalis*, cuius nempe cum plano per verticem O interſectio eſt triangulum rectilineum E O F. Coni huius natura accuratius perpendi meretur.

§. 11. Caſu $u = 0$, z pro $v = 0$ evaneſcit, pro quovis autem alio ordinatae v valore impoſſibilis eſt, unde ſequitur, O eſſe coni verticem. Caſu $v = 0$ ſit $z = \pm u\sqrt{\frac{k-l}{2l}}$, quae aequatio indicat, plani per OG ad planum A O B normalis cum ſuperficie interſectionem pariter eſſe triangulum aequicrurum, ideoque O G coni axem. Caſu denique $\frac{v}{u} > \sqrt{\frac{k-l}{k+l}}$ ſeu $GOD > GOE$, valores ordinatae z ſemper ſunt imaginarii; valores autem abſciſſarum u negativi eosdem ordinatis v & z valores tribuunt quos poſitivi: unde patet, ſimilem conum E O F l' priori e vertice O oppoſitum problemati aeque ſatisfacere, neque extra duplicem huncce conum ulla alia dari puncta, in quibus problemati ſatisfiat. Poſito $z = 0$, erit $\text{tang } EOF = \frac{2n \sin\alpha}{n^2-1}$ (§. 10.); poſito autem $v = 0$ eſt $\text{tang } GOH = \frac{z}{u} = \pm\sqrt{\frac{k-l}{2l}}$, & $\text{tang } GOE = \sqrt{\frac{k-l}{k+l}}$ (§. 10.), conſequenter

$$\text{tang } GOH = \text{tang } GOE \sqrt{\frac{k+l}{2l}},$$

& $GOH > GOE$, ob $k > l$ (Conf. §. 7.). Conus itaque non habet baſin circularem.

§. 12. Ad baſin coni accuratius indagandam, tribuatur abſciſſae u certus quidam valor c, unde pro ſectione coni ad axem O G normali in quavis diſtantia O G $= c$ a vertice, obtinetur aequatio (§. 10.)

$$\text{V. } z^2 = \frac{k-l}{2l}c^2 - \frac{k+l}{2l}v^2,$$

quae ellipſin definit, cuius centrum G, axes E F $= 2a$, H I $= 2b$, et aequatio generalis: $z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}v^2$. Habemus itaque $b^2 = \frac{k-l}{2l}c^2$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{k+l}{2l}$, conſequentur $a^2 = \frac{k-l}{k+l}c^2$, ſive

$$a = \frac{(k-l)c}{\sqrt{(k^2-l^2)}} = \frac{(k-l)c}{2n\sin\alpha}, \text{ et } b = \sqrt{\frac{ac\sqrt{(k^2-l^2)}}{2l}} = \sqrt{\frac{nac\sin\alpha}{n^2-1}}:$$

unde ob $k > l$, ſequitur, b eſſe axem tranſverſum, a minorem ſeu coniugatum. Cum $\frac{b^2}{a^2} = \frac{k+l}{2l}$ ſit ratio conſtans a diſtantia c independens, ſequitur, omnes corporis quaeſiti ſectiones ad axem normales eſſe ellipſes ſimiles, ideoque *ſolidum eſſe conum ellipticum*, neque unquam baſin in circulum abire poſſe: tunc enim foret $\frac{b}{a} = 1$, ideoque $k = l$, h. e. $n^4 + 1 - 2n^2 \cos 2\alpha = n^4 + 1 - 2n^2$ (§. 10.), ſeu $\alpha = 0$; eodem quoque caſu foret circuli radius $b = c\sqrt{\frac{k-l}{l}} = 0$, integrum ſcilicet ſolidum in punctum abiret. Quapropter, cum plani cum ſphaera interſectio ſemper ſit circulus, ſequitur, (*Fig. 5.*) planum E C F nullo modo ita collocari poſſe, ut ſi ad eius cum ſphaera interſectionem E C F e binis ſuperficiei ſphaerae punctis A, B, ducantur circuli maximi A C, B C, eorum ſinus ſint in ratione conſtante.

§. 13. Iam igitur ad completam problematis ſolu-
Fig. 6 tionem pervenimus. Dato ſcilicet angulo plano A O B $= \alpha$, in eodemque plano capto angulo

A O E

$$A O E = \text{Ang. tang} \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha + 1},$$

$$E O F = \text{Ang. tang} \frac{2 n \sin \alpha}{n^2 - 1} \text{ (§. 4.)},$$

denotante n numerum quemvis poſitivum, bifariam denique ſecto angulo E O F linea O G, in qua abſciſſa pro arbitrio linea $O G = c$, et circa centrum G deſcripta ellipſe ſuper ſemi-axibus, quorum alter

$$G E = G F = a = c \frac{\sqrt{(n^4 + 1 - 2 n^2 \cos 2 \alpha)} - n^2 + 1}{2 n \sin \alpha}$$

in plano A O B ad O G normalis, alter

$$G H = G I = b = \sqrt{\frac{n a c \sin \alpha}{n^2 - 1}}$$

ad planum A O B normalis ſit, ſuper hac ellipſe tanquam baſi, e vertice O conſtruatur conus rectus E I F H O. Ductis iam per quodvis punctum C in coni ſuperficie, ſeu per quodpiam latus coni O C, perque rectas O A, O B, binis planis A O C, B O C, conſtanter erit

$$\sin A O C : \sin B O C = n : 1,$$

ideoque integra coni utriusque ſuperficies problemati ſatisfacit.

§. 14. Superficiei coni interſectio cum ſuperficie ſphaerae circa centrum O, quae problemati, quando tanquam caſus trigonometriae ſphaericae conſideratur, ſatisfacit, curva eſt duplicis curvaturae, quia conus non eſt circularis ſed ellipticus, unde eius proiectio in planum A O B curva erit adhuc examinanda. Poſito radio ſphaerae

$$O A = O B = O C = O E = O F = e,$$

aequatio ad ſphaeram eſt $u^2 + v^2 + z^2 = e^2$, quae cum aequatione ad conum (IV. §. 10.) coniuncta, interſectionis utrius-

triusque ſolidi proiectionem in planum A O B coordinatarum u, v, deſinit, pro qua igitur obtinemus

$$2\,l\,c^2 = (k+l)\,u^2 - (k-l)\,v^2, \text{ ſive}$$

$$\text{VI. } v^2 = \tfrac{k+l}{k-l}\,u^2 - \tfrac{2\,l\,c^2}{k-l},$$

quae eſt aequatio ad *hyperbolam*, cuius ſemiaxis coniugatus $q = c\sqrt{\frac{2l}{k-l}}$, transverſus $p = c\sqrt{\frac{2l}{k+l}}$ minor coniugato. Hyperbolae huius aſymptotae ad axem O G ſub angulo γ inclinantur, cuius tangens eſt $\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{k+l}{k-l}}$ = cot G O E (§. 10.), unde ſequitur $\gamma = 90° -$ G O E.

§. 15. Suppoſuimus hactenus $n > 1$: ſi enim $n < 1$, puncta duntaxat A, B, permutantur.

Caſu vero $n = 1$; h. e. ſin A C = ſin B C, formulae ſuperiores (§. 4.) dant tang A O E $= \frac{\text{ſin}\,\alpha}{1+\text{coſ}\,\alpha}$ = tang $\frac{1}{2}\alpha$, ſeu A O E $= \frac{1}{2}\alpha$ et A O E $= 180° + \frac{1}{2}\alpha$; tang A O F $= \frac{\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\alpha - 1}$ $= -$ cot $\frac{1}{2}\alpha$, h. e. A O F $= 90° + \frac{1}{2}\alpha$, et A O F $= 270° + \frac{1}{2}\alpha$, E O F $= 90°$. Problemati itaque ſatisfaciunt bini circuli maximi per polum arcus A B tranſeuntes et ad invicem normales, quorum alter arcum A B bifariam ſecat. Quod ſi
Fig. 7. enim E H E′, F H F′, hi circuli ſunt, ut ſit A E = B E $= \frac{1}{2}\alpha$, E F = E F′ = E H $= 90°$, et per quodvis punctum C circuli E H E′ ducuntur arcus C A, C B, hi erunt aequales. Sin autem ad punctum C′ circuli F H F′ ducuntur arcus A C′, B C′, in triangulis rectangulis A F C′, B F C′, erit

coſ A C′ = coſ F C′ coſ $(90° + \frac{1}{2}\alpha)$ = − coſ F C′ ſin $\frac{1}{2}\alpha$, &

coſ B C′ = coſ F C′ coſ $(90° - \frac{1}{2}\alpha)$ = + coſ F C′ ſin $\frac{1}{2}\alpha$,

proinde coſ A C′ = − coſ B C′, h. e. A C′ $= 180° -$ B C′, unde

unde ſequitur ſin A C′ = ſin B C′. Eodem caſu eſt (§. 10.) $l = 0$, $k^2 = 2(1 - \cos 2\alpha)$ ſeu $k = 2 \sin \alpha$, unde in aequationibus III, IV, ſit $z = \infty$, quia latus coni O H ad axem O G normalis eſt. In aequatione vero VI (§. 14.) eſt $v^2 = u^2$, quoniam abſciſſae u in recta O G per centrum ſphaerae O et medium G arcus E F capiuntur, ordinatae v ad O G normales, unde ob G O E = G O F = 45°, ſit $v = u$. Proiectio nempe conſtat binis rectis E O E′, F O F′.

Problema II.

§. 16. *Invenire locum verticis trianguli ſphaerici, ſi ratio coſinuum binorum laterum eſt conſtans.*

Poſito coſ A C = n coſ B C eſt Fig. 5.

$$\cos\phi = n \cos(\alpha - \phi) \quad (\S.\ 3.)$$
$$= n \cos\alpha \cos\phi + n \sin\alpha \sin\phi, \text{ ideoque}$$
$$\text{tang}\,\phi = \frac{1 - n \cos\alpha}{n \sin\alpha},$$

et ψ prorſus eliminatur, h. e. arcus ϕ valorem habet determinatum, quivis autem valor arcus ψ problemati ſatisfacit. Capto igitur A D = Arc. tang $\frac{1 - n \cos\alpha}{n \sin\alpha}$, et erecto circulo maximo D C ad A B normali, e cuius quovis puncto C ducantur circuli maximi C A, C B, conſtanter erit

coſ A C = n coſ B C.

Caſu $n = 1$ eſt tang A D = tang $\frac{1}{2}\alpha$, et circulus D C problemati ſatisfaciens per medium arcus A B tranſit.

Caſu $n = 0$ eſt $\phi = 90°$. Capto enim A D = 90°, A erit polus circuli D C, ideoque conſtanter A C = 90°, et coſ A C : coſ B C = 0 : coſ B C.

Caſu

Caſu $n = \pm \infty$ eſt $\tang AD = -\cot \alpha$, h. e. $-AD$ ſeu $AR = 90^\circ - \alpha$. Tunc enim ob $BR = AR + \alpha = 90^\circ$, B eſt polus circuli RS ad AB normalis, proinde ſemper

$$\cos AS : \cos BS = \cos AS : \cos 90^\circ = \cos AS : \pm 0 = \pm \infty : 1.$$

Caſu $n = -1$ eſt $\tang AD = -\cot \tfrac{1}{2}\alpha$, h. e. $AR = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha$, $BR = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha$: eſt autem

$$\cos(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = -\cos(90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Caſu $\alpha = 90^\circ$ eſt $\tang \Phi = \frac{1}{n}$. Caſu autem $\alpha = 180^\circ$ eſt $\Phi = 90^\circ$: ſi enim $AB = 180^\circ$, ſemper eſt $BD = 180^\circ - AD$, ergo

$$\cos AD = -\cos BD,$$

excepto caſu $AD = 90^\circ$, ubi $\cos AD = \cos BD = 0$, et $\cos AC = \cos BC = 0$; atque hoc ſolo caſu aequatio $\cos AC = n \cos BC$ locum habere poteſt, quoniam $0 = n \cdot 0$, quicquid n denotet, excepto $n = \infty$.

Problema III.

§. 17. *III. Invenire locum verticis, ſi ratio ſinuum dimidiorum laterum eſt conſtans.*

Hocce caſu eſt $\sin \tfrac{1}{2} AOC = n \sin \tfrac{1}{2} BOC$, unde ſequitur

$$1 - \cos AOC = n^2 (1 - \cos BOC), \text{ h. e.}$$

$$n^2 - 1 = \cos\psi\, [n^2 \cos(\alpha - \phi) - \cos\phi],$$

proinde

$$\cos\psi = \frac{n^2 - 1}{n^2 \cos(\alpha - \phi) - \cos\phi}.$$

Poſito $\psi = 0$ ſeu $\cos\psi = 1$, ſit

n^2

$n^2 [1 - \text{coſ} (\alpha - \Phi)] = 1 - \text{coſ} \Phi$, h. e.
$n \text{ ſin } \frac{1}{2} (\alpha - \Phi) = \text{ſin } \frac{1}{2} \Phi$, unde ſequitur

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \Phi = \frac{n \text{ ſin } \frac{1}{2} \alpha}{n \text{ coſ } \frac{1}{2} \alpha \pm 1}.$$

Habemus itaque

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A O E = \frac{n \text{ ſin } \frac{1}{2} \alpha}{n \text{ coſ } \frac{1}{2} \alpha + 1},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A O F = \frac{n \text{ ſin } \frac{1}{2} \alpha}{n \text{ coſ } \frac{1}{2} \alpha - 1}, \text{ et}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} E O F = \frac{2 n \text{ ſin } \frac{1}{2} \alpha}{n^2 - 1}.$$

Definiuntur igitur anguli $\frac{1}{2} A O E$, $\frac{1}{2} A O F$, $\frac{1}{2} E O F$ eodem modo per $\frac{1}{2} \alpha$, ac in I. problemate $A O E$, $A O F$, $E O F$, per α (§. 4.).

§. 18. Ad ſolidi naturam cognoſcendam, aequationem inter ternas coordinatas $O L = x$, $L K = y$, $K C = z$, quaerere praeſtat. Eſt nempe $\text{coſ} A O C = \frac{x}{O C}$, $\text{coſ} B O C = \frac{O M}{O C}$, et $O M = x \text{ coſ } \alpha + y \text{ ſin } \alpha$ (§. 8.), unde ob

$$n^2 \text{ coſ } B O C = n^2 - 1 + \text{coſ } A O C \text{ (§. 17.)},$$

oritur $n^2 (x \text{ coſ } \alpha + y \text{ ſin } \alpha) = (n^2 - 1) O C + x$,

vel ob $O C = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$,

$$\text{I. } 0 = n^2 x^2 [n^2 \text{ ſin}^2 \alpha - 2 (1 - \text{coſ } \alpha)]$$
$$+ y^2 (n^4 \text{ coſ}^2 \alpha - 2 n^2 + 1) + z^2 (n^4 - 2 n^2 + 1)$$
$$- 2 n^2 x y \text{ ſin } \alpha (n^2 \text{ coſ } \alpha - 1).$$

Aſſumta quapiam alia recta O E pro abſciſſarum axe, poſitisque $AOE = \omega$, $ON = u$, $NK = v$, $KC = z$, ut ſit $x = u \cos \omega - v \sin \omega$, $y = u \sin \omega + v \cos \omega$ (§. 9.), aequatio I. hanc induet formam:

$$\begin{aligned}
o = u^2 \, [& n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha) \cos^2 \omega + (n^4 \cos^2 \alpha - 2 n^2 + 1) \sin^2 \omega \\
& - 2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1) \sin \omega \cos \omega] \\
+ 2 u v \, [& (n^4 \cos^2 \alpha - n^4 \sin^2 \alpha - 2 n^2 \cos \alpha + 1) \sin \omega \cos \omega \\
& - n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1) (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)] \\
+ v^2 \, [& n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha) \sin^2 \omega + (n^4 \cos^2 \alpha - 2 n^2 + 1) \cos^2 \omega \\
& + 2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1) \sin \omega \cos \omega] \\
& + z^2 (n^2 - 1)^2 .
\end{aligned}$$

Quo terminus $u v$ evaneſcat, ponatur

$$o = (n^4 \cos 2 \alpha - 2 n^2 \cos \alpha + 1) \sin 2 \omega - 2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1) \cos 2 \omega ,$$

ut ſit

$$\tan 2 \omega = \frac{2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1)}{(n^2 \cos \alpha - 1)^2 - n^4 \sin^2 \alpha} ,$$

$$\sin 2 \omega = \frac{2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1)}{\sqrt{(n^2 \cos \alpha - 1)^2 + n^4 \sin^2 \alpha}} = \frac{2 n^2 \sin \alpha \, (n^2 \cos \alpha - 1)}{n^4 - 2 n^2 \cos \alpha + 1} ,$$

$$\cos 2 \omega = \frac{n^4 \cos 2 \alpha - 2 n^2 \cos \alpha + 1}{n^4 - 2 n^2 \cos \alpha + 1} ,$$

$$\sin^2 \omega = \frac{1 - \cos 2 \omega}{2} = \frac{n^4 \sin^2 \alpha}{n^4 - 2 n^2 \cos \alpha + 1} ,$$

$$\cos^2 \omega = \frac{n^4 \cos^2 \alpha - 2 n^2 \cos \alpha + 1}{n^4 - 2 n^2 \cos \alpha + 1} = \frac{(n^2 \cos \alpha - 1)^2}{n^4 - 2 n^2 \cos \alpha + 1} .$$

Quibus valoribus ſubſtitutis, reductisque reducendis, ultima aequatio in hanc abit:

$$\text{II.} \quad o = (n^2 - 1)^2 z^2 + (n^2 - 1)^2 v^2 - 2 n^2 (1 - \cos \alpha) u^2 .$$

§. 19.

§. 19. Cum aequatio haec ſemper binos praebeat valores aequales $\pm u$, $\pm v$, $\pm z$, caſu vero $u = 0$, v et z aut evaneſcant aut ſiant imaginariae ob $z^2 = -v^2$, ſequitur, ſolidum eſſe *conum*, cuius vertex in O, cuiusque axis cum abſciſſarum u axe O G coincidens ad alteram partem verſus O G′ prolongatus ſimili cono huic e vertice oppoſito reſpondet, qui problemati pariter ſatisfacit. Poſito $z = c$, lineae O E, O F, interſectionis ſuperſiciei coni cum plano A O B definiuntur aequatione Fig. 6.

$$\text{tang } GOE = \text{tang } GOF = \frac{v}{u} = \frac{2n \,\text{ſin}\, \frac{1}{2}\alpha}{n^2 - 1}.$$

Sin autem abſciſſae u tribuitur valor conſtans c, pro ſectione coni ad axem normali in diſtantia c a vertice nanciſcimur aequationem

$$z^2 = \left(\frac{2nc \,\text{ſin}\, \frac{1}{2}\alpha}{n^2 - 1}\right)^2 - v^2,$$

quae circulum definit, cuius radius $= \frac{2nc \,\text{ſin}\, \frac{1}{2}\alpha}{n^2 - 1}$, centrum in axe O G. Corpus quaeſitum eſt itaque conus rectus ſuper baſe circulari. Quod ſi ponitur O C radio ſphaerae e aequalis, ſeu $u^2 + v^2 + z^2 = e^2$, proiectio interſectionis coni cum ſphaera, hac aequatione definitur:

$$u^2 = \frac{(n^2 - 1)^2 e^2}{n^4 - 2n^2 \,\text{coſ}\, \alpha + 1}.$$

Ordinata itaque v non determinatur, abſciſſa autem u conſtantem habet valorem, h. e. proiectio interſectionis eſt recta ad O G normalis a vertice O diſtans intervallo

 $u =$

$$u = \frac{(n^2 - 1)e}{\sqrt{(n^4 - 2n^2 \cos\alpha + 1)}}.$$

Ipſa igitur interſectio eſt curva in eodem plano deſcripta, ideoque *circulus* in ſphaerae ſuperficie.

Problema IV.

§. 20. *Invenire locum verticis, data ratione coſinuum dimidiorum laterum.*

Datur aequatio $\cos\frac{1}{2} AC = n \cos\frac{1}{2} BC$, h. e.

$$1 + \cos AC = n^2 + n^2 \cos BC,$$

unde ſequitur

$$n^2 - 1 = \cos\psi\,(\cos\phi - n^2 \cos(\alpha - \phi)), \text{ et}$$

$$\cos\psi = \frac{n^2 - 1}{\cos\phi - n^2 \cos(\alpha - \phi)},$$

quae expreſſio ei, quam caſu praecedente (§. 17.) invenimus, aequalis eſt at oppoſita. Quare ſi arcum DC hocce caſu appellamus ψ', erit $\cos\psi' = -\cos\psi$, h. e. $\psi' =$

Fig 2. $180° - \psi$. Sit nempe $ADB = \alpha$, $AD = \phi$, $DC = \psi$, et arcus DC prolongetur, donec circulo ADB iterum occurrerit in D′, fiatque $D'C' = DC = \psi$. Habemus itaque $AD' = 180° - \phi$, $BD' = 180° - BD$, unde ſequitur

$$\cos AC' = \cos C'D' \cos AD' = -\cos\psi \cos\phi = -\cos AC, \text{ et}$$

$$\cos BC' = -\cos BD \cos C'D' = -\cos BC.$$

Eſt autem

$$\cos AC = 1 - n^2 + n^2 \cos BC \text{ (§. 17.), proinde}$$

$$\cos AC' = n^2 - 1 + n^2 \cos BC', \text{ unde ſequitur}$$

1 +

$1 + \text{coſ} A C' = n^2 (1 + \text{coſ} B C')$, h. e.

$\text{coſ} \frac{1}{2} A C' = n \text{ coſ} \frac{1}{2} B C'$.

Cum itaque cuicunque arcus ϕ valori iidem reſpondeant valores $D C' = D C$, puncta C' eandem curvam deſcribent ac puncta C, verum in hemiſphaerio oppoſito $A D' Z O$, circulum nempe minorem, cuius a centro diſtantia $= \frac{n^2 - 1}{\sqrt{(n^4 - 2 n^2 \text{coſ} \alpha + 1)}}$, poſito radio ſphaerae $= 1$ (§. 19.).

§. 21. Sit A E G F circulus ſphaerae maximus per puncta A, B, E, F tranſiens, quae cum punctis A, B, E, F, problematis III conveniunt, ſitque P medium arcus $A B = \alpha$, G medium arcus E F, et polus circuli minoris E C F problemati III ſatisfacientis; deſcribatur denique e polo P per puncta A, B, circulus minor A C B, qui priorem in C ad angulum rectum ſecabit. Ductis nempe arcubus circulorum maximorum P C, G C, erit in triangulo ſphaerico P C G, Fig. 9.

$$\text{coſ} P C G = \frac{\text{coſ} P G - \text{coſ} P C \text{ coſ} C G}{\text{ſin} P C \text{ ſin} C G}.$$

Eſt autem $P C = P A = \frac{1}{2} \alpha$,

$$\text{tang} C G = \text{tang} E G = \text{tang} \tfrac{1}{2} E F = \frac{2 n \text{ ſin} \frac{1}{2} \alpha}{n^2 - 1} \text{ (§. 17.)},$$

et $P G = E G + P E$; unde fit

$$\text{coſ} P C G = \frac{\text{coſ} P E - \text{ſin} P E \text{ tang} E G - \text{coſ} \frac{1}{2} \alpha}{\text{ſin} \frac{1}{2} \alpha \text{ tang} E G}.$$

Quare cum ſit

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} A E = \frac{n \text{ ſin} \frac{1}{2} \alpha}{n \text{ coſ} \frac{1}{2} \alpha + 1} \text{ (§. 17.), ideoque}$$

ſin

$$\sin \tfrac{1}{2} AE = \frac{n \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1)}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} AE = \frac{n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1}{\sqrt{(n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1)}},$$

$$\sin AE = \frac{2n \sin \frac{1}{2} \alpha (n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1)}{n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1},$$

$$\cos AE = \frac{n^2 (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + 2n \cos \frac{\alpha}{2} + 1}{n^2 + 2n \cos \frac{\alpha}{2} + 1},$$

reperitur

$$\cos PE = \cos (AE - \tfrac{1}{2} \alpha) =$$

$$\frac{n^2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + 2n \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2n \sin^2 \frac{\alpha}{2} (n \cos \frac{\alpha}{2} + 1)}{n^2 + 2n \cos \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$= \frac{(n^2 + 1) \cos \frac{1}{2} \alpha + 2n}{n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1},$$

et $\sin PE =$

$$\frac{2n \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (n \cos \frac{\alpha}{2} + 1) - n^2 \sin \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) - 2n \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1}$$

$$= \frac{(n^2 - 1) \sin \frac{1}{2} \alpha}{n^2 + 2n \cos \frac{1}{2} \alpha + 1}:$$

unde ſit

$$\cos PCG = \frac{(n^2 + 1) \cos \frac{\alpha}{2} + 2n - 2n \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} (n^2 + 2n \cos \frac{\alpha}{2} + 1)}{(n^2 + 2n \cos \frac{\alpha}{2} + 1) \sin \frac{\alpha}{2} \tan EG} = 0.$$

Eſt itaque $PCG = 90^\circ$, unde patet, circulos EC, BC, invicem ſub angulo recto ſecare, quia PC ad BC, et GC ad EC normales ſunt. Hinc ſequens fluit

Theo-

Theorema.

Si bini circuli minores in ſphaera invicem ad angulos rectos ſecant, et e punctis interſectionis alterutrius cum circulo maximo per utriusque polos, ad quodvis punctum alterius arcus circulorum maximorum ducuntur, ſinus dimidiorum eorum erunt in ratione conſtante.

Ad idem Theorema noſter quondam *Lexell* alio prorſus modo pervenit *(V. Acta Acad. Sc. Imp. Petropol. pro Anno 1782. Pars Poſterior, pag. 88. ſqq.)*.

§. 22. Supra (§. 17.) invenimus

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} AE = \frac{n \operatorname{ſin} \frac{1}{2} \alpha}{n \operatorname{coſ} \frac{1}{2} \alpha + 1}, \text{ et } \operatorname{tang} EG = \frac{2 n \operatorname{ſin} \frac{1}{2} \alpha}{n^2 - 1}.$$

Poſito igitur $EG = \beta$, $AE = \gamma$, $\cot \frac{1}{2} \gamma = \delta$, prior aequatio dat $n = \frac{1}{\delta \operatorname{ſin} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{coſ} \frac{1}{2} \alpha}$, quo valore in altera ſubſtituto fit

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{2 (\delta \operatorname{ſin} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{coſ} \frac{1}{2} \alpha)}{(1 - \delta^2) \operatorname{ſin} \frac{1}{2} \alpha + 2 \delta \operatorname{coſ} \frac{1}{2} \alpha};$$

unde ſequitur

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{2 (1 + \delta \operatorname{tang} \beta)}{2 \delta + (\delta^2 - 1) \operatorname{tang} \beta}.$$

Aſſumtis itaque β et γ pro lubitu, n et α determinantur, unde ſequens reſultat

Theo-

Theorema.

Datis quibuscunque circulis minoribus in ſphaera aequalibus ac parallelis $EHFI$, $E'H'F'I'$, *quorum a polis ſuis diſtantia ſit* $= \beta$, *perque eorum polos* G, G', *ducto circulo maximo, in quo pro arbitrio aſſumatur arcus* $EA = \gamma$, *tumque capiatur* $AEB = \alpha$, *ut ſit*

Fig. 10.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2\,(\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma + \text{tang}\,\beta\,(1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma)};$$

ſi ad quodvis punctum C *circuli* $EHFI$ *ducantur arcus circulorum maximorum* AC, BC, *et ad quodpiam punctum* C' *circuli* $E'H'F'I'$ *arcus* AC', BC', *conſtanter erit*

$$\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}AC : \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}BC = \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}AC' : \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}BC' =$$
$$1 : \text{cot}\,\tfrac{1}{2}\gamma\;\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\alpha \quad (\text{§. } 17.\ 20.).$$

ESSAI

ESSAI
SUR
LES NOMBRES PREMIERS.

Par

M. *KRAFFT.*

Préſenté à l'Académie le 12 Avril 1798.

§. 1.

Quoique les Mathématiques aient deja été enrichies de pluſieurs decouvertes très-ingénieuſes ſur les nombres premiers: cependant la nature de ces ſortes de nombres en général eſt encore ſi peu connue, que même le moindre ſuccès à y repandre quelques nouvelles lumieres, ne ſauroit point être ſans aucun intéret. Ce n'eſt, que dans cette perſuaſion, que j'oſe expoſer dans ce Mémoire le reſultat de quelques recherches que j'ai pu faire ſur une matiere auſſi abſtraite, qui toutefois ne laiſſe pas d'avoir des attraits d'un genre particulier. Plus il paroit douteux, qu'on parvienne jamais à decouvrir pour des nombres premiers des expreſſions auſſi générales, que celles qu'on a par exemple pour les diverſes eſpeces des nombres polygones: plus il ſeroit à deſirer qu'au moins on trouvât des fonctions algebriques, qui donnaſſent toujours des nombres premiers, pourvu qu'on n'y mette à la place de leurs quantités indeterminées que de cer-

certaines eſpeces de nombres, toutes compriſes, ou au moins toutes non-compriſes, dans une expreſſion algebrique générale. C'eſt à ce dernier genre de fonctions, que ſe rapportent les recherches ſur les nombres premiers, qui ſont l'objet de ce Mémoire, & qui, ſi elles ſauroient meriter l'attention des Géometres, pourroient peut-être en occaſionner de plus intéreſſantes. Le paſſage ſuivant qu'on lit dans la nouvelle edition des recreations mathématiques & phyſiques par M. Ozanam, m'en a donné la premiere occaſion: „Voici, „dit l'editeur, une propriété curieuſe des nombres premiers: „tout nombre premier, (hors 2 & 3) étant augmenté ou „diminué de l'unité, eſt diviſible par ſix, & je ne crois „pas, que perſonne l'ait demontré à priori. Mais l'inverſe „n'eſt pas vraie; c'eſt à dire, tout nombre qui, augmenté „ou diminué de l'unité, eſt diviſible par ſix, n'eſt pas pour „cela un nombre premier.„ La premiere de ces deux propoſitions ſe demontre facilement de la maniere ſuivante: Tout nombre N tel qu'il ſoit, étant de la forme $3m$ ou $3m+1$ ou $3m-1$; tout nombre impair $2N-1$ eſt de la forme $6m-1$ ou $6m+1$ ou $6m-3$; or de ces trois formes la derniere $6m-3$ étant ſeule diviſible par trois; il s'enſuit, que tout nombre impair non-multiple de trois eſt de la forme $6m+1$ ou $6m-1$. Or tout nombre premier plus grand que trois, eſt un nombre impair non-multiple de trois; il eſt donc néceſſairement de la forme $6m+1$ ou $6m-1$, & par conſéquent, diminué ou augmenté de l'unité, il eſt diviſible par ſix. Mais l'inverſe de cette propoſition m'a paru aſſes intéreſſante pour m'engager à examiner, quelle devoit être la condition des nombres m, pour que les nombres $N=6m+1$ ou $N=6m-1$ qui en ſont formés, ſoient des nombres premiers. Voici ce que j'ai trouvé

à

à cet égard, où je remarque d'avance, que les nombres, deſignés dans la ſuite par les lettres N, m, x, y, u, t, v, z, Q, r, k, λ, μ & ν, ſont ſuppoſés être entiers & poſitifs, à moins qu'il n'en ſoit dit expreſſement le contraire.

Propoſition I.

§. 2. Tout nombre N de la forme $6m + 1$ eſt un nombre premier, ſous la condition, que le nombre m ne ſoit compris ni ſous la forme $6xy + x + y$ ni ſous celle-cy: $6xy - x - y$.

Demonſtration.

Si $N = 6m + 1$ eſt un nombre compoſé, ayant deux facteurs quelconques $u + t$ & $v + z$; on a $6m + 1 = uv + uz + tv + tz$. Chacun de ces quatre produits ſemblables peut toujours etre ſuppoſé $= 1$. Soit $tz = 1$ & partant ou $t = 1$ & $z = 1$ ou $t = -1$ & $z = -1$, & par conſéquant $6m = uv + u + v$ ou $6m = uv - u - v$; & ces deux cas ſont les ſeuls poſſibles, vuque, le nombre m étant poſitif, il ſuit que u & v ſoient ou tous les deux poſitifs ou tous les deux negatifs. Soit donc d'abord $6m = uv + u + v$ & partant $uv + u + v$ diviſible par 2 & 3. Pour qu'il le ſoit par 2, il faut que u & v ſoient, l'un & l'autre, des nombres pairs; poſant donc $u = 2p$ & $v = 2q$, de ſorte que $3m = 2pq + p + q$, on voit que $2pq + p + q$ doit être diviſible par 3; or pour cet effet, tout nombre étant de la forme $3a$, ou $3a + 1$, ou $3a - 1$; il n'y a d'autres ſuppoſitions poſſibles à faire, que $p = 3x$ et $q = 3y$ ou auſſi $p = 3x - 1$ & $q = 3y - 1$; la premiere donne $m = 6xy + x + y$; la ſeconde $m = 6xy - x - y$. Soit maintenant $6m = uv - u - v$, & partant $uv - u - v$ di-

 viſi-

viſible par 2 & 3. Pour qu'il le ſoit par 3; il faut encore que u & v ſoient l'un & l'autre, des nombres pairs, & poſant $u = 2p$ & $v = 2q$, deſorte que $3m = 2pq + p + q$, on voit que $2pq + p + q$ doit être diviſible par 3; or pour cet effet il n'y a d'autres ſuppoſitions poſſibles à faire, que $p = 3x$ & $q = 3y$ ou auſſi $p = 3x - 1$ & $q = 3y - 1$; la premiére donne $m = 6xy - x - y$; la ſeconde $m = 6xy + x + y$. Donc ſi le nombre $N = 6m + 1$ eſt compoſé: le nombre m eſt néceſſairement de la forme: $m = 6xy + x + y$ ou de celle-cy: $m = 6xy - x - y$; & par conſéquant, ſi le nombre m n'eſt ni de l'une ni de l'autre de ces deux formes: le nombre $N = 6m + 1$ ne ſauroit être compoſé & partant il eſt premier.

Corollaires.

1.) Si le nombre m eſt de la forme $6xy + x + y$; on a $6m + 1 = (6x + 1).(6y + 1)$ & partant le nombre $N = 6m + 1$ a les deux facteurs $6x + 1$ & $6y + 1$.

2.) Si le nombre m eſt de la forme $6xy - x - y$, on a $6m + 1 = (6x - 1).(6y - 1)$ & partant $N = 6m + 1$ a les deux facteurs $6x - 1$ & $6y - 1$.

Propoſition II.

§. 3. Tout nombre N de la forme $6m - 1$ eſt un nombre premier, ſous la condition, que le nombre m ne ſoit point compris ſous la forme $6xy + x - y$.

Demonſtration.

Si $N = 6m - 1$ eſt un nombre compoſé, ayant deux facteurs quelconques $u + 1$ & $v + z$; on a $6m - 1 = uv + uz$

$uz + tu + tz$. Chacun de ces quatre produits ſemblables peut être ſuppoſé $= -1$. Soit $tz = -1$; & partant $t = -1$ & $z = +1$, ou réciproquement; & $6m = uv + u - v$ ou $6m = uv - u + v$; & ces deux cas, qui à cauſe de la permutabilité des u & v reviennent au même, ſont les ſeuls poſſibles, puisque, le nombre m étant poſitif, il faut, que u & v ſoient ou tous les deux poſitifs ou tous les deux négatifs. Soit donc $6m = uv + u - v$ & partant $uv + u - v$ diviſible par 2 & 3. Pour qu'il le ſoit par 2; il faut que u & v ſoient, l'un & l'autre, des nombres pairs; & poſant $u = 2p$ & $v = 2q$ de ſorte que $3m = 2pq + p - q$, on voit que $2pq + p - q$ doit être diviſible par 3; or pour cet effet il n'y a d'autres ſuppoſitions poſſibles à faire que $p = 3x$ & $q = 3y$, ou auſſi $p = 3x + 1$ & $q = 3y - 1$; la premiére donne $m = 6xy + x - y$; la ſeconde $m = 6xy - x + y$ & ces deux expreſſions, à cauſe de la permutabilité des x & y, reviennent au même. Donc ſi $N = 6m - 1$ eſt compoſé: le nombre m eſt néceſſairement de la forme $6xy + x - y$; & par conſéquant, ſi le nombre m n'eſt point de cette forme, le nombre $N = 6m - 1$ ne ſauroit être compoſé, & partant il eſt premier.

Corollaires.

1.) Si le nombre m eſt de la forme $6xy + x - y$; on a $6m - 1 = (6x - 1)(6y + 1)$ & partant le nombre $N = 6m - 1$ a les deux facteurs $6x - 1$ & $6y + 1$.

2.) Non ſeulement tout nombre impair non-multiple de trois eſt de la forme $6m \mp 1$; les facteurs, s'il eſt compoſé, ſont tous auſſi de la même forme.

CLAS-

CLASSIFICATION
des nombres naturels par rapport à la formation des nombres premiers.

§. 4. Comme il y a deux ſortes des nombres premiers à diſtinguer, les uns de la forme $6m+1$, les autres de la forme $6m-1$; réciproquement les nombres en général, eû égard à leur aptitude à produire, ſous l'une ou l'autre de ces deux formes, les nombres premiers, ſont de quatre eſpèces: Il y a

1.) Des nombres abſolument propres à la production des nombres premiers, c'eſt à dire, qui produiſent des nombres premiers ſous la forme $6m+1$ & ſous la forme $6m-1$. Le caractère diſtinctif de ces nombres eſt de n'être reductibles ni à la forme $6xy+x+y$, ni à la forme $6xy-x-y$, ni non plus à celle-cy: $6xy+x-y$. Tels ſont dans la premiere demi-centaine des nombres naturels les ſuivans: 1. 2. 3. 5. 7. 10. 12. 17. 18. 23. 25. 30. 32. 33. 38. 40. 45. 47.

2.) Des nombres propres à la production des nombres premiers ſous la ſeule forme $6m+1$. Le caractère diſtinctif de ces nombres eſt de n'être point réductibles ni à la forme $6xy+x+y$, ni à la forme $6xy-x-y$, mais bien à celle cy: $6xy+x-y$. Tels ſont les nombres 6. 11. 13. 16. 21. 26. 27. 35. 37. 46.

3.) Des nombres propres à la production des nombres premiers ſous la ſeule forme $6m-1$. Le caractère diſtinctif de ces nombres eſt de n'être point reductibles à la forme $6xy$

$6xy + x - y$; mais bien à la ſorme $6xy + x + y$ ou $6xy - x - y$, ou à l'une & l'autre. Tels ſont les nombres: 4. 8. 9. 14. 15. 19. 22. 28. 29. 39. 42. 43. 44. 49.

4.) Des nombres abſolument impropres à la production des nombres premiers, c'eſt à dire, qui ne produiſent des nombres premiers, ni ſous la ſorme $6m + 1$ ni ſous la ſorme $6m - 1$. Le caractère diſtinctif de ces nombres eſt d'être réductibles à la ſorme $6xy + x + y$ ou $6xy - x - y$, & encore à la ſorme $6xy + x - y$. Tels ſont les nombres: 20. 24. 31. 34. 36. 41. 48. 50.

Si la loi de progreſſion des termes des quatre ſeries que je viens de donner ſeulement pour la premiere demi-centaine des nombres naturels, etoit connue; celle des nombres premiers le ſeroit auſſi & on auroit la ſolution du Problème de Fermat, de trouver un nombre premier plus grand qu'un nombre donné. D'ailleurs il eſt facile, de trouver autant de termes de ces ſeries qu'on voudra; car ayant, par exemple, pour le premier cas, $m = 6xy + x + y = (6x + 1)y + x$; on aura pour $y = 1$; $y = 2$; $y = 3$ &c. $m = 7x + 1$; $m = 13.x + 2$; $m = 19.x + 3$ &c. & en ſubſtituant dans ces formules à la place de x autant des termes de la ſuite naturelle des nombres qu'on voudra, ce qui ſe ſera par de ſimples additions; on aura, jusqu'à la même limite, tous les nombres réductibles à la forme $6xy + x + y$ & on connoitra en même tems les valeurs des x & y dûes à leur réduction. Par de ſemblables operations on obtiendra les mêmes réſultats ſur les formes: $m = 6xy - x - y$ & $m = 6xy + x - y$, de façon, qu'on connoitra

pour

pour chaque nombre m, jusqu'à la même limite, s'il eſt réductible à l'une ou l'autre de ces formes ou non, & en cas qu'il le ſoit, quelles ſont les valeurs des x & y dûes à ſa réduction; d'où l'on conclura tout de ſuite, ſi le nombre $N = 6m - 1$ eſt un nombre premier, ou, en cas qu'il ſoit composé, quels ſont les nombres qui le compoſent. Ceci m'a fourni l'idée d'une Table très-facile à conſtruire & très-compendieuſe, qui préſente tous les nombres premiers jusqu'à une limite quelconque priſe à volonte, & qui en même tems pour les nombres non-premiers impairs & non-multiples de trois fait connoitre les facteurs.

ECHANTILLON

d'une Table, qui pour les nombres impairs non-multiples de trois donne à connoitre, ſi ces nombres ſont premiers ou quels ſont leurs diviſeurs.

La quelle indique

par la lettre	que le nombre m, qui eſt accompagné de cette lettre, eſt réductible à la forme
A	$6xy + x + y$.
B	$6xy - x - y$.
C	$6xy + x - y$.

& les deux nombres joints à la lettre, ſont, le premier la valeur de x; le ſecond la valeur de y, dues à la réduction du nombre m à la forme marquée par la lettre.

Nom-

Nombre m.	Marques & Baſes de ſa réductibilité.	Nombre m.	Marques & Baſes de ſa réductibilité.
1.		26.	C. 1; 5.
2.		27.	C. 4; 1.
3.		28.	A. 2; 2.
4.	B. 1; 1.	29.	A. 4; 1. B. 6; 1.
5.		30.	
6.	C. 1; 1.	31.	B. 3; 2. C. 1; 6.
7.		32.	
8.	A. 1; 1.	33.	
9.	B. 1; 2.	34.	B. 7; 1. C. 5; 1.
10.		35.	C. 2; 3.
11.	C. 1; 2.	36.	A. 5; 1. C. 1; 7.
12.		37.	C. 3; 2.
13.	C. 2; 1.	38.	
14.	B. 1; 3.	39.	B. 8. 1.
15.	A. 2; 1.	40.	
16.	C. 1; 3.	41.	A. 3; 2. C. 6; 1.
17.		42.	B. 4; 2.
18.		43.	A. 6; 1.
19.	B. 1; 4.	44.	B. 9; 1.
20.	B. 2; 2. C. 3; 1.	45.	
21.	C. 1; 4.	46.	C. 1; 9.
22.	A. 3; 1.	47.	
23.		48.	B. 3; 3. C. 7; 1.
24.	B. 5; 1. C. 2; 2.	49.	B. 10; 1.
25.		50.	A. 7; 1. C. 4; 2.

Il s'enſuit, que

1.) Les nombres m marqués d'aucune lettre, ne ſont réductibles à aucune des trois dittes formes & partant que les nombres $6m + 1$ & auſſi $6m - 1$ qui en ſont formés, ſont des nombres premiers.

2.) Les nombres m marqués de A ſans C. étant reductibles à la forme $6xy + x + y$ par les valeurs de x & y jointes à la lettre A, & n'étant point réductibles à la forme $6xy + x - y$. produiſent ſous la forme $N = 6m + 1$ des nombres N compoſés, qui ont les facteurs $6x + 1$ et & $6y + 1$; mais que ſous la forme $N = 6m - 1$ ils produiſent des nombres premiers.

3.) Les nombres m marqués de B ſans C, étant réductibles à la forme $6xy - x - y$, par les valeurs de x & y jointes à la lettre B, & n'étant point réductibles à la forme $6xy + x - y$, produiſent ſous la forme $N = 6m + 1$ des nombres N compoſés qui ont les facteurs $6x - 1$ & $6y - 1$; mais que, ſous la forme $N = 6m - 1$, ils produiſent des nombres premiers.

4.) Les nombres m marqués de C ſans A ni B étant réductibles à la forme $6xy + x - y$ par les valeurs de x & y jointes à la lettre C, & n'étant point réductibles ni à la forme $6xy + x + y$ ni à $6xy - x - y$, produiſent ſous la forme $N = 6m - 1$ des nombres N compoſés, qui ont les facteurs $6x - 1$ & $6y + 1$; mais que ſous la forme $N = 6m + 1$ ils produiſent des nombres premiers.

5.)

5.) Les nombres m marqués de A & C, ou de B & C étant réductibles à la forme $6xy + x + y$ ou $6xy - x - y$, & en même tems auſſi à la forme $6xy + x - y$, produiſent ſous la forme $N = 6m + 1$ & ſous la forme $N = 6m - 1$ des nombres N compoſés, dont on réconnoitra de la même manière les diviſeurs.

La petite Table que je viens de donner, ſuffit à un pareil examen de tous les nombres impairs non-multiples de trois, jusqu'à 301, s'ils ſont premiers ou quels ſont les facteurs qui les compoſent. Eclairciſſons ſon uſage par quelques exemples:

Exemple I.

On demande, ſi $N = 221$ eſt un nombre premier ou quels en ſont les facteurs. On a $221 = 6.37 - 1$; donc $m = 37$. Le nombre 37 eſt, dans la Table, marqué de C.3; 2; donc $x = 3$ & $y = 2$; & partant $6.37 - 1 = 221$ eſt un nombre compoſé, ayant pour facteurs $6x - 1 = 17$ & $6y + 1 = 13$.

Exemple II.

Soit donné le nombre $N = 199$. On a $199 = 6.33 + 1$; donc $m = 33$. Le nombre 33 n'eſt marqué d'aucune lettre; donc $6.33 + 1 = 199$ eſt un nombre premier; & on voit de plus, que $6.33 - 1 = 197$ l'eſt également.

Exemple III.

Soit donné le nombre $N = 293$. On a $293 = 6.49 - 1$; donc $m = 49$. Le nombre 49 eſt marqué de B. 10; 1; ſans C donc $6.49 - 1 = 293$ eſt un nombre premier; & la marque B. 10; 1 fait voir de plus, (ſi l'on eſt intereſſé de le ſavoir) que $6.49 + 1 = 295$ eſt un nombre compoſé, ayant les deux facteurs $6x - 1 = 59$ & $6y - 1 = 5$.

Exemple IV.

Soit $N = 289$. On a $289 = 6.48 + 1$. Donc $m = 48$. Le nombre 48 eſt marqué de B 3; 3. & C. 7; 1 donc $x = 3$ & $y = 3$, & partant $6.48 + 1 = 289$ eſt un nombre compoſé quarré, ayant pour racine $6x - 1 = 6y - 1 = 17$. La marque C. 7; 1. fait voir de plus, que $6.48 - 1 = 287$ eſt un nombre compoſé, ayant les deux facteurs $6.7 - 1 = 41$ & $6.1 + 1 = 7$.

Il ne couteroit pas beaucoup de peine ni de tems de continuer une pareille Table auſſi loin qu'on voudra. Continuée ſeulement jusqu'à $m = 166667$, elle ſuffiroit à l'examen de tous les nombres impairs non-multiples de trois jusqu'à un million, ſans occuper qu'on nombre mediocre de feuilles; & peut-être auroit elle même quelques avantages ſur celle dont l'Ill. Euler a donné le plan dans ſon Mémoire: de Tabula numerorum primorum usque ad millionem et ultra continuanda. Voy. Novi Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. XIX.

§. 5. Un nombre m étant donné, s'il eſt réductible

à la forme	il faut, qu'il y ait des y ou x entiers & poſitifs tels, que	
$6xy+x+y$	$\frac{m-y}{6y+1}$	ſoient des
$6xy-x-y$	$\frac{m+y}{6y-1}$	nombres entiers
$6xy+x-y$	$\frac{m+y}{6y+1}$ ou $\frac{m-x}{6x-1}$	poſitifs.

ou que l'une ou l'autre des équations indéterminées $6xy+x+y-m=0$, ou $6xy+x-y-m=0$ ſoit réſoluble en nombres entiers. Quoique dans ces équations aucune des inconnues ne ſurpaſſe le premier degré: on ne ſauroit pourtant point ſe ſervir, pour les reſoudre, de la methode de Mr. de la Grange, quand on eſt conduit à ces équations par la recherche, ſi un nombre $N=6m\mp1$ eſt premier ou composé, vuque cette methode ſuppoſe qu'on connoiſſe les facteurs du nombre N, & que par cette raiſon elle n'eſt point applicable à celui des problèms indeterminés, qui de tous l'eſt le plus. Faiſons cependant ſur ces équations les remarques ſuivantes:

Première équation

$$6xy+x+y-m=0.$$

§. 6. Soit Q le plus grand multiple de 6 contenu dans le nombre m, de ſorte que $m=6.Q+r$ & $r<6$. En poſant $Q=xy$ & $r=x+y$, on voit d'abord que, ſi r^2-4Q eſt un carré, on aura immediatement & en nombres entiers

$$x=\frac{r+\sqrt{(r^2-4Q)}}{2} \text{ \& } y=\frac{r-\sqrt{(r^2-4Q)}}{2}.$$

Or

Or il faut pour cet effet que Q ſoit moindre que 7, & cette reduction immediate du nombre m à la forme $6xy+x+y$, qui ſuppoſe que r^2-4Q ſoit un carré, n'a lieu que pour les cas $m=8$; 15; 22; 28; 29 & 41. Pour donc qu'un nombre $m=6Q+r$, pour qui une pareille reduction immediate n'a point lieu, ſoit pourtant réductible à la forme $6xy+x+y$, il faut que prenant un multiple de 6 moindre que 6Q, comme $6(Q-k)$ de ſorte que $m=6(Q-k)+r+6k$, on ait $Q-k=xy$ & $r+6k=x+y$; ce qui donne:

$$x=\frac{r+6k+\sqrt{[(r+6k)^2-4(Q-k)]}}{2}, \&$$

$$y=\frac{r+6k-\sqrt{[(r+6k)^2-4(Q-k)]}}{2}. \text{ Donc}$$

1.) Si r^2-4Q eſt un carré, ou s'il y a un nombre entier & poſitif k moindre que Q, qui ſatisfaſſe à l'égalité

$$36k^2+4(3r+1)k+r^2-4Q=\square,$$

le nombre $m=6Q+r$ eſt réductible à la forme $6xy+x+y$; & $N=6m+1$ n'eſt point premier.

2.) Si ni l'une ni l'autre de ces deux conditions n'a lieu; le nombre $m=6Q+r$ n'eſt point réductible à la forme $6xy+x+y$, ſans qu'il s'en ſuive déja, que $N=6m+1$ eſt un nombre premier, vû que le même m pourroit être réductible à la forme $6xy-x-y$.

Seconde équation

$$6xy-x-y-m=0.$$

§. [illegible]. Soit encore $m=6Q+r$, & il eſt viſible, qu'il n'y a point de reduction immediate à la forme $6xy-x-y$.

Pour

Pour donc qu'un nombre m ſoit réductible à cette forme, il faut que prenant un multiple de 6 plus grand que 6 Q, comme 6 (Q + λ) de ſorte que $m = 6(Q + \lambda) + r - 6\lambda$, on ait $Q + \lambda = xy$ & $6\lambda - r = x + y$, ce qui donne

$$x = \frac{6\lambda - r + \sqrt{[(6\lambda - r)^2 - 4(Q + \lambda)]}}{2} \;\&$$

$$y = \frac{6\lambda - r - \sqrt{[(6\lambda - r)^2 - 4(Q + \lambda)]}}{2}. \quad \text{Donc}$$

1.) S'il y a un nombre entier poſitif λ, qui ſatisfaſſe à l'égalité

$$36.\lambda^2 - 4(3r + 1)\lambda + r^2 - 4Q = \square,$$

le nombre $m = 6Q + r$ eſt réductible à la forme $6xy - x - y$; & $N = 6m + 1$ n'eſt point premier.

2.) Dans le cas du contraire; le nombre m n'eſt point réductible à la forme $6xy - x - y$, & s'il ne l'eſt non plus à la forme $6xy + x + y$; il eſt ſur, que $N = 6m + 1$ eſt un nombre premier.

Troiſième équation

$$6xy + x - y - m = 0.$$

§. 8. Soit, comme cy-deſſus, $m = 6Q + r$. En ſuppoſant d'abord $x > y$, & poſant $Q = xy$ & $r = x - y$, on voit, que, ſi $r^2 + 4Q$ eſt un carré, on a immediatement

$$x = \frac{\sqrt{(r^2 + 4Q)} + r}{2} \;\&\; y = \frac{\sqrt{(r^2 + 4Q)} - r}{2}.$$

Pour donc qu'un nombre $m = 6Q + r$, pour qui une pareille réduction immediate n'a point lieu, ſoit pourtant réductible à la forme $6xy + x - y$ où $x > y$, il faut que prenant un multiple de 6 moindre que 6 Q, comme $6(Q - \mu)$ de ſorte que $m = 6(Q - \mu) + r + 6\mu$, on ait $Q - \mu = xy$

&

& $r + 6\mu = x - y$; ce qui donne

$$x = \frac{\sqrt{[(6\mu + r)^2 + 4(Q - \mu)]} + 6\mu + r}{2} \ \&$$

$$y = \frac{\sqrt{[(6\mu + r)^2 + 4(Q - \mu)]} - 6\mu - r}{2}.$$

Soit maintenant $x < y$; & il eſt viſible qu'il n'y a, dans ce cas, point de reduction immediate à la forme $6xy + x - y$. Pour donc qu'un nombre $m = 6Q + r$, ſoit reductible à la forme $6xy + x - y$, en cas $x < y$, il faut qu'en prenant un multiple de 6 plus grand que $6Q$, comme $6(Q + \nu)$ de ſorte que $m = 6(Q + \nu) + r - 6\nu$ on ait $Q + \nu = xy$ & $6\nu - r = y - x$, ce qui donne

$$x = \frac{\sqrt{[(6\nu - r)^2 + 4(Q + \nu)]} - 6\nu + r}{2} \ \&$$

$$y = \frac{\sqrt{[(6\nu - r)^2 + 4(Q + \nu)]} + 6\nu - r}{2}.$$ Donc

1.) Si $r^2 + 4Q$ eſt un carré, ou s'il y a un nombre entier & poſitif μ moindre que Q, qui ſatisfaſſe à l'égalité

$$36\mu^2 + 4(3r - 1)\mu + r^2 + 4Q = \square,$$

le nombre $m = 6Q + r$ eſt réductible à la forme $6xy + x - y$, pour la quelle $x > y$.

2.) Si $r^2 + 4Q$ eſt un nombre non-carré & qu'il y a un nombre entier poſitif ν, qui ſatisfaſſe à l'égalité

$$36\nu^2 - 4(3r - 1)\nu + r^2 + 4Q = \square,$$

le nombre $m = 6Q + r$ eſt réductible à la forme $6xy + x - y$, pour la quelle $x < y$; & dans tous ces trois cas $N = 6m - 1$ n'eſt point un nombre premier.

3.) Si aucune de ces conditions n'a lieu; le nombre $m = 6Q + r$ eſt irreductible à la forme $6xy + x - y$, & $N = 6m - 1$ eſt un nombre premier.

§. 9.

§. 6. Les quatre équations de condition, que nous venons de trouver pour la réductibilité des nombres aux formes $6xy + x + y$ & $6xy + x - y$, ſe reduiſent à deux, en mettant indiſtinctement Ω pour k, λ, μ ou ν.

I.) Pour la réduction aux formes $6xy + x + y$ & $6xy - x - y$ & partant pour les nombres $N = 6m + 1$, on a

$$36.\Omega^2 \mp 4(3r + 1)\Omega + r^2 - 4Q = \square,$$

le ſigne + pour la réduction à la forme $6xy + x + y$; le ſigne − pour celle à la forme $6xy - x - y$.

II. Pour la réduction à la forme $6xy + x - y$ & partant pour les nombres $N = 6m - 1$, on a

$$36.\Omega^2 \mp 4(3r - 1)\Omega + r^2 + 4Q = \square,$$

le ſigne + pour le cas $x > y$; le ſigne − pour celui $x < y$. Sans entrer dans les méthodes de reſoudre, en nombres entiers, ces ſortes d'équations, qui ſont compriſes ſous la forme générale $a + bz + c^2z^2 = \square$ & partant du reſſort des methodes analytiques données par Mr. de la Grange, eclairciſſons leur application par quelques exemples:

Exemple I.

On demande, ſi le nombre 233033 eſt un nombre premier ou quels ſont les facteurs qui le compoſent.

Mr. Euler a examiné ce nombre dans les Nouveaux Commentaires de l'Académie T. IV. pag. 36. Il a fallu un long calcul pour reconnoitre, que ce nombre eſt compoſé; encore ce calcul n'en a-t-il point donné les facteurs que Mr. Euler a trouvé enſuite par une autre voye. Voici le

 cal-

calcul de ce nombre ſelon les principes que nous venons d'expoſer: $N = 233033 = 6.38839 - 1$; donc $m = 38839 = 6.6473 + 1$ & partant $Q = 6473$ & $r = 1$. Le nombre N étant de la forme $6m - 1$; l'équation de condition pour ſa réduſtibilité à la forme $6xy + x - y$ eſt

$$36.\Omega^2 + 4(3r - 1).\Omega + r^2 + 4Q = \Box,$$

qui, à cauſe de $3r - 1 = 2$ & $r^2 + 4Q = 25893$, ſe change en celle-ci:

$$36.\Omega^2 \mp 8.\Omega + 25893 = \Box.$$

Suppoſons maintenant qu'on ait une methode analytique de reſoudre cette équation en nombres entiers; on trouvera qu'en prennant le ſigne negatif, on y ſatisfait en faiſant $\Omega = 1$. Le nombre $m = 38839$ eſt donc réduſtible à la forme $6xy + x - y$; & $N = 6m - 1 = 233033$ n'eſt point un nombre premier. Pour en trouver les facteurs, à cauſe de $x < y$ (§. 8.) on a l'équation

$$x = \frac{\sqrt{\{(6\nu - r)^2 + 4(Q - \nu)\}} - 6\nu + r}{2}$$

qui, à cauſe de $\nu = \Omega = 1$; $r = 1$ & $Q = 6473$ ſe change en celle-cy:

$$x = \frac{\sqrt{(25 + 4.6472)} - 5}{2} = 78; \text{ donc}$$

$$y = \frac{\sqrt{(25 + 4.6472)} + 5}{2} = 83.$$

& partant le nombre 233033 a pour facteurs $6x - 1 = 467$ & $6y + 1 = 499$.

Exemple II.

On demande, ſi le nombre 1000009 eſt un nombre premier ou quels ſont les facteurs qui le compoſent.

Mr.

Mr. Euler a examiné ce nombre à la page 37 de l'endroit cité cy-deſſus & encore dans un Mémoire à part. Le calcul de ce nombre ſelon les principes précédans ſe fait de la manière ſuivante: $N = 1000009 = 6.166668 + 1$; donc $m = 166668 = 6.27778$, & partant $Q = 27778$ & $r = 0$. Le nombre N étant de la forme $6m + 1$; l'équation de condition pour ſa réductibilité à la forme $6xy + x + y$ ou $6xy - x - y$ eſt

$$36.\Omega^2 \mp 4(3r + 1)\Omega + r^2 - 4Q = \square,$$

le ſigne + pour la reduction à la premiere, le ſigne — pour celle à la ſeconde des deux formes. Cette équation à cauſe de $3r + 1 = 1$ & $r^2 - 4Q = -111112$, ſe change en celle-cy:

$$36.\Omega^2 \mp 4.\Omega - 111112 = \square.$$

Suppoſons, qu'on ait une methode analytique de reſoudre cette équation; on trouvera, qu'en prennant le ſigne negatif, on y ſatisfait en faiſant $\Omega = 103$. Le nombre $m = 166668$ eſt donc réductible à la forme $6xy - x - y$ & $N = 6m + 1 = 1000009$ n'eſt point un nombre premier. Pour en trouver les facteurs on a l'équation:

$$x = \frac{6\lambda - r + \sqrt{[(6\lambda - r)^2 - 4(Q + \lambda)]}}{2}$$

qui, à cauſe de $\lambda = \Omega = 103$; $r = 0$ & $Q = 27778$, ſe change en celle-cy:

$$x = \frac{6.103 + \sqrt{(36.103^2 - 4.27881)}}{2} = 569 \text{ donc}$$

$$y = \frac{6.103 - \sqrt{(36.103^2 - 4.27881)}}{2} = 49,$$

& partant le nombre 1000009 à pour facteurs $6x - 1 = 3413$ & $6y - 1 = 293$.

Gg 2 §. 10.

§. 10. Il eſt bien vrai, que la réſolution des équations de condition (§. 9.) demande ſouvant des calculs bien compliqués, à moins que l'Analyſe indeterminée ne ſoit perfectionnée au point de donner, pour les reſoudre, ou au moins pour decider, ſi elles admettent, en nombres entiers, des ſolutions ou non, des regles plus courtes & plus générales que celles qu'on connoit jusqu'ici. Cependant ces équations donnent lieu aux remarques ſuivantes: Ayant (§. 9.)

$$36.\Omega^2 + 4(3r+1).\Omega + r^2 - 4Q = \square = z^2; \ \&$$

$$36.\Omega^2 \mp 4(3r-1).\Omega + r^2 + 4Q = \square = t^2;$$

on en tire, à cauſe de $6.Q + r = m$ & $6m + 1 = N$, les équations ſuivantes:

$$3(6.\Omega \mp r) + 1 = \sqrt{(9.z^2 + 6m + 1)} \ \&$$

$$3(6.\Omega \mp r) + 1 = \sqrt{(9.t^2 - 6m + 1)},$$

qui, en faiſant pour abrégér $6\,\Omega \mp r = \Delta$, donnent

$$6m + 1 = N = (3\Delta + 1)^2 - 9.z^2 \ \&$$

$$6m - 1 = N = 9.t^2 - (3.\Delta \pm 1)^2.$$

Ces deux dernières équalités m'ont conduit aux Theorêmes ſuivans:

Propoſition III.

§. 11. Tout nombre impair non-carré & non-multiple de trois, s'il eſt compoſé, eſt au moins de deux manières la différence de deux quarrés, dont un, & un ſeul, a un multiple de trois pour racine.

Demonſtration.

Un pareil nombre N étant non-multiple de 3, eſt néceſſairement de la forme $6.m + 1$ ou $6m - 1$. Si N =

6 m

$6m+1$; on a d'abord $N = (3m+1)^2 - (3m)^2$; & cette premiere réduction du nombre N à la différence de deux quarrés a toujours lieu, ſoit que N ſoit premier ou composé; mais outre cela, ſi N eſt composé, on á $m = 6xy + x + y$ ou $m = 6xy - x - y$, & partant $N = 36.xy \mp 6(x+y) + 1$; d'où, à cauſe de $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$, on obtient encore une ſeconde réduction ſemblable $N = 6m + 1 = [3(x+y) \pm 1]^2 - [3(x-y)]^2$. De même, ſi $N = 6m - 1$; on a d'abord $N = (3m)^2 - (3m-1)^2$. Outre cette premiere reduction qui a toujours lieu, ſoit que N ſoit premier ou composé; on a ſi N eſt composé, $m = 6xy + x - y$ & partant $N = 36xy + 6x - 6y + 1$; d'où l'on obtient encore une ſeconde reduction ſemblable $N = [3(x+y)]^2 - [3(x-y) - 1]^2$ pour le cas $x > y$; & $N = [3(x+y)]^2 - [3(y-x) + 1]^2$ pour le cas $x < y$. Or dans tous ces pairs de carrés que nous venons de trouver, & dont les différences égalent les nombres N, l'un des carrés, & un ſeul, a un multiple de trois pour racine.

Corollaires.

1.) L'un des deux carrés en queſtion ayant un multiple de 3 pour racine, & le nombre N étant non-multiple de 3; l'autre des deux carrés doit avoir un non-multiple de 3 pour racine, & partant un multiple de 3 augmenté ou diminué de l'unité.

2.) Si $N = 6m + 1$ étoit un carré: à cauſe de $x = y$, la ſeconde réduction n'en auroit pas lieu.

3.)

3.) Nommons les réductions $N = 6m + 1 = (3m + 1)^2 - (3m)^2$, & $N = 6m - 1 = (3m)^2 - (3m - 1)^2$, réductions primitives, & les autres, ſecondaires.

4.) Les réductions primitives donnent toujours des quarrés premiers entre eux; car tels ſont les nombres $3m + 1$ & $3m$; ainſi que $3m$ & $3m - 1$. Il n'en eſt pas de même des réductions ſecondaires; car $3(x + y) + 1$ & $3(x - y)$, ni $3(x + y)$ & $3(x - y) + 1$ ne ſont pas néceſſairement des nombres premiers entre eux, & s'ils ne le ſont pas, le carré de leur facteur commun eſt un diviſeur de N.

5.) Les réductions ſecondaires donnent toujours des carrés moindres que ceux, que donne la réduction primitive; car pour $N = 6m + 1$ on a $m = 6xy + x + y$ ou $m = 6xy - x - y$ & pour $N = 6m - 1$ on a $m = 6xy + x - y$; or ayant généralement $x + y < 3xy$ on a dans tous ces trois cas, $m > 3xy$ & partant auſſi $m > x + y$ & $m > x - y$. C'eſt ainſi par exemple qu'on a, par la réduction primitive, $N = 385 = 6.64 + 1 = 193^2 - 192^2$; &, par les réductions ſecondaires, $385 = 41^2 - 36^2 = 31^2 - 24^2 = 23^2 - 12^2$.

6.) Tout nombre impair non-multiple de 3 admet une réduction primitive.

7.) Tout nombre impair non-multiple de 3 qui admet une réduction ſecondaire, eſt néceſſairement composé; car la poſſibilité d'une réduction ſecondaire ſuppoſe des valeurs réelles de x & y & partant la réalité des facteurs $6x \mp 1$ & $6y \mp 1$ des nombres $N = 6m + 1$, & celle des facteurs $6x - 1$ & $6y + 1$ des nombres $N = 6m - 1$.

8.)

8.) Tout nombre premier plus grand que 3, admet une reduction primitive (Coroll. 6.) & n'admet aucune reduction ſecondaire. (Coroll. 7.).

Propoſition IV.

§. 12. Tout nombre impair non-carré et non-multiple de trois qui n'eſt que d'une ſeule maniere la différence de deux carrés dont un ſeul a un multiple de trois pour racine, eſt un nombre premier.

Démonſtration.

Tout nombre impair non-multiple de trois admet une reduction primitive (Prop III. Cor. 6.); il eſt donc au moins d'une maniere la différence de deux pareils carrés; & s'il eſt compoſé, ſans être carré, il admet encore une reduction ſecondaire (Prop. III) Donc ſi un nombre impair non-carré & non-multiple de trois n'admet aucune reduction ſecondaire, & par conſéquent s'il n'eſt que d'une ſeule maniere la différence de deux pareils carrés, il n'eſt point compoſé, & partant il eſt premier.

Corollaires.

1.) Mr. Euler a donné pour tous les nombres impairs de la forme $4m+1$ une methode d'examiner s'ils ſont premiers ou compoſés, en partant d'un des plus beaux théoremes de Mr. Fermat, que Mr. Euler a démontré le premier: que tout nombre premier de la forme $4m+1$ eſt la ſomme de deux carrés premiers entre eux & ne l'eſt que d'une ſeule maniere. Celui que je vient d'expoſer dans la Propoſition précédente, offre pour tous les nombres impairs non-

non-carrés & non-multiples de trois, de quelle forme qu'ils ſoient, une méthode générale de les examiner ſous le même point de vûe, & d'en trouver les facteurs, s'ils ſont compoſés. Car un tel nombre étant néceſſairement de la forme $6m + 1$ ou $6m - 1$; s'il eſt de la forme $6m + 1$ on aura

$$N = [3(x + y) \mp 1]^2 - [3(x - y)]^2$$

& partant en poſant $x - y = X$ & $3(x + y) \mp 1 = Z$, on aura $9.X^2 + N = Z^2$ & $X < m$. Si donc, ajoutant au nombre N les carrés de tous les multiples de trois moindres que $3m$, on ne rencontre aucune ſomme qui ſoit un carré; N eſt un nombre premier; ſi au contraire, pour $X = A$, on trouve $9.A^2 + N = B^2$; N eſt compoſé ayant les facteurs $B + 3A$ & $B - 3A$. De même ſi N eſt de la forme $6m - 1$, on aura

$$N = [3(x + y)]^2 - [3(x - y) - 1]^2 \text{ ou}$$
$$N = [3(x + y)]^2 - [3(y - x) + 1]^2,$$

& partant en poſant $x + y = Y$ & $+ 3(x - y) + 1 = U$ on aura $9.Y^2 - N = U^2$ & $Y < m$. Si donc otant le nombre N des carrés de tous les multiples de trois moindres que $3m$, on ne rencontre aucune différence qui ſoit un carré; N eſt un nombre premier: ſi au contraire, pour $Y = C$, on trouve $9\,C - N = D^2$; N eſt compoſé ayant les facteurs $3C + D$ & $3C - D$.

2.) Cette méthode que les principes précédans m'ont fournie immédiatement, eſt ſemblable à celle que Mr. Kausler, notre digne & cher Confrere, qui travaille avec tant de ſucces au perfectionnement de l'Analyſe indeterminée,

née, a donnée le premier dans ſes excellens Supplémens à l'Algebre de Mr. Euler, (*) en partant du principe qu'il démontre, que, tout nombre impair en général étant la différence de deux carrés premiers entre eux, les nombres premiers ne le ſont que d'une ſeule maniere; de façon que pour examiner un nombre impair donné N, s'il eſt premier ou composé, il s'agit de trouver, s'il y a un nombre entier Z moindre que $\frac{N-1}{2}$, qui ſatisfaſſe à l'équation indeterminée $N + Z^2 = \square$. La propoſition précédente abrége conſiderablement la méthode de Mr. Kausler, en ce que, ſuppoſant le nombre N ni carré ni multiple de trois, (choſe dont on peut s'aſſurer facilement) elle fait voir, que l'un ou l'autre des deux carrés qui entrent dans cette équation indeterminée, eſt neceſſairement un multiple de neuf, & que par conſequant, après s'être aſſuré que le nombre donné N eſt ni carré ni multiple de trois, on ſe peut dispenſer de la peine d'eſſayer les nombres non-multiples de trois pour voir, ſi, ajoutant le nombre N à leurs carrés ou l'en ſouſtraiant, on abtiendroit des nombres carrés.

3.) La méthode que je viens d'expoſer, eſt encore ſuſceptible d'être ſimplifiée à plus d'un égard; car, par exemple, comme le nombre N, qu'on pourroit ſoupçonner être premier, ne peut avoir autres terminaiſons, que 1; 3; 7 ou 9; chacune de ces quatre terminaiſons exclura toutes les valeurs de X ou Y, qui dans la ſomme $9 . X^2 + N$ ou dans la différence $9 . Y^2 - N$ produiroient des terminaiſons en 2, 3, 7 ou 8 contraires à la nature d'un carré.

(*) Eulers vollſtändige Anleitung zur Algebra; dritter Theil, enthaltend die Zuſäße von de la Grange, aus den franzöſiſchen überſeßt und mit eigenen Abhandlungen begleitet von Kaußler, 1796.

4.) Les nombres de la forme $6m - 1$ ſont plus faciles à examiner ſous ce point de vue, que ceux de la forme $6m + 1$; parceque pour reſoudre l'équation $9.Y^2 - N = U^2$, on connoit deux limites du nombre Y, ſcavoir $Y > \frac{\sqrt{N}}{3}$ & $Y < m$; avantage qui n'a pas lieu pour l'équation $9X^2 + N = Z^2$, pour la quelle on n'a d'autre limite que $X < m$.

§. 17. Je ne me propoſe pas dans ce Mémoire, d'entrer dans le detail de la méthode que je viens d'expoſer: mais comme elle eſt en quelque façon un ſupplement à celle de Mr. Kausler: il ne ſera pas ſuperflu d'ajouter ici quelques exemples qu'il a calculés d'apres la ſienne, pour pouvoir faire le parallele de l'une & de l'autre.

Exemple I.

$N = 493 = 6.82 + 1$; donc $m = 82$. On a donc à reſoudre l'équation $9.X^2 + 493 = \square$ & $3.X < 3.82$, & puisque le nombre N ſe termine en 3, on ne prendra parmi les multiples de trois que ceux, qui ſe terminent en 1, 4, 6 ou 9.

X	3X	$9X^2 + 493$
1	3	
2	6	$529 = 23^2$

Donc $A = 2$ & $B = 23$; & les facteurs du nombre 493 ſont $B + 3A = 29$, & $B - 3A = 17$.

Exemple II.

$N = 53297 = 6.8883 - 1$; donc $m = 8883$. & $\sqrt{N} = 230, +$; on a donc à reſoudre l'équation $9Y^2 - 53297 = \square$ & $3Y > 230$ & $Y > 76$ & puisque le nombre N ſe termine en

7,

7, on ne prendra parmi les multiples de trois plus grands que 230, que ceux qui ſe terminent en 1, 4, 6 ou 9, de façon, que la premiere ſuppoſition à eſſayer eſt $3\,Y = 231$ & $Y = 77$.

Y	3 Y	$9\,Y^2 - N$
77	231	$64 = 8^2$

Donc $C = 77$ & $D = 8$; & les deux facteurs de 53297 ſe trouvent $3C + D = 239$ & $3C - D = 223$.

Exemple III.

$N = 5423 = 6.\,904 - 1$; donc $m = 904$. & $\sqrt{N} = 73,6$; on a donc à réſoudre l'équation $9\,Y^2 - 5423 = \square$ & $3\,Y > 73$; & puiſque le nombre N ſe termine en 3, on ne prendra parmi les multiples de trois plus grands que 73, que ceux qui ſe terminent en 2, 3, 7 ou 8; de façon. que la premiere ſuppoſition à eſſayer eſt $3\,Y = 78$, & $Y = 26$.

Y	3 Y	$9.\,Y^2 - N$
26	78	661.
27	81	*
28	84	*
29	87	2146.
30	90	*
31	93	3226
32	96	*
33	99	*
34	102	4981
35	105	*
36	108	$6241 = 79^2$

Donc $C = 36$ & $D = 79$, & les deux facteurs de 5423 ſe trouvent $3\,C + D = 187$ & $3\,C - D = 29$

Les valeurs de 3 Y marquées * ſont exclûes par leurs terminaiſons.

Exemple IV.

$N = 233033 = 6 . 38839 - 1$; donc $m = 38839$ & $\sqrt{N} = 482,7$; on a donc à reſoudre l'équation

$$9 Y^2 - 233033 = \square \ \& \ 3 Y > 482,$$

& puisque le nombre N ſe termine en 3, on ne prendra parmi les multiples de trois plus grands que 482, que ceux qui ſe terminent en 2, 3, 7 ou 8. de façon que la premiere ſuppoſition à eſſayer eſt $3 Y = 483$ & $Y = 161$.

Y	3 Y	$9 Y^2 - N$
161	483	$256 = 16^2$

Donc $C = 161$ & $D = 16$ & les facteurs de 233033 ſe trouvent $3 C + D = 499$ & $3C - D = 467$.

Ce dernier exemple eſt un de ceux que Mr. Euler a calculés d'après ſa méthode, le nombre 233033 étant de la forme $4m + 1$, (voyes les Nouv. Comment. de l'Acad. T. IV. pag 38.

Je n'ai garde de dire qu'on ſe tromperoit bien, ſi l'on s'attendoit, pour tous les nombres à examiner, à des calculs auſſi courts, que ceux qu'ont demandé les nombres des quatre exemples précédans; & le 3me exemple comparé avec le 2de & le 4me fait déja voir, que la longueur du calcul dépend moins de la grandeur du nombre à examiner que de la diſparité de ſes facteurs.

Je finis ce Mémoire par la remarque, qu'il eſt peut-être reſervé à la nouvelle Analyſe combinatoire de Mr. Hindenburg, de repandre de nouvelles lumieres ſur l'ordre de progreſſion des nombres premiers: car puisque, comme l'a re-

remarqué ingenieuſement Mr. Lambert (Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und des Erſten. II^{ter} Band, pag. 507.), quand on développe la ſerie

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \&c.$$

en une ſerie de la forme $x + A\,x^2 + B\,x^3 +$ &c. tous les termes de celle-cy, dont les coëfficians ſont $= 2$, ont des nombres premiers pour expoſans: il ſemble que, ſi la loi de progreſſion de ces coëfficians qui eſt ſans doute du resſort de cette Analyſe, étoit connue independamment de la réſolubilité des expoſans en facteurs; l'ordre de progreſſion des nombres prémiers le ſeroit auſſi.

Sur

Sur les Liſtes des Mariages, des Naiſſances & des Morts *à St. Péterſbourg.*

Mémoire Quatriéme

Contenant

La Période de 1791 jusqu'à 1796.

Par M. *Krafft.*

Préſenté à l'Académie le 12 Avril, 1798.

Je finis dans ce quatième Mémoire la premiere époque des Tables de Population de la Ville de St. Péterſbourg, qui s'étend depuis le nouvel établiſſement de ces Tables en 1764 jusqu'à l'époque de l'avenement au Trone de *Sa Majeſté Impériale* glorieuſement regnante, notre *Très-Auguſte Souverain & Empereur* PAUL I. Dans ce Mémoire & les trois précédans ſur le même objet, j'ai redigé & examiné ces Tables, pour une ſuite de trente-trois années conſécutives, ſous leurs points de vue les plus inſtructifs & les plus propres à donner des lumieres intereſſantes pour le bien public & celui de l'humanité; je me ſuis appliqué, ſurtout dans le premier de ces quatre Mémoires, à faire ſentir l'utilité qui réſulteroit de l'extenſion de pareilles Liſtes ſur des Provinces entières de l'Empire de Ruſſie, & la néceſſité d'un departement ou Comptoir chargé de les rediger ſelon les vrais principes & les juſtes regles de l'Arithmétique politique. Pour ce qui regarde la derniere periode de 1791 en 1796; ſur pluſieurs points à l'égard desquels elle ne préſentoit rien de nouveau à dire, je me rapporte entièrement à mes Mémoires précédans.

I. Ta-

I. Table générale des nombres annuels des Mariages, des Naiſſances & des Morts.

Année	Mariages	Naiſſances	Morts.
1791	1727	6353	6979
1792	1587	6918	4247
1793	1478	6990	4233
1794	1430	6750	4092
1795	1274	6964	5495
1796	1445	7445	7982
2192 jours	8941	41420	33028

II. Table ſpéciale des Nombres annuels des Mariages.

Année	A.	B.	C.	D.	Somme.
1791	1258	124	219	126	1727
1792	1200	116	185	86	1587
1793	1119	95	181	83	1478
1794	1071	119	163	77	1430
1795	962	101	133	78	1274
1796	1101	128	138	78	1445
2192 jours	6711	683	1019	528	8941

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entres des Veufs & des Veuves.

III.

III. Table ſpeciale des nombres annuels des Naiſſances.

Année	Garçons	Filles	Somme	Dans ces nombr. il y a de Enfans venus morts au monde: Garçons	Filles	Somme
1791	3250	3103	6353	14	7	21
1792	3531	3387	6918	16	12	28
1793	3627	3363	6990	16	4	20
1794	3421	3329	6750	16	7	23
1795	3691	3273	6964	17	15	32
1796	3826	3619	7445	21	23	44
2192 jours.	21346	20074	41420	100	68	168

Sous le titre des Enfans venus morts au monde les Tables comprennent auſſi ceux, qui ſont morts avant le Batême.

IV. Table ſpéciale des nombres annuels des Morts.

Année	Mâles	Femell.	Somme	Dans ce nombre il y a des Corps trouvés morts: Males	Femell	Somme
1791	5272	1707	6979	23	1	24
1792	2622	1625	4247	44	2	46
1793	2549	1684	4233	25	3	28
1794	2592	1500	4092	46	8	54
1795	3584	1911	5495	141	20	161
1796	4919	3063	7982	126	26	152
2192 jours.	21538	11490	33028	405	60	465

Dans ces nombres des Morts on a compté auſſi les enfans venûs morts au monde, conſignés dans la Table précedente.

V Tab.

V. Table ſpeciale des morts du ſexe maſculin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1791	1792	1793	1794	1795	1796	Sommes
Enfans nés-morts.	14	16	16	16	17	21	100
Entre 0–1 an	99	109	270	102	113	150	843
1–2	472	558	279	330	619	1351	3609
2–3	11	20	76	43	41	118	309
3–5	24	18	62	16	20	27	167
5–10	51	44	88	50	86	210	529
10–15	69	68	86	50	74	93	440
15–20	202	79	70	82	72	134	639
20–25	794	179	186	203	293	388	2043
25–30	720	278	210	283	390	398	2279
30–35	953	299	264	301	474	438	2729
35–40	506	242	226	262	296	329	1861
40–45	523	132	166	186	225	280	1512
45–50	206	132	110	126	126	159	859
50–55	202	89	124	131	171	185	902
55–60	88	70	50	76	78	99	461
60–65	115	78	84	101	115	146	639
65–70	54	58	53	57	91	98	411
70–75	78	62	52	74	81	90	437
75–80	31	24	28	25	22	26	156
80–85	28	16	20	21	19	31	135
85–90	6	5	2	8	10	21	52
90–95	3	2	2	1	7	1	16
95–100	0	0	0	1	3	0	4
deſſus 100	0	0	0	1	0	0	1
Sommes	5249	2578	2524	2546	3443	4793	21133

VI. Table ſpeciale des morts du ſexe feminin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1791	1792	1793	1794	1795	1796	Sommes
Enfans nés-morts.	7	12	4	7	15	23	68
Entre 0–1 an	114	132	129	87	123	230	815
1–2	29	47	13	56	37	40	344
2–3	15	19	135	46	15	30	260
3–5	405	435	200	242	562	1110	2954
5–10	39	46	61	38	48	194	426
10–15	27	32	48	26	45	46	224
15–20	52	62	60	46	53	88	361
20–25	104	80	85	81	91	132	573
25–30	95	102	91	104	102	174	668
30–35	132	100	116	118	124	144	734
35–40	74	98	108	79	96	111	566
40–45	108	67	78	70	89	102	514
45–50	68	58	56	73	64	101	520
50–55	83	39	56	88	76	90	432
55–60	52	44	50	58	58	65	327
60–65	89	71	102	81	87	98	428
65–70	54	70	39	46	64	100	373
70–75	86	65	66	84	92	71	464
75–80	29	19	29	15	20	31	143
80–85	32	14	26	27	17	39	155
85–90	8	5	1	4	9	15	42
90–95	3	5	4	10	2	0	24
95–100	0	0	1	6	1	2	10
deſſûs 100	1	1	1	0	1	1	5
Sommes	1700	1623	1081	1492	1891	3037	11430

VII.

VII. Table reduite des Morts rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en général il y a
Enfans nés-morts.	4, 73	5, 95	5, 16
Entre 0 – 1 an	39, 89	71, 30	50, 91
1 – 2	170, 73	30, 10	121, 39
2 – 3	14, 62	22, 75	17, 47
3 – 5	7, 90	258, 44	95, 84
5 – 10	25, 03	37, 27	29, 33
10 – 15	20, 82	19, 60	20, 39
15 – 20	30, 24	31, 58	30, 71
20 – 25	96, 67	50, 13	80, 34
25 – 30	107, 84	58, 44	90, 50
30 – 35	129, 13	64, 22	106, 34
35 – 40	88, 06	49, 52	74, 53
40 – 45	71, 55	44, 97	62, 26
45 – 50	40, 65	45, 49	42, 35
50 – 55	42, 68	37, 79	40, 97
55 – 60	21, 81	28, 61	24, 20
60 – 65	30, 24	37, 44	32, 76
65 – 70	19, 45	32, 63	24, 08
70 – 75	20, 69	40, 59	27, 67
75 – 80	7, 39	12, 51	9, 19
80 – 85	6, 40	13, 56	8, 90
85 – 90	2, 47	3, 68	2, 89
90 – 95	0, 77	2, 11	1, 23
95 – 100	0, 19	0, 87	0, 42
deſſûs 100	0, 05	0, 44	0, 18

VIII. Table de la vitalité des âges des hommes à St. Pétersbourg, telle qu'elle ſert aux calculs des rentes viagéres & d'autres établiſſemens de ce genre.

	De 1000 Garçons nouveaux-nés.	De 1000 Filles nouvellement-nées.	De 1000 Enfans nouveaux-nés.
viennent vivans au monde	99[illegible], 27	994, 05	994, 84
accompliſſent la 1 année	955, 38	922, 75	943, 93
2	784, 65	892, 65	822, 54
3	770, 03	869, 90	805, 07
5	762, 13	611, 46	709, 23
10	737, 10	574, 19	679, 90
15	716, 28	554, 59	659, 51
20	656, 04	523, 01	628, 80
25	589, 37	472, 88	548, 46
30	481, 53	414, 44	457, 96
35	352, 40	350, 22	351, 62
40	264, 34	300, 70	277, 09
45	192, 79	255, 73	214, 83
50	152, 14	210, 24	172, 48
55	109, 46	172, 45	131, 51
60	87, 65	143, 84	107, 31
65	57, 41	106, 40	74, 55
70	37, 96	73, 77	50, 47
75	17, 27	33, 18	22, 80
80	9, 88	20, 67	13, 61
85	3, 48	7, 11	4, 71
90	1, 01	3, 43	1, 83
95	0, 24	1, 32	0, 60
100	0, 05	0, 45	0, 18

IX. Table ſpeciale des Morts du ſexe maſculin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1791	1792	1793	1794	1795	1796	Sommes
Pleureſie - - -	538	536	540	487	613	1651	4365
Fievre chaude -	2123	740	789	861	1148	1279	6940
Conſomption - -	630	448	444	510	600	693	3325
Convulſions - -	108	80	14	10	94	100	406
Vieilleſſe - - -	136	120	106	153	147	183	845
Dyſſenterie - - -	936	183	118	151	254	236	1878
Petite verole - -	33	101	157	38	145	88	562
Hydropiſie - - -	130	84	99	107	129	200	749
Malheur - - -	14	15	44	29	25	53	180
Apoplexie - - -	107	81	46	79	138	146	597
Scorbut - - -	418	106	19	33	67	67	710
Dentition - - -	9	17	24	20	27	14	111
Epilepſie - - -	5	5	8	7	3	7	35
Verole - - -	23	4	8	6	5	12	58
Rougeole - - -	0	6	39	4	9	13	71
Esquinancie - -	0	2	1	1	3	2	9
Phreneſie - - -	3	0	1	3	0	0	7
Etouffem. des enfans au ſommeil par la mere	0	0	0	0	0	0	0
Yvrognerie - -	1	0	1	0	0	1	3
Fievre - - - -	0	0	0	0	0	0	0
Pierre - - -	0	0	0	0	0	0	0
Maladies inconnues	21	34	50	31	19	27	182
Sommes	5235	2562	2508	2530	3426	4772	21033

X.

X. Table ſpeciale des Morts du ſexe feminin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1791	1792	1793	1794	1795	1796	Sommes
Pleureſie - - -	415	420	392	415	524	1398	3570
Fievre chaude - -	365	247	329	299	324	419	1983
Conſomption - -	327	301	276	300	319	423	1946
Convulſions - -	99	82	16	16	80	95	388
Vieilleſe - - -	215	173	181	197	210	242	1218
Dyſſenterie - - -	53	49	57	29	32	40	260
Petite verole - -	21	103	154	33	136	100	547
Hydropiſie - - -	47	60	66	60	62	91	386
Malheur - - -	6	5	9	8	7	14	49
Apoplexie - - -	51	33	39	53	56	71	303
Scorbut - - -	22	28	19	5	33	21	128
Enfantement - -	42	41	45	46	49	62	285
Dentition - - -	17	15	19	12	17	11	91
Epilepſie - - -	0	2	6	3	2	3	16
Verole - - - -	0	2	0	2	0	1	5
Rougeole - - -	1	3	42	1	16	6	69
Eſquinancie - -	0	1	0	0	1	1	3
Phreneſie - - -	1	1	3	0	0	0	5
Etouffem. des enfans au ſommeil par la mere	0	0	0	0	0	0	0
Yvrognerie - - -	1	0	0	2	0	1	4
Fievre - - - -	0	0	0	0	0	0	0
Pierres - - -	0	0	0	0	0	0	0
Maladies inconnues	16	39	24	4	8	15	106
Sommes	1690	1611	1677	1455	1576	2614	11762

XI.

XI. Table reduite des Morts rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en général il y a
Pleureſie - - -	207, 53	314, 20	244, 94
Fievre chaude - -	329, 96	174, 53	275, 44
Conſomption - -	158, 09	171, 28	162, 71
Convulſions - -	19, 30	34, 15	24, 51
Vieilleſſe - - -	40, 18	107, 20	63, 68
Dyſſenterie - -	89, 29	22, 88	66, 00
Petite Verole - -	26, 72	48, 14	34, 23
Hydropiſie - - -	35, 61	33, 97	35, 03
Malheur - - -	8, 56	4, 31	7, 07
Apoplexie - - -	28, 38	26, 67	27, 78
Scorbut - - -	33, 76	11, 27	25, 87
Enfantement - -		25, 08	8, 80
Dentition - - -	5, 28	8, 01	6, 23
Epilepſie - - -	1, 66	1, 41	1, 57
Verole - - - -	2, 76	0, 44	1, 94
Rougeole - - -	3, 37	6, 07	4, 32
Eſquinancie - -	0, 43	0, 26	0, 37
Phreneſie - - -	0, 33	0, 44	0, 37
Etouffem. des enfans au ſommeil par la mere	0, 00	0, 00	0, 00
Yvrognerie - -	0, 14	0, 35	0, 22
Fievre - - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Pierre - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Maladies inconnues	8, 65	9, 33	8, 89

XII.

XII. Table ſpeciale des Morts rangés ſelon les mois.

	Males	Fem.	Sommes		Males	Fem.	Sommes
Janvier	1719	984	2703	Juillet	1903	1130	3033
Février	1554	938	2492	Août	1639	1049	2688
Mars	1904	960	2864	Septbr.	1378	807	2185
Avril	2177	974	3151	Octobre	1307	786	2093
Mai	2505	1034	3539	Novbr.	1388	827	2215
Juin	2105	968	3073	Décembr.	1450	905	2355

Dans ces nombres on ne comprend pas les enfans venus morts au monde, ni les corps trouvés morts.

	Le plus grand nombre des morts & le mois, où il y a eu lieu.		Le plus petit nombre des morts & le mois, où il y a eu lieu.	
Année	Males.	Femelles.	Males.	Femelles.
1791	Mai - - 928	Mai - 183	Décembr. 210	Novb. Déc. 112
1792	Mars. Mai 260	Avril - 167	Septbr. - 162	Septbr. - 105
1793	Mai - - 248	Juin Juill. 164	Octbr. - 182	Septbr. - 114
1794	Avril - - 276	Décembr. 146	Octbr. - 132	Septbr. - 92
1795	Mai - - 380	Juill. - 19[illegible]	Octbr. - 231	Octbr. - 13[illegible]
1796	Juill. - 509	Juill. - 339	Septbr. - 317	Octbr. - 197

Les Tables précédentes nous fourniſſent d'abord les ſuivans

RESULTATS GÉNÉRAUX.

I. Etat moyen de la population à St. Pétersbourg dans la periode de 1791 à 1796.

Dans cette periode à St. Pétersbourg

1.) Il ſe fit 1490 mariages par an.

2.) Il y naquit annuellement 6904 enfans, dont 3558 garçons & 3346 filles.

3.) Il y mourut par an 5504 perſonnes, dont 3589 mâles & 1915 femelles.

4.) Conſéquement il y eut un excédant annuel des naiſſances ſur les morts de 1400 perſonnes; il y naquit 1431 femelles plus qu'il n'en mourut; mais il mourut 31 mâles plus qu'il n'en naquit.

Il eſt interéſſant de comparer ſous ces points de vüe les états moyens, qui ont eu lieu dans les 6 périodes conſécutives depuis 1764 jusqu'à 1796, & que je tire de mes Mémoires précédans: (*)

II.

(*) Voyés: Acta Academ. Scient. Imper. Petrop. ad annum 1782. Pars I. Nova Acta Ejusdem Academ. Tomus IV. et Nova Acta Ejusdem Acad. Tomus VIII.

II. Parallele entre les Etats moyens de la Population à St. Pétersbourg dans ſix periodes conſécutives:

Nombre annuel des	1764-1770	1771-1775	1776-1780	1781-1785	1786-1790	1791-1796
Mariages.	1351.	1221.	1305.	136[illegible].	1391.	1490.
Naiſſances.						
Garçons.	2592.	2639.	2898.	3004.	3272.	3558.
Filles.	2530.	2476.	2740.	2885.	3041.	3346.
Total.	5122.	5115.	5638.	5889.	6313.	6904.
Morts.						
Mâles.	3036.	3244.	2752.	3474.	5598.	3589.
Femelles.	1641.	1677.	1559.	1688.	1782.	1915.
Total.	4677.	4921.	4311.	5162.	7380.	5504.
Excédant des Naiſſances.						
en Mâles.	— 444.	— 605.	+ 146.	— 470.	— 2326.	— 31.
Femelles.	+ 889.	+ 799.	+ 1181.	+ 1197.	+ 1259.	+ 1431.
Total.	+ 445.	+ 194.	+ 1327.	+ 727.	— 1067.	+ 1400.

Le ſigne + indique, que le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & le ſigne — en marque le contraire.

Foi-

Faiſons ſur le parallele de ces ſix périodes les remarques ſuivantes:

1.) Les nombres annuels des mariages & des naiſſances continuent d'aller à St. Pétersbourg en augmentant de période en période, depuis celle de 1771 à 1775.

2.) Il y a ordinairement à St. Pétersbourg un excédant du nombre annuel des naiſſances ſur celui des morts. De ces ſix périodes il n'eſt qu'une ſeule, celle de 1786 à 1790, où il y eut un excédant des morts ſur les naiſſances; j'ai fait voir dans mon Mémoire précédant la ſource de la mortalité extraordinaire de cette période.

3.) Il nait à St. Pétersbourg plus de femelles par an, qu'il n'en meurt; ce qui a eu lieu dans toutes les ſix périodes: mais il y meurt annuellement plus d'hommes, qu'il n'en nait, avec exception de la ſeule période de 1776 à 1780.

4.) L'excédant des nombres annuels des naiſſances ſur ceux des morts eſt par conſéquant ordinairement du coté des femmes, excepté la même periode de 1776 à 1780, où il a eu lieu pour l'un & l'autre ſexe.

5.) Pour ce qui regarde ſpecialement la derniére période de 1791 à 170 ; elle ſe diſtingue avantageuſement de la précédente par un plus grand nombre annuel des mariages & des naiſſances & pas un plus petit nombre annuel des morts. Il y eut par an

100 mariages & 591 naiſſances de plus, & 1876 morts de moins, que dans la periode précédente; il y eut un excédant annuel des naiſſances ſur les morts, au lieu que dans la période précédente il en eſt arrivé le contraire; & cet excédant a été dans cette periode plus fort qu'en aucune autre.

Outre ces reſultats généraux, les Tables précédentes nous fourniſſent encore les ſuivantes

REMARQUES SPECIALES

relatives aux titres que j'ai établis dans mon premier Mémoire.

I. Nombre moyen des habitans à St. Pétersbourg & rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers.

1.) J'ai fait voir dans mon premier Mémoire, pourquoi dans l'emploi de pareilles Tables, le nombre des vivans qu'elles embraſſent, doit être ſuppoſé connu d'ailleurs. Quant à la derniére periode, on a trouvé, par un denombrement fait en 1792 par ordre de la Police, que toute la population de St. Pétersbourg montoit à 211635 perſonnes, dont 143935 mâles & 67700 femelles. Comparant les reſultats des trois derniers denombremens

	Années.	Males.	Femelles.	Total.
I.	1784.	126827.	65619.	192446.
II.	1789.	148520.	69428.	217948.
III.	1792.	143935.	67700.	211635.

on

on voit, que les ſommes totales ſont dans le rapport des nombres 100; 113 & 109; il s'enſuit, que la population, qui s'étoit augmentée dans la periode de 1786 à 1790 dans le rapport de 100 à 113, s'eſt enſuite diminuée dans la derniere periode dans le rapport de 109 à 113; & cette diminution etoit même facile à predire, vu que, comme je l'ai fait voir dans mon dernier Mémoire, ſon accroiſſement dans la periode de 1786 à 1790 en raiſon de 100 à 113 n'étoit que l'effet d'une affluence extraordinaire du monde dans la Capitale, & ne reſultoit du tout de la vigueur interne de la population même, dont le thermomètre avoit au contraire baiſſé dans la même periode à un tel point, que le nombre annuel des naiſſances etoit inferieur à celui des morts.

2.) J'ai evalué dans mon Mémoire précédant la ſurface de la ville de St. Pétersbourg à 49 Werſtes quarrées; il y a donc eu, dans la derniere periode, 4319 hommes ſur l'eſpace d'une Werſte quarrée, & partant 129 de moins que dans la periode précédente.

3.) On confond dans nos Tables mal à propos, depuis l'an 1765 & toujours encore, les nationaux & les étrangers, qu'il ſeroit très-interéſſant de diſtinguer à cet égard. Pour calculer le rapport de leurs nombres dans la derniere periode, je donne içi la Table ſuivante, tirée des regiſtres de toutes les Paroiſſes étrangéres dans St. Pétersbourg.

Etat

Etat des Mariages, des Naiſſances & des Morts des Etrangers à St. Pétersbourg, depuis 1791 à 1796.

Années.	Mariages	Naiſſances.			Morts.		
		Garçons.	Filles.	Total.	Mâles.	Femelles.	Total.
1791	249	435	457	892	407	350	757
1792	319	480	445	925	410	382	792
1793	256	514	458	972	469	436	905
1794	217	508	432	940	387	362	749
1795	251	471	451	922	538	440	978
1796	252	456	475	931	461	442	903
Total.	1544	2864	2718	5582	2672	2412	5084

On voit par cette Table, que, dans cette periode parmi les étrangers à St. Pétersbourg

1.) Il y eut 257 mariages par an.

2.) Il y naquit annuellement 930 enſans, dont 477 garçons & 453 filles.

3.) Il y mourut annuellement 847 perſonnes, dont 445 mâles & 402 femelles.

4.) Il y eut un excédant annuel des naiſſances ſur les morts de 83 perſonnes, dont 32 garçons & 51 filles.

En prenant les ſommes totales de cette Table, & en les comparant avec les ſommes reſpectives pour les nationaux, on trouve le rapport entre les nombres

des mariages = 48 : 10
des naiſſances = 62 : 10
des morts = 55 : 10.

Le

Le rapport moyen de ces trois eſt celui de 55 à 10. On peut donc établir avec bien de probabilité, qu' au lieu que dans les années 1764 & 1765 on comptoit à St. Pétersbourg 70 nationaux ſur 10 étrangers, on n'en comptoit dans la derniere periode, que 55 ſur 10. Quant à la derniere periode, il y eut donc dans la population entiere de 211635 perſonnes, probablement 179076 ruſſes & 32559 etrangers, & partant 153 etrangers ſur 1000 habitans en général; le nombre des nationaux s'eſt diminué de 7285, & celui des etrangers s'eſt augmenté de 972 perſonnes. (*)

II. Fecondité intentionelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1490, calcul moyen de ſix ans; j'en tire le rapport au nombre de la population, ou la meſure de la fecondité inten-

(*) Il peut être intereſſant d'avoir les etats ſpecials des mariages, des naiſſances & des morts de chacune des Nation à part ou des religions différentes; je les ai donnés pour les deux periodes précédentes; les voila auſſi pour la derniere periode :

Depuis 1791 à 1796.

En 6 ans:	Mariages.	Naiſſances:	Morts.
Allemands Lutheriens	950	3334	3133
- - - Reformés -	42	157	113
François Reformés -	14	49	45
Catholiques - -	156	702	516
Finnois - - -	149	760	683
Suedois - - -	200	407	460
Anglois - - -	30	125	90
Hollandois - -	4	23	21
Armeniens - -	9	25	23
Total - - -	1544	5589	5034

tentionelle $= \frac{1}{142}$, c'eſt à dire, qu'entre 142 perſonnes il ſe fit un mariage par an & que de 71 perſonnes il y eut une qui ſe maria. Quoique cette ſecondité intentionelle ſoit toujours encore très-petite en elle même: elle eſt pourtant plus forte, que dans la periode précédente, où elle n'a été, que $\frac{1}{151}$; ce qui s'explique très-bien par la remarque que j'ai deja faite, que l'augmentation de la population de la periode précédente n'etoit, que l'effet d'une forte affluence du monde dans la Capitale ſans qu'il n'y eut aucune diſpoſition à ſe marier. Quant aux étrangers: je trouve la meſure de leur ſecondité intenticnelle $= \frac{1}{135}$, elle a donc auſſi été plus forte dans la derniere periode, que dans la précédente, où elle n'etoit qu'$\frac{1}{140}$.

2.) Le nombre des veuves qui ſe ſont remariées, a été encore, & toujours à peu-prés dans le même rapport, comme 6 à 5, plus grand que celui des veuſs qui ſont paſſés à de ſecondes nôces.

3.) On continue de ne point marquer dans nos Tables, ni l'âge des perſonnes qui ſe marient, ni pour les morts, s'ils ont été mariés ou veuſs & veuves. Cela non ſeulement ſeroit utile; il eſt encore préſcrit par les models de nos Tables.

III. Fecondité reelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été $= 6904$, calcul moyen de ſix ans; il en reſulte le rapport du nombre annuel des naiſſances à celui des mariages ou la meſure de la ſecondité reelle $= 4, 6$, c'eſt à dire qu'on com-

comptoit 46 enfans ſur 10 mariages, au lieu que dans la periode précédente on n'en comptoit que 45. Cette fecondité reelle, qui eſt deja forte pour une grande ville, augmente avantageuſement de periode en periode, dans le rapport des nombres 37; 41; 42; 43; 45 & 46. Chez les étrangers elle n'a été dans la derniere periode, que 3, 6; c'eſt à dire, qu'on ne comptoit que 36 enfans ſur 10 mariages.

2.) Dans la totalité annuelle des naiſſances de 6904 enfans il y eut 3558 garçons & 3346 filles; ces deux nombres ſont entre eux en raiſon de 106 à 100. Chez les étrangers ce rapport a été celui de 109 à 100.

IV. Fecondité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été = 6904; calcul moyen de ſix ans. J'en tire le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la fecondité générale $= \frac{1}{31}$; c'eſt à dire, que dans cette periode on comptoit à St. Pétersbourg une naiſſance par an ſur 31 habitans. Elle a donc été dans la derniere periode plus grande que dans la précédente où elle a été $= \frac{1}{33}$, c'eſt à dire, que dans la periode précédente on ne comptoit par an une naiſſance que ſur 33 habitans; ſon accroiſſement dans la derniere periode eſt une ſuite immediate de celui de la fecondité intentionelle que nous venons de remarquer. D'ailleurs cette meſure de la fecondité générale eſt aſſes d'accord avec celle qui a ordinairement lieu dans les grandes villes.

V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été = 5504, dans le quel il y avoit 3589 mâles & 1915 femelles; cal-

cul moyen = 26 ſix ans. J'en tire le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la mortalité générale $= \frac{1}{38}$, c'eſt à dire, que dans cette periode de 38 perſonnes il en mourut une par an ou que de 1000 perſonnes il en mourut annuellement 26.

2.) Le parallele des trois dernieres periodes eſt à cet égard le ſuivant: Il mourut par an dans la periode de 1781 à 1785 une perſonne de 37; dans celle de 1786 à 1790 une de 29 & dans celle de 1791 à 1766 une de 38.

3.) La mortalité générale a donc été bien moindre dans la derniere periode que dans la précédente; elle eſt même bien moindre que dans d'autres grandes villes, où elle eſt ordinairement $= \frac{1}{24}$.

4.) On auroit tort de ſoupçonner la préciſion des Tables à cet égard; comme j'ai fait voir dans mon premier Mémoire, pag. 44.

5.) Dans la derniere periode il y a eu deux années où le nombre des morts ſurpaſſoit celui des naiſſances; ſavoir les années 1791 & 1796. Mais pour la periode entiere le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts dans le rapport de 125 à 100, c'eſt à dire, que contre 100 perſonnes qui moururent, il naquit 125 enſans. Dans la periode précédente le nombre moyen annuel des naiſſances a été à celui des morts dans le rapport de 85 à 100.

6.) Le ſurcroit des naiſſances ſur les morts qui a eu lieu dans la derniere periode, en raiſon de 125 à 100, ne reſultoit que du nombre des naiſſances femelles; car pour le ſexe maſculin le nombre moyen annuel des naiſſances a été

été inferieur, quoique très-peu, à celui des morts, dans le rapport de 99 à 100, au lieu que pour les femelles ce nombre a ſurpaſſé celui des morts dans le rapport de 178 à 100.

7.) Le nombre moyen annuel des hommes morts a été, dans la dernière periode, à celui des femelles mortes dans le rapport de 187 à 100 & partant prèsque deux fois auſſi grand que celui-la, & ce rapport eſt ſans doute extraordinairement fort; & d'autant plus, que, quoique tel ſoit auſſi à peu près le rapport des habitans de l'un & de l'autre ſexe à St. Péterbourg, cependant la mortalité des hommes a été, jusqu'à la 35me année de la vie, bien moindre que celle des femmes.

VI. Mortalité ſpeciale de chaque âge.

1.) Nombre des enfans venûs morts au monde.

1.) Dans le nombre de 41420 naiſſances arrivées dans cette periode il y a eu 168 enfans de venus morts au monde, ou 4 ſur 1000 naiſſances. Ce malheur eſt arrivé dans la dernière periode, bien plus frequemment, que dans les deux précédentes. Nos Tables font voir, auſſi dans la derniere periode, une différence ſenſible à cet égard entre les deux ſexes; ſur 1000 garçons nès il y a eu 5 de nès morts, au lieu qu'il n'y en a eu, que 3, ſur autant de naiſſances femelles. Dans un monbre égal des naiſſances de l'un & de l'autre ſexe le nombre des garçons nès-morts a ſurpaſſé celui des filles venûes mortes au monde dens le rapport de 5 à 3, ou bien de 17 à 10, & ce rapport, dans la periode précédente, étoit de 12 à 10.

2.) Le nombre annuel des enfans nès-morts à St. Pétersbourg, quoique plus grand dans la derniere periode, que dans les deux précédentes, eſt toujours extremement petit & prèsque ſans exemple; à Berlin, par exemple, il y a eu, l'an 1796, ſur 5854 naiſſances 203 enfans nès-morts, & partant 34 ſur 1000. Cette circonſtance très-avantageuſe pour la population reſulte en partie de la facilité des accouchemens des mères ruſſes; les liſtes de la dernière periode ſont voir, que de 1000 mères en couches à St. Pétersbourg il n'y a que 7 tout au plus, qui meurent dans les travaux de l'enfantement, au lieu qu'à Berlin il y en a 10 ſur 1000. (Voyes la Topographie medicinale de Berlin par Mr. Formey).

2.) Mortalité des Enfans nouveaux-nés.

La meſure de la mortalité ſpeciale de la premiere année de la vie a été, dans la derniere periode, telle, que de 1000 enfans nouveaux-nés & venus vivans au monde il en eſt mort 50 avant que de l'accomplir, de façon que la mortalité de la premiere année de la vie n'a, dans cette periode, enlevé qu'un vingtieme de toutes les naiſſances, au lieu d'un cinquieme & d'un onzieme qu'elle en a enlevé dans les deux periodes précédentes. La mortalité de cet âge a donc été extraordinairement petite dans la derniere periode. Mais en revange celle de la ſeconde année a été d'autant plus forte; car nos Tables ſont voir, que de 1000 enfans, tous agés d'un an, 129 moururent dans le cours de la ſeconde année de la vie; & la mortalité des deux premieres années priſes enſemble a enlevé, dans la derniere periode, plus d'un ſixieme de toutes les naiſſances.

3.)

3.) *Mortalité de l'Enfance.*

La meſure de la mortalité de l'enfance a été dans la derniere periode telle, que de 1000 enfans tous agés d'un an 700 accompliſſoient la 15me année & qu'il y en a 300 d'enlevés par la mort pendant cet intervalle de l'âge. Cette mortalité de l'enfance a été dans la derniere periode bien plus grande, que dans les deux précédentes, en raiſon des nombres 300, 161 & 197.

4.) *Mortalité du moyen âge & de la vieilleſſe.*

1.) La meſure de la mortalité du moyen âge a été dans la derniere periode moins forte que dans la periode précédente; mais toujours encore extraordinairement forte, car de 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans il n'y a eu, que 170 qui accompliſſoient la 60me année, de façon qu'il y a eu 830 d'enleués pendant cette belle periode de la vie.

2.) Cependant il y a eu dans la derniere periode ſix perſonnes mortes à l'âge de plus d'un ſiecle.

3.) On trouve dans la Table 9me & 10me 2063 perſonnes, dont 845 hommes & 1218 femmes, mortes de vieilleſſe.

VII. Force des maladies & état de la Santé publique.

1.) Quant aux maladies des enfans: les Convulſions ont enlevé par an dans la derniere periode 132 enfans, dont 68 garçons & 64 filles; la petite verole a couté la vie à 185 enfans par an, dont 94 garçons & 91 filles. La force de la premiere de ces deux maladies a donc été

bien

bien moindre dans la derniere periode que dans les deux précédentes. n'ayant enlevé qu'un 52me de toutes les naiſſances, au lieu que dans la periode précédente elles en ont enlevé un 34me; & c'eſt probablement cette circonſtance qui dans la derniere periode a tant diminué la mortalité de la 1re année. Mais la petite verole a enlevé un 37me de toutes les naiſſances, au lieu d'un 55me qu'elle en a enlevé dans la periode précédente. Dans les ſix années de la derniere periode la petite verole a enlevé 1109 enfans. Sept fois ce nombre ou 7763 a donc été probablement le le nombre des malades de la petite verole dans cette periode. Il n'en feroit mort probablement que 23, en raiſon de 3 par 1000, s'ils avoient eté inoculés; l'inoculation. ſi elle étoit autant en vogue parmi nous, qu'elle le merite, auroit ſauvé la vie à 1086 enfans dans l'eſpace de 6 ans.

3.) Il y eut dans la derniere periode 38 perſonnes par an, dont 30 hommes & 8 femmes, qui ont peri par différens accidens.

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts a été de 78 perſonnes, 68 hommes & 1 femmes. Ce nombre a donc été dans la derniere periode presque 4 fois plus grand que dans la précédente.

5.) La publicité des regiſtres detaillés des morts dans les Hopitaux & dans les Priſons feroit d'un grand intéret pour le bien de l'humanité. C'eſt ainſi qu'on ſcait par exemple pour Berlin, qu'il y meurt dans la Charité un de ſix malades. Voyes la Topogr. de Berlin par M. Formey.

6.)

6.) La révolution periodique de la mortalité rélativement aux ſaiſons conſerve à St. Pétersbourg conſtamment la même marche. La mortalité y eſt la plus petite au mois d'Octobre; elle augmente enſuite de mois en mois (à l'exception du mois de Février) & elle eſt la plus forte au mois de Mai; après quoi elle va derechef en diminuant. De 1000 morts de la derniere periode il mourut

295 au Printems. 272 en Eté. 200 en Automne. 233 en Hyver.	Donc le nombre des morts en Printems & en Eté ſurpaſſe celui des morts en Automne & en Hyver en raiſon de 13 à 10.

VIII. Meſure des progres de la Population à St. Pétersbourg.

J'ai fait voir dans mes Mémoires précédans, que l'expreſſion arithmetique la plus claire de la vigueur de la population, c'eſt à dire, de ſa *tendance interne* à augmenter eſt le rapport de l'Excédant annuel des naiſſances ſur les morts au nombre total des vivans, parmi les quels il a eu lieu. Ce rapport a été dans la dernière periode celui de 66 à 10000. Préſentons ici le parallele de ces rapports dans toutes les ſix periodes conſécutives que mes Mémoires embraſſent:

Pour la Periode de	le rapport de l'excédant annuel des naiſſances ſur les morts au nombre total des vivans, comme
1764 à 1770	28 à 10000.
1771 à 1775	12 à 10000.
1776 à 1780	76 à 10000.
1781 à 1785	38 à 10000.
1786 à 1790	Excédant des morts ſur les naiſſances.
1791 à 1796	66 à 10000.

enſor-

enſorte, que les nombres 28; 12; 76; 38; — 0; et 66 ſont les degrés d'une eſpece de Thermometre politique, qui nous apprend les degrés de la vigueur de la population dans ces ſix periodes conſécutives à St. Pétersbourg. Il nous offre les remarques ſuivantes:

a) Hors la periode de 1786 à 1790, où la population etoit abſolument retrogarde, la vigueur de la population etoit la plus foible dans la periode de 1771 à 1775.

b) Elle a été la plus forte dans la periode de 1776 à 1780 & enſuite dans celle de 1791 à 1796.

c) Il doit avoir eû, ſans doute, des cauſes fort energiques, dont les unes ont fait baiſſer ce Thermomètre de population depuis la periode de 1776 à 1780 de 76 à 38 degrés, & même dans la periode de 1786 à 1790 jusqu'au deſſous de Zero, & dont les autres l'ont fait remonter ſi heureuſement jusqu'à 66 degrés dans la dernière periode de 1791 à 1796.

La connoiſſance des pareilles variations du Thermomètre de population des *Provinces entières* du vaſte Empire de la Ruſſie, & la recherche des cauſes locales, phyſiques, morales & politiques, qui les produiſent, ſeroient inconteſtablement d'une très-grande importance pour le Gouvernement & le mettroient à portée d'opérer (comme je l'ai fait voir dans mes Mémoires précédans) de la maniere la plus efficace ſur la conſervation, l'accroiſſement & le bonheur de ſes ſujets & ſur le bien de l'humanité en général; mais cette connoiſſance ſi intéreſſante & cette recherche ſi utile ne peuvent avoir lieu, que par l'établiſſement d'un Bureau des Tables de Population de la Ruſſie.

PHY-

PHYSICA.

EXPOSITIO NOVORUM EXPERIMENTORUM CIRCA FRIGUS ARTIFICIALE.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conventui exhibit. die 4 Decemb. 1794.

§. 1.

De frigore artificiali doctrina digna ſane eſt, quae ſummo phyſicorum ſtudio excolatur; non enim eſt, quod dubitemus, quin eorum, quibus vehementiſſimum frigus excitari poſſit, mediorum uberior cognitio multa eaque memoratu non minus digna, quam utilia, inventa ſit ſuppeditatura. Sicuti enim calor primaria immo unica fluiditatis omnium corporum cauſſa eſt, adeo, ut nullum fere in orbe noſtro corpus ſolidum ſit, quod igne magis magisque aucto, non flueret tandem, vel adeo in vapores vel aëris formam tranſiret; ita vice verſa nullum fere eſt dubium, quin omnes non niſi ſub fluiditatis ſtatu hucusque viſae ſubſtantiae frigore ad certum usque gradum aucto indureſcerent.

§. 2. Ignem nobis longe magis, quam frigus, augere hucusque licuit; id quod ex eo potiſſimum patefiet, ſi immanem illam diſtantiam inter ſummum, quem hodie novimus, ignis gradum et naturalem temperiem cum admodum exiguo illo diſcrimine inter eandem naturalem temperiem et maximum hucusque productum frigus artificiale,

 con-

conferamus. Cl. Wedgwood maximum calorem, quem in parvo furno anemio excitare potuit, inſtituto calculo 21877 graduum ſcalae Fahrenheitianae reperit *). Maximum vero frigus quod ego quidem, uti infra patebit, ſuſcitare potui, non niſi — 58½ graduum eiusdem ſcalae fuit. Neque tamen eſt quod ingentem hanc miremur differentiam; innumeri enim inde ab orbe condito homines in ignis viribus augendis omnem operam collocaverunt; frigori intendendo pauci, nec niſi recentioris aetatis, phyſici manum admoverunt. Cel. Boyle primus anno 1665 ſalis armoniaci ope frigus artificiale ſuſcitavit, nec fuerunt multi qui poſt eum eadem veſtigia ſequerentur; et quod caput eſt, ipſa natura longe plura potentioraque ignis, quam frigoris, excitandi media nobis offert.

§. 3. In igne augendo iam cousque pervenimus, ut admodum pauca, quae nemo adhuc liquefacere vel in vapores convertere potuiſſet, corpora ſupereſſent. Permulta autem exſtant liquida e. g. Alcohol vini, Naphthae et complura alia, quae hodienum nullo frigore formam ſolidam induerunt; longeque plura aëris ſub forma innotuerunt, quae tantum abeſt, ut ad ſolidam formam redigi hucusque potuerint, ut ne palpabilis quidem Liquoris ſtatum ipſis conciliare unquam licuerit. Atque haec ſi probe perpendimus, iure meritoque ſuſpicari oportet, inter vehementiſſimum, quod arte hodienum aſſecuti ſumus, frigus ultimosque abſoluti frigoris fines ingens adhuc intervallum eſſe relictum; quem extremum frigoris limitem, etſi ſpes nulla eſt, fore, ut unquam arte aſſequamur; tamen nullum eſt du-

*) Chaptals Anfangsgründe der Chemie überſezt von Wolf, 1 B. 186 S.

dubium, quin aſſiduo naturae ſtudio media detegere liceat, quibus frigus artificiale ſummo, quod hodienum producere potuimus, longe maius excitare liceat.

§. 4. Frigoris artificialis productio multis utique difficultatibus laborat; mediorum enim frigoris excitandi hucusque notorum haud mediocre pretium impedit, quominus largam ſatis eorum copiam huiusmodi tentaminibus impendere liceat; quo neceſſario fit, ut et ipſe tentaminum effectus inde diminuatur; deinde ipſa haec media, quantumvis magna eorum copia utamur, ſufficienti tamen ſcopo noſtro efficientia deſtituuntur; adde quod in ſuſcipiendis eiusmodi tentaminibus nosmet ipſos moleſtiis nonnullis exponere debeamus. Neque tamen his difficultatibus nos ab ampliori huius rei ſcrutinio arceri fas eſt, quandoquidem, mea quidem opinione, inventa memoratu longe digniora a ſumma frigoris intenſione, quam ab ea ignis, exſpectanda ſunt; ſummus enim ignis, corpora dilatando et in vapores demum diſſolvendo, ea ſenſibus noſtris eripit quaſi: ſummum contra frigus corpora condenſando ea ſenſuum noſtrorum examini eo magis ſubiicit.

§. 5. Atque hinc fieri poteſt, ut frigoris ope eiusmodi nova aliquando detegamus corpora, de quorum exiſtentia nunc ne minima quidem ſuſpicio nobis eſt; cuius rei reapſe multa iam exempla proſtant, quorum nonnulla allegare non erit alienum: Aqua eo, quo ebullit, calore in aëris formam, certo vero frigoris gradu, in glaciem abit: fingamus iam in toto noſtro orbe temperiem naturalem ad congelationis aquae gradum nunquam adhuc fuiſſe diminutam; quanta admiratione percelli deberet is, qui primus frigore artificiali glaciem produceret, pulchrasque & varias eiusdem for-

formas conſpiceret? Sunt porro eiusmodi liquores, uti naphthae vitrioli et nitri qui calore eo aquae ebullientis longe minori, 85 nimirum graduum ſcalae de l'Islianae, in quo igitur ſalva adhuc hominum vita eſt, aëris formam induunt. Hinc iis in regionibus ubi naturalis temperies dicto caloris gradu gaudet, liquores iſti liquidi palpabilis formam nunquam induerunt, omnique hominum notitiae ſeſe ſubtraxerunt. Mercurius licet nonnullis in regionibus naturali frigore ſponte coaguletur; attamen Cel. Braun huius rei inſcius anno 1759 indureſcendi eiusdem facultatem primus frigoris artificialis ope reperit. Inter fluida aërea acidum ſalis ſic dictum dephlogiſticatum vel ſuperoxygenatum mediocri frigore concreſcit in cryſtallos, quae diminuto hoc frigore aëris formam recuperant.

Atque, cum teſtantibus citatis his exemplis, variae notae nobis ſint ſubſtantiae quae medi cri naturalis temperiei mutatione ſtatum quoque ſuum mutent, ſiquidem ex ſolidis liquida fiunt, atque adeo in formam aëream, et vice verſa abeunt; quid igitur obſtat, quominus ſuſpicemur, fore, ut ſubſtantiae tenuiſſimae, immo aëreae formae, veluti aër alcalinus, muriaticus, fixus, nitroſus, vitriolicus, multique alii dureſcerent demum, dummodo juſto huic negotio frigori ſubiicerentur?

§. 6. Hac occaſione praeclare a Cel. Lavoiſierio dicta his affinia propriis ipſius verbis non allegare non poſſum (*): „Fingamus orbem noſtrum terreſtrem ſubito in re„gionem calidiorem ſyſtematis ſolaris transferri in eam po„namus Mercurii, cuius calor naturalis cum aquae ferven„tis

(*) Lavoiſiers Syſtem der antiphlogiſtiſchen Chemie a. d. franz. von D. Hermbſtadt. S. 47.

„ tis ſine dubio longe ſuperat; aqua, cunctique liquores, „ quin ipſum adeo argentum vivum expanderentur ſane, in- „ que liquida aëriformia converterentur, quae conſtitutivas „ tunc atmoſphaerae partes efficerent. — — —

„ Si contra idem orbis in frigidiorem regionem trans- „ ferretur: aqua, quae nunc maria et fluvios format, et „ maximus ceterorum liquidorum numerus duriſſimos con- „ formarent montes rupesque, qui licet montis cryſtallini „ ad inſtar initio prorſus diaphani forent, temporis tamen „ ſucceſſu, dum heterogeniis miſcentur ſubſtantiis, in lapi- „ des opacos verſicolores abirent. Aër autem, vel pars ſal- „ tem liquidorum aëriformium eum conſtituentium, ob ca- „ loris defectum fluidi elaſtici ſtatum exuerent, neceſſario- „ que in liquidi palpalis formam abirent, novaque corpora „ liquida efformarent, quorum natura nos profunde lateret.

„ Duo hi caſus contrarii luculenter monſtrant, *a*) „ ſoliditatem, fluiditatem et elaſticitatem aëream unius eius- „ demque materiei tres diverſos ſtatus eſſe; quos omnes ſub- „ ſtantiae ſubire poſſint, quique non niſi ab eo, quem cor- „ pora experiuntur, caloris gradu dependeant: *b*) Atmo- „ ſphaeram telluris eiusmodi liquoribus conſtare, qui prop- „ ter naturalem temperiei gradum non niſi aëris forma exi- „ ſtere poſſint: *c*) Indeque fieri quoque poſſe, ut in atmo- „ ſphaera noſtra corpora inſignis denſitatis, quin etiam me- „ tallica, hydrargyro aliquantulum volatiliora deliteſcant. „

§. 7. Pulcherrimae hae ingenioſaeque Cel. Lavoi- ſierii poſitiones nihil certe, quod ordini rerum repugnet, afferere videntur. Atque ego quidem hanc meam quoque ſententiam addere audeo, veriſimile eſſe, fore, ut, ſi unica

ſed

ſed cuncta atmoſphaera, a terra noſtra amota, ſubito in frigidiſſimam quandam omnis omnino caloris expertem univerſi regionem transportaretur, in novum ea compactumque orbem ambitus ſatis adhuc inſignis ibi coaleſceret, qui nihilominus propria ſua adhuc gauderet atmoſphaera.

§. 8. Perinde ac temperiei mutatione corporum ſtatus mutatur, ſic vice verſa eadem hac ſtatus corporum mutatione ipſa temperies mutatur, ita, ut fluidorum coagulatione calor, frigus vero ſolidorum liqueſcentia vel ſolutione oriatur.

§. 9. Frigoris vel caloris hoc in caſu origo ex eo repetenda eſt, quod corpora ſolida, dum in ſtatum fluiditatis abeunt, calorem quo ſolvuntur vel liqueſcunt, perfectiſſime ligent, vel abſorbeant quaſi; in caſu vero contrario, coagulatione nimirum, abſorptus ille calor iterum liberatur.

§. 10. Eadem de cauſſa et tranſitus corporum liquidorum in ſtatum aëreum inſigne etiam frigus gignit; id quod praecipue prompta volatiliſatio vel exhalatio naphthae vitrioli vel nitri evidenter oſtendit.

§. 11. Frigori gignendo ſubita quoque relaxatio vel expanſio aëris valde compreſſi una ſufficit. Egregium huius rei exemplum fons ſic dictus Heronis exhibet, qui in Ungaria in fodinis Selmiczlanianis exſtructus eſt (*): illius enim machinae ope magno quodam in vaſe aër atmoſphaericus per columnam aqueam 260 pedes altam valde comprimitur, compreſſusque hoc modo aër, ſi epiſtomii ope emittitur, propter eximiam rapidamque attenuationem, contentos in ipſo humores praecipitat quaſi et nivis atque glaciei ſub forma ſegregat.

§. 12.

(*) Philoſ. Tranſ. J. 1761. Vol. 52.

§. 12. Cel. Landriani amalgamatione frigida frigus quoque oriri obſervavit, dum globulum thermometri ſtanni foliolo involutum mercurio vivo immerſiſſet.

§. 13. Aptiſſima producendo frigori artificiali corpora ſalia ſunt cryſtalliſata et nix vel glacies.

§. 14. Acida liquida, uti ſpiritus vitrioli, nitri, ſalis etc. mea quidem ſententia inter media frigus producentia jure referenda non ſunt; inſigne enim, quod eorum ope ſuſcitatur, frigus ex promptiore potius ſalium vel nivis ſolutione, quae in iis efficitur, repetendum eſt ita, ut liquores illi in producendo frigore non niſi vim mediatam exſerere cenſendi ſint.

§. 15. Frigus artificiale eo vehementius ſemper eſt, quo frigidiora ſunt ſolventia, quibus ſolvuntur ſalia, et quo magis (nullo tamen adhibito calore) acceleratur ſalium ſolutio.

§. 16. Noviſſimis temporibus digniſſima memoratu experimenta, frigus artificiale ſpectantia Cel. Walker inſtituit (*). Contigit enim ei miſtionem refrigerantem invenire, qua auxiliante, nulla adhibita nive, aeſtivo etiam tempore argenti vivi coagulatione potitus eſt. Efficaciſſima, illo docente, miſtio refrigerans ea eſt, quae obtinetur, ſi partibus 4 acidi nitri diluti (conſtantis duabus partibus ſpiritus nitri fumantis unaque aquae) 8 ſodae phoſphoratae confe-ſtim-

(*) Philoſ. Tranſ. J. 1789. vol. 79.
Grens Journal der Phyſik. 1. B. 419 S.

ſtimque deinde 5 adhuc nitri flammantis partes admiſceantur. Ego quidem, cum experimentum hoc imitari ſumma cura aliquoties tentaviſſem, hac miſtione frigus non niſi 105 graduum de l'Isliano rum corſecutus ſum; unde concludere licet, cauſſam quandam occultam ſubſuiſſe, quae efficeret, ut ſucceſſu hac in re omnino caruiſſem.

§. 17. Celebr. Blagden (*) quam pulcherrime oſtendit ſummum frigoris gradum quem ſingula ſalia cum nive vel glacie mixta producere valeant, praeciſe id eſſe frigus, quod ſaturatae ſingulorum horum ſalium in aqua ſolutiones, ut coagulentur, poſtulant. Enimvero ſimulac ſaturatae cuiuslibet ſolutionis conglaciatio incipit amplioris refrigerationis cauſſa tollitur omnis: nulla ergo nivis atque ſalium ope ulterior caloris abſorbtio deinceps contingere poteſt.

§. 18. Atque his ex aſſertis Cel. Blagdenii facile eſt videre, omnem in excitando inſigniori frigore rei cardinem in eo verti ut cum nive eiusmodi miſceantur ſalia, quorum ſaturatae ſolutiones ſuſtinendo vel maximo frigori absque eo, ut gelaſcerent, aptae ſint; ea contra ſalia, quae aqua ſoluta eiusdem congelationem non prohibent, minimum cum nive frigus ſuſcitare.

§. 19. Expoſitis iam iis principiis, quibus frigoris artificialis productio potiſſimum nititur, meorum hac de re inſtitutorum tentaminum expoſitionem aggrediar. Contigit enim mihi eo in iis ſucceſſu gaudere, ut duo excitando frigori apta eiusmodi ſalia invenirem, quae maius non modo frigus gignunt, quam ea magni pretii media, quae hucusque hoc in negotio adhiberi conſueverunt, ſed etiam tantilli pre-

(*) Grens Journal der Phyſik. 1 B. 387. S.

pretii ſunt, ut magna eorum copia ad frigoris experimenta revocari poſſit.

§. 20. Conſtat inter chemicos, ſalia, dum cryſtalliſationis aqua gaudent, ſi aqua ſolvantur, frigus excitare, calorem vero, ſi eadem ſalia cryſtalliſationis aqua prorſus privata ſint. Inter omnia ſalia ſicca lapis ſic dictus cauſticus vel alcali vegetabile cauſticum ſiccum cum aqua maximum calorem excitat. Poſteaquam anno 1792 Alcali huius cauſtici cryſtalliſatio mihi ſucceſſiſſet, ſequentia cum eo tentamina inſtitui.

EXPERIMENTVM I.

Vnciae 12 alcali cauſtici cryſtalliſati non pulveriſati aequali quantitati aquae temperiei 125 graduum ſcalae des l'Islianae admixtae frigus 149 graduum excitabant (*).

EXPER. II.

Die 10mo Decembris, cum 4 circiter libris cryſtallorum illorum libram unam aquae temperiei 149 graduum adfunderem; frigus inde oriebatur 163 graduum.

EXPER. III.

Reſiduis in experimento antecedente cryſtallis non ſolutis, decantato omne liquore, nivem cum admiſcuerem; 200 graduum frigus ſtatim oriebatur. Temperies laboratorii, ubi tentamen hoc inſtitui, 145 graduum fuit.

EXPER. IV.

Die 24to Decembris, exiſtente naturali frigore 162 graduum miſtio 6 unciarum alcali cauſtici cum nive in aëre libero facta 214 graduum frigus excitavit.

(*) In omnibus ſequentibus experimentis Thermometro uſus ſum ſpiritu vini repleto.

EXPER. V.

6 Mercurii vivi unciae miſtioni antecedentis tentaminis immediate infuſae prompte in maſſam ſolidam coagulabantur.

EXPER. VI.

Succeſſit mihi quoque mercurii coagulatio, cum vitrum duas eius libras continens recenti tali miſtioni ex duabus alcali cauſtici libris et nive paratae impoſuiſſem. Mercurius penitus coagulatus, fracto vitro, mallei ictu in fruſtula acute abſciſſa diſſiluit.

EXPER. VII.

Die 25 Decembris mercurii congelatio in conclavi meo etiam calefacto temperaturae 13° graduum mihi ſucceſſit, dum libram unam mercurii in vitro detentam miſtioni unius librae alcali cauſtici cum nive immergerem.

EXPER. VIII.

Die 8vo Januarii 1793 praeſente Cel. Profeſſore et Equite Krafft coram Sereniſſimis Principibus Imperatoriis Alexandro et Conſtantino in ipſorum conclavi temperiei 128 graduum experimentum hoc cum quatuor mercurii libris, miſtioni refrigeranti immediate infuſis, proſperrime mihi ſucceſſit.

EXPER. IX. et X.

Die 1[illegible]^{mo} Januarii in conclavi conventus Ill. Academiae ſcientiarum temperiei 125 graduum praeſentibus omnibus eiusdem membris 8 mercurii librae, miſtioni refrigeranti immediate infuſae, penitus coagulabantur in maſſam ſolidam, quae malleo percuſſa praeter fragilitatem nonnulla ſimul malleabilitatis indicia oſtendit.

Prae-

Praeterea in aëre libero naturali frigore 171 graduum librae $3\frac{1}{2}$ mercurii puriſſimi e cinnabari revificati in vitro cylindrico contenti, orto artificiali frigore 220 graduum, brevi tempore coagulabantur in maſſam ſolidam, quae fortiori mallei ictu in multa fruſtula, fracturas conchoideas exhibentia, diſſiluit; qua tamen fragilitate non obſtante, fruſtula illa cultri ope in pulchras ſcopes ſpirales libentiſſime ſe ſcindi patiebantur.

EXPER. XI. et XII.

Die 17mo Januarii eadem duo experimenta in Collegio Medico, praeſentibus eiusdem membris, tanto ſucceſſu inſtitui, ut 4 alcali cauſtici librarum ope in conclavi ad 125 gradus calido ſimul 12 mercurii libras miſtioni refrigeranti immediate infuſas, et 4 eiusdem libras in vitro cylindrico ſeorſim contentas penitus coagulaverim. Exemta poſtea e miſtione refrigerante 12 librarum mercurii maſſa non niſi poſt dimidiae horae ſpatium fluiditatem recuperavit.

Atque haec, quae de mercurii congelatione expoſui, experimenta novae huius methodi praeſtantiam ſatis ſuperque confirmant. Plures, ad mercurium quae ſpectant, eiusdem generis obſervationes alia in diſſertatione ſeorſim exponere mihi animus eſt.

EXPER. XIII.

Die 16° Ianuarii, exiſtente naturali frigore 185 graduum, in aëre libero auxiliantibus duabus alcali cauſtici libris frigus 225 graduum obtinui. Hocce in experimento id memoratu dignum quoque viſum mihi eſt, quod duarum cum quadrante horarum ſpatium praeterlaberetur, antequam miſtionis frigus ad mercurii regelaſcentis punctum, 210^{mum} nempe gradum, diminueretur. Longumque hoc temporis inter-

intervallum, per quod vehementiſſimum frigus in miſtione hac dominatur, eam inprimis ob cauſſam magni eſt momenti quia experimenta frigoris ope ſuſcipienda inſigniter inde facilitantur.

EXPER. XIV — XIX.

Miſtioni refrigeranti antecedentis experimenti ſequentes liquores in vitris oblongis cylindricis operculo clauſis contentos immerſi, exploraturus, quem effectum vehemens illud frigus in iis eſſet producturum:

a) Spiritus nitri fumans nullam plane mutationem pati videbatur.

b) Naphtha vitrioli lacteſcebat nec non paulo ſpiſſior fieri mihi viſa eſt.

c) ſpiritus vero ſalis ammoniaci cauſticus concentratiſſimus per omne volumen ſuum, ſpermatis ceti ad inſtar, pulcherrimam cryſtalliſationem vel coagulationem ſubiit.

d) Acidum pinguedinis concentratiſſimum ſevi ad inſtar penitus in maſſam albam coagulabatur.

e) Acidum vero formicarum concentratiſſimum liquiditatem ſuam quam tenaciſſime ſervavit.

§. 21. Cum Alcali cauſtici cryſtalliſatio operoſa nec non diuturna admodum ſit; haud alienum duxi experiri, poſſitne ſal hoc ſimplici tantum inſpiſſatione producendo eidem frigoris gradui aptum reddi.

EXPER. XX.

Lixivium cauſticum ſueto modo calcis vivae ope paratum eoque evaporationi ſubjeci, dum gutta lapidi frigido injecta penitus rigeſceret ita, ut in pulverem ſiccum ſe

ſe teri pateretur; quo viſo, omnem liquorem calidum adhuc ollae argillaceae infudi locoque frigido per nychthemeram expoſui. Omnibus refrigeratis, diffractaque olla, maſſam penitus coagulatam in pulverem redegi. Hicce pulvis cum nive mixtus, naturali frigore 17 graduum, idem prorſus, quod alias alcali cauſticum cryſtalliſatum, frigus nempe 225 graduum (EXP. XIII.) excitavit.

§. 22. Atque hac ex methodo non inſigne modo laboris compendium repetitur; ſed unum idemque alcali, finito quolibet tentamine, brevi tempore ſine ulla fere iactura novo experimento aptum iterum iterumque reddi poteſt quod inſigne emolumentum in omnibus huicusque adhibitis iisque longe praetioſioribus vehementiſſimus frigus excitandi mediis iure meritoque deſiderabatur; ſiquidem ſemel adhibita, eadem alteri tentamini apta ulterius reddi non potuerunt.

§. 23. Alcali cauſticum nive ſolutum, finito quolibet tentamine, etiam eo citius reſtitui denuo poteſt, ſi, ad debitam conſiſtentiam evaporatum, eo loco ubi ollae illud infundis (EXP. XX.). in aëre libero frigidiſſimo continuo agitatur, usque dum plane refrigeratum in pulverem facile ſe teri patiatur.

§. 24. Comparationis cauſſa neceſſarium mihi viſum eſt, experiri, quomodo varia alcalia eaque variis ſub conditionibus in excitando frigore ſe ſint habitura. Hunc in finem ſequentia tentamina, exiſtente naturali frigore 152 graduum, ſuſcepi.

EXPER. XXI.

Lixivium cauſticum alcali vegetabilis concentratum forma liquida nivi adfuſum 200 graduum frigus largiebatur.

EX-

EXPER. XXII.

Per mixtionem ſpiritus ſalis ammoniaci cauſtici cum nive non niſi 159 graduum frigus oriebatur.

EXPER. XXIII.

Alcali volatile ſiccum aëratum cum nive mixtum 182 graduum frigus producebat.

EXPER. XXIV.

Lapis ſic dictus cauſticus, qui conſueto modo candeſcentiae ope omnibus particulis aqueis plane orbatus erat, in pulverem ſubtiliſſimum redactus, frigus 190 graduum cum nive mixtus excitabat

EXPER. XXV.

Alcali minerale cauſticum cryſtalliſatum cum nive mixtum 189 graduum frigus ſuſcitavit.

Quae quidem tentamina luculenter ſatis probant, alcali vegetabile, in producendo frigore, ceteris alcalibus multis paraſangis palmam praeripere.

§. 25. Cum phyſici hodienum ſpiritu praeſertim nitri fumanti ceu efficaciſſimo medio refrigerante uti aſſueverint: non alienum duxi, ſequentia experimenta comparativa, exiſtente naturali frigore 151 graduum, inſtituere:

EXPER. XXVI — XXXI.

a) Spiritus nitri fumans cum nive mixtus 196 graduum frigus excitavit.

b) Spiritus nitri dilutus, 185½°.

c) Acidum vitriolicum concentratum, 185½°.

d) Alcohol aceti Weſtendorfii, 191°.

e) Acetum glaciale liquidum, 191°.

f) Acidum ſalis concentratiſſimum 201½°.

§. 26.

§. 26. Teſtantibus igitur tentaminibus his, acidum ſalis pretioſiori ſpiritui nitri fumanti in producendo frigore palmam praeripit. Alcali vero cauſticum, utpote quod calefacto etiam loco 216 graduum frigus gignit, cuncta acida multum antecedit; iam enim conſtat, ſpiritus nitri fumantis ope frigus, quo mercurius coaguletur, ſuſcitari non poſſe, niſi opitulante naturali frigore ad minimum 188 graduum.

§. 27. Alcali cauſticum quamquam in producendo vehementiori frigore primas ſibi partes vindicat; fatendum tamen mihi eſt, efficaciſſimum hoc medium magno eo laborare vitio, quod, ſi multa cum eo, eaque magna eius quantitate, inſtituantur tentamina, experimentatori quam doloroſiſſimas digitorum inflammationes immo ſuburationes afferat, id quod egomet ipſe maxima cum moleſtia expertus ſum; dum digiti mei ad unum omnes vehementiſſimis afficiebantur panaritiis, ita, ut per ſex menſium ſpatium manuum uſu fere omni privatus fuerim. Mali huius eum praecipue in finem mentionem facio, ut ſuſcepturi ſimilia cum alcali cauſtico experimenta, omnem hac in re neceſſariam cautionem adhibeant. Atque huius praecipue inſignis moleſtiae cauſſa ſummopere optavi, aliud ut medium eadem efficacitate praeditum, minus vero nocivum, invenire mihi liceret.

§. 28. Primariam alcali cauſtici vim refrigerantem cum ſuſpicarer facillima eiusdem deliqueſcendi facultate niti, qua quippe promptiſſima eaque reciproca duorum corporum ſolidorum, nivis videlicet ſimulque ſalis, liquefactio efficitur; operae mihi pretium viſum eſt, experiri, alia quoque ſalia deliqueſcentia quomodo hoc in negotio ſe ſint praeſtitura. Tentamina haec naturali frigore 155 graduum ſuſcepi.

EXPER. XXXII.

Sal tartari ſucto modo ad ſiccitatem inſpiſſatum nivi admiſtum 191 graduum frigus ſuſcitavit.

EXPER XXXIII.

Calx nitrata pulveriſata perinde 191 graduum frigus producebat.

EXPER. XXXIV.

Magneſia ſalita pulveriſata 195°.

EXPER. XXXV.

Butyrum ſic dictum antimonii pulveriſatum 191 graduum.

EXPER. XXXVI.

Terra foliata tartari 200°.

EXPER. XXXVII.

Ferrum ſalitum ſublimatione paratum 203°.

EXPER. XXXVIII.

Calcem ſalitam vel ſal ammoniacum fixum ſic dictum, e reſiduo a deſtillatione ſpiritus ſalis ammoniaci cauſtici elixiviatum inſpiſſatumque et in pulverem redactum, maxima mea cum voluptate 218 graduum frigus producere vidi. Atque alio tempore, exiſtente naturali frigore 175 graduum mediante ſale hoc idem prorſus frigus artificiale, quod alias alcali cauſtici ope obtinui, 225 nempe graduum aſſecutus ſum.

EXPER. XXXIX.

Novembris die 29 anno 1793, exiſtente naturali frigore 155 graduum, mediantibus 5 huius ſalis libris [illegible] librarum

brarum argenti vivi in unam maſſam ſolidam coagulatione potitus ſum.

§. 29. Calx igitur ſalita non tantum eadem prorſus qua alcali cauſticum, in frigore producendo efficientia gaudet, ſed eidem quoque longe antecellit: primo enim minimi ea pretii eſt, cum non in laboratoriis tantum pharmaceuticis dum ſpiritus ſalis armoniaci cauſticus et alcali volatile ſiccum praeparantur; ſed in ſalinis quoque e muria ſalis communis ſponte idque magna quantitate obtineatur, et, cum nulla hucusque eius utilitas cognita fuiſſet, reiiciatur ita, ut tentamina cum eo admodum parvo ſumtu pro lubitu et quantumvis magna eius quantitate inſtituere liceat: Deinde ſal hoc manibus nullum omnino damnum affert. Ceterum ſolutio illius, finito quolibet tentamine, perinde ac alcali cauſticum et eodem prorſus modo (EXPER. XX.) unica nempe inſpiſſatione, novis experimentis inſtituendis brevi tempore apta denuo reddi poteſt.

§. 30. Reperta pulcherrima hac calcis ſalitae in frigore producendo facultate, operae mihi pretium viſum eſt, aptiſſimam huic fini miſcendorum proportionem explorare.

EXPER. XL — LI.

Singula haec in ſequente tabula exhibita tentamina cum 6 unciis nivis recentis, exiſtente naturali frigore 155 graduum, eo modo inſtitui, ut indicatam calcis ſalitae pulveriſatae quantitatem nivi in vaſe iuſtae capacitatis antea immiſſae admiſcerem et mixtionem continua agitatione cochlearis ope accelerarem.

Tentaninum numerus.	Calcis ſalitae copia.	Excitati frigoris gradus.
XL	Unc. 1	186°.
XLI	—— 2	197.
XLII	—— 3	207.
XLIII	—— 4	215.
XLIV	—— 5	219.
XLV	—— 6	221.
XLVI	—— 7	222.
XLVII	—— 8	223.
XLVIII	—— 9	223.
XLIX	—— 10	223.
L	—— 11	223.
LI	—— 12	223.

§. 31. Experimentis his docentibus, minima ſalis nivi addendi copia ad eam nivis in ratione numerorum 4 et 3 ſe habet, hoc eſt, maximum ut obtineatur frigus, tribus nivis ponderibus quatuor ſalis admiſcenda ſunt. Cum vero ſalis abundantia, uti ultima 5 experimenta (N. XLVIII — LI) docent, nihil hac in re damni afferat; ſucceſſus certioris gratia conſultius utique eſt, illius proportionis loco, duabus nivis partibus tres ſalis partes admiſceri.

§. 32. Inter creberrimas tentaminum meorum repetitiones, ſummum frigoris gradum, quem calx ſalita producebat, quod attinet, ſaepiſſime ſatis inſignes differentias obſervare mihi contigit: cum enim unius eiusdemque ſalis eadem quantitate eademque aeris temperie at diverſis tamen temporibus tentamina inſtituerem; aliam aliumque frigoris

goris gradum aſſecutus ſum; eandemque frigoris diverſitatem tunc quoque locum obtinere vidi, cum uno eodemque tempore et eodem temperiei gradu calcis ſalitae portionibus varie paratis uterer; quas diverſitates priori in caſu, a diverſa nivis qualitate; in altero vero a varia ipſius ſalis natura repetendas eſſe, ſequentia tentamina evidenter monſtrant.

EXPER. LII et LIII.

Calx ſalita recens parata in duas portiones diviſa, frigore naturali 165 graduum exiſtente, cum nive *recenter lapſa* mixta 224 graduum frigus progenuit.

Cum nive vero *vetuſtiore* et ob praeviam regelationem *conglomerata* altera ſalis portio eodem tempore non niſi 214 graduum frigus produxit. Huiusmodi cum nive conglomerata mercurii coagulatio in hypocauſto calido ſucceſſu caret.

EXPER. LIV et LV.

Solutionem calcis ſalitae eousque evaporavi, donec guttula lapidi frigido iniecta coagularetur ita, ut in pulverem ſiccum teri potuerit, quo facto, dimidiam ſalis portionem, refrigeratam, in pulverem redegi; alteram vero portionem, quo ab omnibus liberaretur particulis aqueis, ulteriori inſpiſſationi ad ſiccitatem usque ſubieci.

Prior illa portio *cryſtalliſationis aqua abundantiſſima* cum nive recente 223, altera autem *omnis aquae expers* portio eadem cum nive non niſi 206 graduum frigus largiebatur.

§. 33. Hinc videre eſt, ad frigoris productionem multum intereſſe, ſalis praeparatio ut rite fiat, caveasque

ne

ne evaporationem eiusdem iuſto plus continues. Enim vero multis experimentis compertum mihi habeo, ſalia huiusmodi deliqueſcentia, quo ditiora ſunt particularum aquearum, eo maius frigus excitare.

§. 34. Conſtat inter chemicos, ſi ſalis communis vel ſalis armoniaci ope frigus artificiale excitari debeat, nihil prorſus referre, an ſicca nix an humida adhibeatur; nihil quoque refert, ipſa haec ſalia ſiccane plane ſint an madida aliquantulum; ſiquidem omnibus his in caſibus, uti egomet ipſe compertum habeo, unus eiusdemque ſemper frigoris gradus obtineatur. Reſpectu ſalium vero deliqueſcentium aliter prorſus rem ſe habere, e ſequentibus tentaminibus, naturali temperatura 151 graduum, ſuſceptis patebit.

EXPER. LVI.

Pulvis alcali cauſtici *ſiccus* aqua tamen cryſtalliſationis abundans cum nive mixtus 216 graduum frigus largiebatur.

EXPER. LVII.

Idem vero Alcali cauſticum *humectatum* aliquantulum et cum nive ſicca mixtum frigus 208 tantum graduum producebat.

EXPER. LVIII.

Alcali cauſticum ſiccum cum nive *humida* mixtum non niſi eundem plane frigoris gradum quem ſal hoc cum aqua, cuius temperies ad congelationis punctum prope accedit, frigus nempe 163 graduum (§. 20. Exper. II.) excitabat.

§. 35. Tria haec experimenta eodem modo etiam cum calce ſalita inſtituta, eosdem prorſus oſtendebant effectus;

fectus; ex quo luculenter patet; 1mo) nivem, ut ſalia haec ſummum pro natura ſua frigus excitent, neceſſario ſiccam eſſe debere: 2do) magni etiam momenti eſſe, ut ipſi quoque ſalium pulveres probe ſicci ſint: 3tio) tentamina circa frigus artificiale frigidiore ſemper, nunquam vero regelationis tempore, ſuſcipi debere.

§. 36. In ipſa igitur praeparatione horum ſalium, ut ſumma inſtruantur efficacitate, duae inprimis omni ſtudio obſervandae cautelae ſunt: Primo ſcilicet, ut in ſalibus dictis, dum evaporantur, maxima quantum fieri poteſt, aquae copia retineatur: Deinde ut ſalia haec, ſuperſtite hac aqua non obſtante, pulverem tamen probe ſiccum exhibeant. Enim vero facillime in utroque peccari poteſt; ſi nimirum evaporatio aut tarde nimis, aut immature interrumpitur.

§. 37. Praecipuae autem, quibus optimae notae iſta ſalia obtineantur, regulae ſequentibus abſolvuntur:

1.) Ne, dum inſpiſſantur ſalia, iuſto plus vel minus evaporationi ſubiiciantur, aliquot guttulae ſubinde eximendae corporique frigido iniiciendae ſunt, donec guttas has non coagulari tantum penitus, ſed in pulverem ſiccum etiam redigi poſſe appareat.

2.) Examen hoc exemptarum guttularum, et ſubſequentem ſalis refrigerationem et pulveriſationem in aëre libero fieri, magni eſt momenti; quia hac cautione efficitur, ut ſalia maiorem aquae copiam retinere queant.

3.) Convenit quoque, ſalia haec non niſi vehementiore naturali frigore parari: pro vario enim maiori vel minori frigoris gradu variam quoque maiorem vel mi-

minorem aquae cryſtalliſationis copiam ea retinere valent.

4.) Paratum dictis cautionibus et in pulverem redactum ſal, ſi experimentis non ſtatim impenditur, in vaſe probe obturato inque loco frigidiſſimo ſervetur, oportet; in calidiore enim loco depoſitum ob magnam, qua gaudet, copiam aquae cryſtalliſationis, brevi conglomeratur, immo in liquorem plane liqueſcit. Eadem de cauſſa

5.) Salium horum pulveriſatio in loco frigidiſſimo ſemper inſtituatur, neceſſe eſt; impedit enim frigus, quominus ſalia iſta ipſam aëris humiditatem, cuius in loco temperato avidiſſima ſunt, attrahant.

§. 38. Vehemens illud frigus, quod ſalia deliqueſcentia cum nive mixta excitant, cum mutua tam nivis quam ipſorum ſalium ſolutione nitatur; in mentem mihi venit, experiri, quantus frigoris gradus ſit oriturus eiusmodi ſalium commiſtione, quae, nulla adhibita nive vel aqua, dum commiſcentur, ſua ſponte mutuo liqueſcunt. Sequentia hac de re tentamina in conclavi, cuius temperatura 134 graduum erat, ſuſcepi.

EXPER. LIX.

Librae uni alcali cauſtici parem ſalis glauberi recens cryſtalliſati inque pulverem redacti quantitatem partitis vicibus admiſcui; mixtio haec prompte in maſſam pulpoſam ſatis tenuem abiens, frigus 165 graduum producebat.

EXPER. LX.

Calcis ſalitae libra una cum aequali ſalis Glauberi quantitate mixta 158 graduum frigus progenuit.

EX-

EXPER. LXI.

Nitri flammantis unciae 2 cum 4 ſalis Glauberi unciis 158 graduum frigus largiebantur.

EXPER. LXII.

Terrae foliatae tartari unciae 3 cum 4 ſalis Glauberi unciis 169 graduum frigus ſuſcitabant.

Vna igitur duorum ſalium ſiccorum inter ſe mixtione, absque ullo nivis adminiculo, frigus eo congelaſcentis aquae longe maius produci poteſt, terraque foliata tartari primum hac in re locum ſibi vindicat.

§. 30. Maximum quod Alcali cauſtici et calcis ſalitae ope, producere hucusque potui frigus 225 graduum erat. Frigus itaque iſta methodo produxi, quod 15 gradibus maius eſt eo, quo mercurius congelaſcit, quem ſcilicet 32° Reaumurianis, adeoque 210 Des l'Islianis, coagulari novimus. Nullus autem dubito fore ut hoc frigore maius adhuc aliquando excitare mihi liceat. Omnis enim huius rei cardo in eo mihi verti videtur, ut eius generis ſalia liquida in auxilium vocentur, quae non niſi vehementiori illo, quod iam produxi frigore coagulari poſſint utque coagulata ea frigidiſſimi nivis aliorumve ſalium acceſſu ad liqueſcentiam vel ſolutionem iterum diſponantur. Qua de re cum ulteriora tentamina ſuſcipiendi animus mihi ſit; alia in diſſertatione III. Academiae, quae detegere mihi licebit, exponere perhonorificum mihi iudicabo.

§. 40. Faciliori obtutu ut memoratu digniora huius diſſertationis puncta perſpici queant: ea breviter hic repetere, haud alienum duco.

1.) Primaria cauſſa orientis frigoris, dum ſalia ſola aqua ſolvuntur, ex aqua cryſtalliſationis potius, quam ex ipſa ſalium ſolutione mihi repeti debere videtur: Salia enim cryſtalliſationis aqua plane deſtituta, dum ſolvuntur, frigoris loco calorem gignunt (§. 2[illegible].).

2.) Inter acida liquida acidum ſalis in producendo frigore primum ſibi locum vendicat; proximum ipſi ſpiritus nitri fumans: Acidum vero vitriolicum minimum producit frigus (Exper. XXVI — XXXI).

3.) Acidorum liquidorum in producendo frigore pars alia non eſt, niſi quod promptiori nivis vel ſalium ſolutioni adminiculum ſint (§. 14.).

4.) Alcali vegetabile cauſticum et calx ſalita in excitando vehementiori frigore cuncta acida nec non ſalia compoſita longe ſuperant (Exper. XIII et XXXVIII).

5.) Optima miſcendorum proportio ponderibus expreſſa haec eſt, ut duabus nivis tres calcis ſalitae partes continua agitatione admiſceantur (§. 30 et 31.).

6.) Quinque calcis ſalitae librae ad coagulationem 35 librarum mercurii miſtioni refrigeranti infundendi ſufficiunt. (Exper. XXXIV.).

7.) Salia deliqueſcentia producendo frigori aptiora ſunt ſalibus non deliqueſcentibus. (§. 28.).

8.) Salia deliqueſcentia ut, quem poſſunt maximum frigoris gradum excitent, aquae cryſtalliſationis, quantum fieri poteſt, ditiora ſint, oportet (Exper. LIV. et LV.).

9.) Salia illa eo maiori aquae cryſtalliſationis copia imbui poſſunt, quo frigidiore tempore praeparantur. (§. 37. n. 3.).

10.)

10.) Magni momenti id quoque eſt, ſalia haec, non obſtante larga aquae cryſtalliſationis copia, in pulverem ſicciſſimum redigi poſſe; humida enim minus excitant frigus (Exper. LVI — LVII.).

11.) Nix cum ſalibus illis miſcenda recens vel levis et ſicca prorſus eſſe debet (Exper. LVI et LVIII.). Hinc

12.) Tentamina circa frigoris artificialis productionem ſemper frigidiore, nunquam vero regelationis tempore inſtituenda ſunt (§. 35.).

13.) Salia deliqueſcentia prae acidis eam inprimis ob cauſſam maius frigus gignere videntur, quia eo ipſo momento, quo nivem ſolvunt, vice verſa ipſa ſolvuntur (§. 28.).

14.) Alcali cauſticum et calx ſalita omnibus ceteris hucusque uſitatis mediis refrigerantibus eo potiſſimum praeſtant, quod poſt quodlibet experimentum ſine ulla iactura brevi reſtitui novisque experimentis apta reddi queant (§. 22. et 29.).

HYACINTHORVM

SIBIRICORVM A CELEB. LAXMANNO DETECTORVM ANALYSIS CHEMICA.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conventui exhibit. die 3 Novemb. 1796.

§. 1.

Tab. II. Celeb Laxmannus anno 179[illegible] ad oſtium Achtaragdae, rivuli Wilui fluminis influentis, cryſtallos quaſdam memoratu dignas, matrici argillaceae induratae ex gypſeo albidae inſidentes ac paſſim in ea diſperſas, detexit.

§. 2. Cryſtalli hae, quarum varia magnitudo eſt, pulcherrima formae ſuae regularitate ſeſe commendantes priſmata exhibent breviora, quadrilatera, rectangula, marginibus obtuſis praedita et utroque apice in pyramides truncatas abeunt.

§. 3. Cryſtallorum harum maxima, quam videre hodiernum mihi licuit, et quam Cel. Academicus Severginus poſſidet, pondere duarum fere unciarum longitudine [illegible], et latitudine 8 linearum Pariſienſium pollet.

§. 4. Priſmatum figura quadrilatera etiamſi omnibus cryſtallis his communis eſt, multifariam tamen varia earumdem ſpecimina longitudine et latitudine atque ma[illegible]

pyra-

pyramidumque de'runcatione inter ſe differunt; ſunt enim, quorum ea brevitas eſt, ut, reſectis pyramidibus, veros cubos exhiberent; ſunt et alia, quae pyramidibus et marginum deruncatione plane carent et regularia referunt parallelepipeda etc.

§. 5. Maioribus cryſtallis nonnunquam permulti eiusdem generis cryſtalluli, vel granatuli ex flavo virideſcentes, inſerti ſunt.

Color earumdem olivaceo virideſcens eſt, maculis quaſi nigris inſperſis; quo fit ut cryſtalli integrae omnino opacae eſſe videantur, in minora autem fragmenta diſruptae omnino pellucidae ſint. Nonnullis ſuperficies vitri inſtar ſplendens eſt, plurimis vero ſcabra, ſulcis parallelis exarata. Cryſtalli hae depictae occurrunt in Neueſte Nordiſche Beyträge 1 Band 1793. S. 282. Platte III.

§. 6. Cryſtallorum harum ea durities eſt, ut vitrum ſcindant, e chalybe ſcintillas eliciant, nec niſi difficili labore in pulverem palleſcentem redigere ſe ſinant.

Gravitas earumdem ſpecifica ad eam aquae ſeſe habet, ut 3, 39-3, [illegible].

§. 7. *a*) In minora fruſtula diffractae et tubo ferruminatorio expoſitae cryſtalli noſtrae ita ſeſe gerunt, ut per ſe in globulum nigreſcentem fundantur.

b) Cum Borace in pellucidum, initio viridem illum, continuata vero ignitione albeſcentem globulum confluunt.

c) Alcalibus autem fixis et ſali microcoſmico nulla plane vis in eas eſt.

d)

d) Lapis eiusmodi integer 150 granorum, quem Ill. Comes Apollos de Muſſin-Puſchkin pro ſingulari, quo ſcientias chemicas colit, ſtudio e Muſeo ſuo mihi impertitus eſt, mediocri igni fuſorio in tigillo expoſitus brevi tempore in opacam ſcorioſam ex flavo fuſcam maſſam confluxit, in cuius pondere non niſi unius cum dimidio grani iacturam deprehendi, quae quidem expulſis particulis aqueis adſcribenda eſſe videtur. Eandem ponderis iacturam tunc quoque obtinere vidi, cum certam pulveriſati lapidis noſtri copiam diuturniori igni expoſuiſſem.

§. 8. His proprietatibus generatim exploratis, ſequentem intimiorem adgreſſus ſum analyſin.

a) 100 huius lapidis grana in ſubtiliſſimum pulverem redacta et cum quadruplo ſodae cryſtalliſatae fatiſcentis mixta in tigillo porcellaneo per duas horas calcinationi expoſui. Omnibus refrigeratis, materiam in duriſſimam maſſam flaveſcentis coloris colliquatam quidem, ſed e tigillo facillime eximendam deprehendi.

b) Maſſa haec (*a*) in fruſtula diffracta et tribus acidi muriatoſi unciis pedetentim immiſſa facillime ſolvebatur, pulviaſculi quidem flavi non nihil in fundo relinquens, qui tamen pulvis nondum ſolutus, accedente ſolutionis ebullitione, omnino quoque ſolvebatur. ita, ut perfectiſſimam pellucidiſſimamque foſſilis noſtri ſolutionem flavi coloris conſecutus eſſem, in qua ne hilum quidem particularum non ſolutarum reli quaeretur.

c) Solutio haec pellucidiſſima cum refrigereſceret, gelatinae forma ſeſe induebat; quam ob cauſſam eam 4 aquae libris dilutam per bihorium coctioni expoſui, qua abſoluta, eam

eam filtravi. Terrae ſiliceae ſub mucilaginis forma in filtro ſuperſtitis probe edulcoratae, ſiccatae et calcinatae pondus 28 granorum reperi.

d) In filtrata ſolutione noſtra (*c*) cum terrae ſiliceae etiamnum ſuperſtitis non nihil ſuſpicarer, terras omnes, in ea contentas, potaſſini carbonici ſolutione praecipitavi, edulcoratasque atque leniter ſiccatas denuo acido muriatoſo disſolvi. Relicta nunc poſt ſolutionis filtrationem in filtro terra, ſiccata et calcinata, 5 ſiliceae grana exhibuit.

e) Solutioni huic (*d*) filtratae et a terra ſilicea liberatae particulas ferreas ut eriperem, ſufficientem ammoniaci cauſtici quantitatem ipſi adieci, ſeparatumque inde ſedimentum flavum idque magni voluminis probe edulcoravi.

f) Particulas ferreas a terra argillacea cum illis ſimul deturbata ut liberarem, ſedimentum illud madidum adhuc (*e*) duabus cum unciis lixivii cauſtici per aliquot tempus leni ſubieci coctioni, quo facto, particulae ferreae non ſolutae aqua probe edulcoratae, ſiccatae et calcinatae 6 grana ponderabant.

g) Filtrata illa ſolutio alcalina (*f*) acido muriatoſo ſubinde addito ſedimentum album ad fundum depoſuit quae vero terra uberiore dicti acidi acceſſu plane iterum ſolvebatur. Quo facto, ſufficienti potaſſini carbonici quantitate denuo addita, terram iterum praecipitatam et edulcoratam acido ſulphurico diſſolvi. Solutionem hanc parva eaque debita potaſſini quantitate mixtam leni evaporationi, ut cryſtallos formaret, expoſui, ſuetasque in ea aluminis cryſtallos regulares octoëdricas concreſcere, lixivium vero ſuperſtes gelatinae forma ſeſe induere, vidi.

h)

h) His omnibus aqua iterum ſolutis et filtratis, particulae terreae non ſolutae in filtro remanſerunt, quae calcinatae quatuor adhuc ſiliceae grana exhibuerunt.

i) Terram argillaceam e ſolutione illa (*h*) Potaſſini ope ſeparavi, eamque edulcoratam, ut particulis alcalinis eidem adhaerentibus penitus liberarem, cum ſufficiente aceti deſtillati copia per biduum coctioni eam expoſui, postque ammoniaci cauſtici ope terram denuo praecipitavi; edulcorandoque eam, ſiccando et calcinando [illegible] argillae puriſſimae grana nactus ſum.

k) His omnibus peractis de eo agebatur, ut ſolutionem illam (*e*), poſt particularum terrearum et terrae aluminis ſeparationem ſuperſtitem, examinarem. Solutio haec aqua ſatis diluta, guttis aliquot acidi ſulphurici additis, pelluciditatis ſuae nullam paſſa iacturam eſt, id quod, terrae ponderoſae et ſtrontianae in ea nihil ineſſe, mihi indicio fuit. Hoc cognito, cunctas in ea contentas particulas terreas, quas non niſi calcem vel magneſiam eſſe poſſe ſuſpicari licuit, potaſſini carbonici ope praecipitavi, edulcorataque ſufficiente acidi ſulphurici quantitate, accedente digeſtione, ſaturavi, calcemque inde ortam ſulphuricam debita ſpiritus vini copia edulcoravi. Liquor hic ſpirituoſus filtratus et evaporationi expoſitus parvam adhuc ſelenitis copiam depoſuit; addita deinde lixivio ſuperſtiti ſoda carbonica, magneſiae ne veſtigium quidem detegere mihi licuit.

l) Calcem illam ſulphuricam debita ſodae carbonicae quantitate per coctionem deſtruxi, obtentaque hoc modo calx carbonica edulcorata, ſiccata et calcinata 39 calcis purae grana largiebatur.

Ex

Ex omni igitur et plenaria analyſi hac id concludere licet, Hyacinthos in centenis partibus continere

calcis purae (*l.*)	—		39.
ſiliceae	*c.*	28	
	d.	5	37.
	h.	4	
Argillae	*i*	—	12.
Ferrici	*f*	—	6.
Aquae	(§. 7. *d.*)		1.
			95.
		Jactura	5.

§. 9. Largam illam, quam cryſtalli hae noſtrae complectuntur terrarum abſorbentium copiam cum intuerer: operae pretium mihi viſum eſt, experiri, poſſintne partes earundem conſtituentes, absque praevia cum alcali calcinatione, immediate, via nempe humida, a ſe invicem divelli.

a) Hunc itaque in finem 100 lapidis huius in ſubtiliſſimum pulverem redacti grana duabus cum acidi muriatoſi unciis retortae, arenae balneo imponendae, immiſi, deſtillationemque ad reſidui ſiccitatem usque inſtitui.

Materia in retorta ſuperſtes ſicca, ac valde indurata, cum eidem tranſtillatum liquorem acidum affunderem, facile et inſigni cum calore ſolvebatur. Omnibus, praeter terram ſiliceam, ſolutis, repetita vice deſtillationem ad ſiccitatem usque adgreſſus ſum. Quo facto, materiam ſiccam in retorta haerentem ſufficienti aquae copia coctionis adminiculo diſſolvi ac filtravi. Relicta in filtro terra ſilicea albiſſima edulcorata, ſiccata et calcinata 35 grana ponderabat.

b) E ſolutione filtrata (*a*) ammoniaci cauſtici adminiculo argillam et particulas ferreas praecipitavi. Hisque lixivii cauſtici ope a ſe invicem ſegregatis, ferrici 6, argillaeque 13 grana conſecutus ſum.

c) Relicta in ſolutione (*b*), poſt argillae et ferrici praecipitationem, calx, ammoniaci carbonici ope ſegregata, edulcorata et ſiccata 62 calcis carbonicae grana exhibuit, quae calcinata 41 calcis purae grana largiebantur. Haec igitur foſſilis noſtri variata Analyſis partes eius conſtituentes ea ſeſe ratione habere oſtendit, ut in centenis eiusdem partibus reperiantur

Calcis	—	41.
Siliceae	—	35.
Argillae	—	13.
ferrici	—	6.
Aquae	—	1.
		96.
Jactura	—	4.

§. 10. Monendum mihi eſt, ſecundam hanc partium conſtituentium rationem priore (§. 8.) accuratiorem reputandam eſſe, quandoquidem priori illo examine foſſils noſtri naturam iam iam edoctus, in ſecunda viam, partes conſtituentes a ſe invicem divellendi, multo ſimpliciorem inire potui.

§. 11. Decente itaque duplici hac noſtra Analyſi cryſtalli hae, inſigni duritie ſua, qua e chalybe ſcintillas eliciunt, non obſtante, ad ordinem vel genus quorundam lapidum calcareorum referendae ſunt: cui quidem ſententiae id quoque ſavet, quod absque praecedente cum alcali praeparatione immediate via humida decomponi poſſunt.

EX-

EXPOSITION SYSTEMATIQUE
DES PIERRES DE ROCHE COMPOSÉES QUI SE TROUVENT DANS LES DIFFERENTES PARTIES DE LA RUSSIE.

Par
BASIL. SEWERGIN.

Préſenté à l'Académie le 12 Mai 1796.

La plus grande utilité qui réſulte de la connaiſſance des pierres de roche compoſées pour l'avantage de l'homme, étant celle de pouvoir un jour fixer toutes les circonſtances particulières ſous les quelles elles favoriſent le plus la formation des mines métalliques dans le ſein des montagnes, dont elles forment la maſſe principale, il eſt juſte de les conſidérer ſous tous les points de vue qui ſe préſentent à cet égard. Plus on varie les recherches & plus on parvient à approfondir la matière qui en eſt l'objet. Le géologue les contemple tant qu'elles ſervent à former les montagnes il conſidère la maſſe totale ſuivant ſa poſition, ſa ſtructure, ſes variations, les révolutions qu'elle a ſubi par les forces générales de la Nature & tous les phénomènes, qui ſe préſentent en grand, pour indiquer enfin la théorie de la formation des montagnes la plus utile & la plus probable. L'oryctognoſte dirige ſes recherches à l'aide de la chymie ſur la nature & la quantité de leurs parties conſtituantes, ſur leur forme, ſur la ma-

manière dont elles ſont mélangées enſemble; il les compare & les claſſifie. L'un aide l'autre. Et enfin les éfforts de l'un & de l'autre amènent au même but. à la connaiſſance de l'objet de leur occupation. Nous avons en partie des ouvrages d'un mérite décidé ſur cette matière tant qu'elle a été l'objet des géologues. Mais il me ſemble que pour plus de progrès dans l'étude en question, il falloit oublier pour un moment ces recherches géologiques, qui d'ailleurs doivent être faites en place même, pour fixer toute ſon attention ſur un objet tout auſſi important, qu'eſt leur mélange intérieur. Car il eſt certain 1°., que non ſeulement les pierres de roches compoſées varient par la qualité & la quantité de leurs parties conſtituantes; mais auſſi 2°., par la manière dont elles ſont mélangées enſemble; 3°., que les différents mélanges y doivent réellement produire des différentes propriétés tant à l'égard de leur propre maſſe, qu'à l'égard des mines métalliques qu'elles peuvent contenir, & qu'alors 4°., ces recherches nous conduiſent à connoitre ceux des mélanges qui favoriſent le plus la formation des métaux, c'eſt-à dire ceux d'entr'eux qui nous donnent le plus d'éſpérance dans l'exploitation des mines; 5°., elles nous indiqueront enfin la trace qu'il faut ſuivre en fixant leurs dénominations & nous ôteront cette confuſion qui n'a que très ſouvent réſulté de la ſeule faute qu'on a commiſe dans les dénominations minéralogiques; car ce n'eſt pas tout granit, ce n'eſt pas tout gneuſs qu'on nous a donné ſous ce nom &c. comme j'ai démontré ailleurs: & ſi de nos jours elles deviennent plus conſtantes & plus certaines, ce n'eſt que par l'étude de leur mélange intérieur. 6°. Mais les recherches du géologue en profiteront auſſi, car guidé par les no-

notions claires, que l'oryctognoſte lui pourra donner ſur la nature de la roche, ſon jugement ſera d'autant plus certain ſur ſa formation probable, ſur ſon âge relatif &c. 7°. Ces paſſages remarquables d'une roche dans l'autre, & les changemens qu'elles ſubiſſent par la décompoſition, ce ſont encore des phênomènes, dont la cauſe principale doit être cherchée dans leur mélange intérieur. Et toutes ces recherches enfin 8°., nous fourniront les moyens les plus ſùrs pour la claſſification la plus conforme à la Nature. Mais les Minéralogues n'ont pas perdu de vue tous ces objets à l'égard des pierres de roches compoſées des pays étrangers & nous en ont laiſſé des details ſuffiſants; de ſemblables details nous manquent ſur celles de la Ruſſie; car ce que nous en avons dejà, ne ſont que des fragmens, quoique des fragmens précieux ſur quelques unes des contrées de la Ruſſie. Il eſt vrai qu'une telle expoſition générale ne peut être de longtems portée à la perfection requiſe dans un Empire auſſi vaſte que celui de la Ruſſie, où l'on voit traverſer onze *) chaines de montagnes principales ſans compter les branches énormes qui ſe répandent dans

*) Les montagnes du Nord entre la mer Baltique & la mer blanche. 2. Celles du Waldai. 3. Celles de la Tauride. 4. Le Caucaſe; 5. les Ourales, 6. les monts Altaiques avec leurs branches principales, 7. celles de Sayane; 8. celles du Baikal; 9. celles de Nertſcinsk; 10. celles d'Ochotzk & 11. celles de Kamtſchatka.. On a trouvé par des obſervations d'un Bouguer, Ferber; &c que tant que des montagnes ſe rapprochent pour former une chaine particulière, on trouve dans leur centre des roches granitiques &c plus loin des roches ſchiſteuſes, encore plus loin des roches calcaires &c, qui ſont enfin par gradation applanir les montagnes. La notion minéralogique d'une chaine de montagne ſeroit donc celle, où elle préſente tous ces paſſages de roches de l'une & de l'autre part. Et alors ſuivant cette notion les montagnes du Nord, celles de Waldai, celles de la Tauride, celle de Sayane, celles d'Ochotzk & de Kamtſchatka ne ſeroient que des branches énormes de quelques autres chaines principales.

dans les différentes parties de l'Empire. On n'y peut faire qu'un ſimple eſſai tel que celui que j'ai l'honneur de préſenter dans cette diſſertation à l'aide d'une quantité aſſez conſiderable de ces éſpéces de pierre que j'ai reçues de différentes parties de la Ruſſie. Ainſi après avoir donné quelques notions générales ſur cet objet dans ma premiere diſſertation ſur les pierres de roche compoſées, & après avoir préſenté mes obſervations ſur les pierres de roche compoſées roulées des environs du canal de Ladoga, dans ma ſeconde, je paſſe à l'éxamen des pierres de roche compoſées découvertes dans les différentes parties de la Ruſſie. Mais comme l'éxamen que je me propoſe de faire ne regarde que l'oryctognoſie, je ſuivrai la même méthode, que j'ai employée dans ma ſeconde diſſertation, ſans m'occuper pour cette fois ni de leur formation probable, ni de leur âge rélatif &c. Je les accompagnerai des obſervations que j'ai pu faire la deſſus & je tâcherai comme auparavant d'établir un parallele avec celles des pays étrangers, pour voir l'identité ou la différence des unes & des autres afin de pouvoir indiquer par ce moyen celles d'entr'elles & les circonſtances ſous les quelles elles méritent de préférence d'être examinées en place même, tant pour l'utilité pratique que pour la Théorie de la terre. Enfin je nomme les pierres de roches compoſées calcaires, argilleuſes &c. ſuivant que l'une ou l'autre partie conſtituante y prédomine, & je nomme 1.) *ſimples* celles qui conſiſtent de deux parties conſtituantes 2.) celles de trois, *compoſées*, & celles de quatre &c. *indéterminées*.

Article I. Pierres de roche compoſées *calcaires*.

A. *ſimples*.

1.) Marbre & Spath calcaire.

a)

a) Marbre blanc griſâtre & ſpath calcaire blanc presque transparent de la Tchouſſovaja, ſans aucun indice de mines métalliques; une variété à peu près ſemblable vient de Wilmanſtrand & de Rouſcale, & une autre mélangée de ſpath calcaire noirâtre de la Tchouſſovaja. *b*) Marbre brun noirâtre compacte avec des taches rondes ſpathiques de couleur blanche ou griſâtre, reſſemblant fort par la maniére du mélange au Porphyre de Werchotourskoy Oural en Cathérinebourg.

2.) Marbre & Quartz, de la minière Alexandrowskoy en Olonetz & marbre intimément mélé de Quartz ſabloneux du fleuve Schaitanka.

3.) Marbre & talc, (gneuſſum micans Gmel.) le premier rouge à ſtries blanches, l'autre argentin en couches très minces de Cathérinebourg.

4.) Marbre & Schoerl, le premier gris & compacte, l'autre noir en aiguilles de Rouſcala en Olonetz.

5.) Marbre & Strahlſtein des *Allemands*; le marbre pour la plus part blanchâtre ou gris, & celui-ci de couleur verte jaunâtre fibreux ou diſpoſé en étoiles; on en apporte une grande quantité de Rouſcala pour le bâtiment de l'égliſe de St. Iſaac à St. Pétersbourg; mais qui à cauſe de ce mélange n'eſt pas ſuſceptible de ce poli vif, qui fait la beauté des autres variétés de marbres polis du même endroit.

6.) Spath fluor & Talc, le premier de couleur violette, l'autre argentin. On en à ſouvent des morceaux

ceaux parmi les pierres-roulées de la réſidence ſans connoître leur vrai lieu natal.

7.) Spath calcaire & asbeſt, de la minière Aléxandrowskoy en Olonetz.

8.) Spath calcaire & Baikalite. C'eſt la roche remarquable qui ſe trouve dans les environs du lac Baical & qui eſt entremêlée quelques fois de mica criſtalliſé en prismes applatis poi tus au bout par deux faces & de fluor verd, dont j'ai donné la deſcription dans une des diſſertations que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'académie.

Des combinaiſons ſemblables calcaires & principalement celles de la pierre calcaire avec du Quartz, du Mica, des Grenats, de l'Asbeſt & de la Hornblende portent des gites de mines métalliques, au Bannat près d'Annaberg en Autriche, dans la Carinthie & en Tirol; j'ai vu des échantillons de la combinaiſon du marbre & du quartz avec de la pyrite cuivreuſe, du verd de montagne & de la mine de cuivre griſe de la minière Alexandrowskoy en Olonetz & une autre de ſpath calcaire jaunâtre & d'asbeſt verd avec de la pyrite cuivreuſe du même endroit.

Pour les roches calcaires de trois ou quatres parties conſtituantes, je n'en connois presque aucune outre celles que j'ai décrites dans ma ſeconde diſſertation ſur les pierres de roche compoſées; excepté la combinaiſon de la pierre calcaire blanche ſablonneuſe avec du Mica blanc ou jaune qui ſe trouve entre Schalatcha & Saſano dans le Caucaſe. (Güldenſtädt Reiſe, p. 444.)

Enſin

Enfin on cite des combinaiſons de Gypſe & de terre calcaire, de Gypſe & d'argille, de Gypſe & de Spath péſant; mais à peine méritent-t-elles d'être comptées au rang des pierres de roche compoſées.

Art II. Pierres de roche compoſées *talqueuſes*.

A. *ſimples.*

1.) Serpentine & Feldſpath: (Porphyrius granitone Gmel.) *Porphyrite* de quelques auteurs; on en trouve deux varietés une avec de la ſerpentine de couleur verte noirâtre & une autre tirant ſur la pierre de corne, toutes les deux de Pyſchma (Herrm. Catal. No. 36 & 37.). On en trouve auſſi auprés de Tchertaſch; (No. 71.) on allègue une varieté à peu près ſemblable d'Imprunetto en Florence ſous le nom de Granitone (Haidingers Enl. zur ſyſtem. Eintheil. der Gebirgsarten p. 52.).

2.) Serpentine & Grenats (Porphyrius granatinus Gmel.) d'Olonetz & une autre varieté avec de la ſerpentine talcqueuſe qu'on trouve auprès du village Gornoſchitskoy en Cathérinebourg. On cite une combinaiſon ſemblable qui ſe trouve auprès de Zöplitz, où l'on en exploite pour différens uſages depuis plus de deux ſiècles. Quelques variétés ruſſes le mériteroient auſſi à l'éxemple des pays étrangers.

3.) Serpentine & Hornblende, la premiere brunâire, l'autre blanche de Pyſchma. Elle eſt nommée *Serpentinwake* dans le catalogue de Mr. l'academ. Herrm. au No. 67.

4.) Serpentine & Talc. (Porphyrius b, micaceus Gmel.). Cette combinaiſon eſt encore nommée *Serpentinrake* dans le catalogue cité au No. 65. du meme endroit. J'en ai devant moi une autre variété, avec de la ſerpentine gréneluc, friable, de couleur verte pâle & parſemée de petites pallettes de talc des environs du village Koſſobrolskoy dans le diſtrict de Catherinebourg. La combinaiſon de la ſerpentine & du Mica de Troitzkoi auprès d'Oui (Brünnichs Min. p. 121.) & celle de la ſerpentine verte brunâtre avec du mica argentin des environs de la fonderie Newiansky lui ſont analogues. Enfin la *pierre ollaire* de Belojarsk n'eſt ſuivant Mr. l'academ. Hermann (cat. No. 72.) qu'une combinaiſon de la Serpentine avec du talc.

5.) Serpentine & asbeſt. (Porphyrius asbeſtinus Gmel.). La ſerpentine verdâtre & l'asbeſt ligneux entremélé de taches blanches de Pyſchma (Herm. Cat. No. 65 & 69.) On cite une variété ſemblable de Zöplitz & de Topſchau dans la Haute Hongrie, & on a tout lieu de croire que l'asbeſt n'y eſt ſouvent qu'un passage de la ſerpentine à l'état fibreux. (Comparez Heidingers Preisſchrift p. 53).

6.) Serpentine & des criſtaux de fer octaèdres (Porphyrius ferrifer. Gmel.) de Pyſchma.

7.) Stéatite & Mica. (Gneoſſum ſteatiticum Gmel.) *Schneidelſtein* des auteurs Allemands, on en trouve à Cathérinebourg. Cette roche contient pour la plûpart des criſtaux de fer octaèdres réticulaires en Suede, en Tyrol, dans la Carynthie & la Hongrie.

8.)

8.) Talc & grenats (Granites granatifer Gmel.) Cette roche eſt très fréquente à Cathérinebourg & en Clonetz. Je poſſéde un grand criſtal d'un grenat iſolé, de ce dernier endroit, tout envellopé en manière d'écorce de talc gris noirâtre.

9.) Talc & Schoerl (Granites Zillenſis? vel greuſſum glandulofum Gmel.) deux variétés.

a.) Talc blanc argentin & compacte avec de longues aiguilles presque rondes de Schoerl noir ou verd diſpoſées en différens ſens, de la carrière Alexandrowskoy auprés du village Belojarskaya dans le diſtrict de Cathérinebourg.

b.) Talc griſâtre luiſant feuilleté entremêlé de Mica noirâtre & de Schoerl en prismes tetraèdres longs, allargis & applatis de couleur verd obſcur & quelques fois courbés ſelon les courbures des ondes du Talc, au delà de 15 verſtes de la minière Eliſabètskoy en Cathérinebourg.

On cite la même combinaiſon qui conſtitue une veine dans la Pierre ollaire de Belojarsk, (Herrm. Cat. No. 76.).

B. *Compoſées.*

10.) Serpentine, Schoerl & Talc. La Serpentine verte, le Schoerl noir & le talc blanc. Au delà de 3 werſtes de la carrière de marbre de Gornoſchite.

11.) Serpentine, ſchoerl & ſpath calcaire, la ſerpentine griſe verdâtre quelque fois trouée, le Schoerl blanc en aiguilles très fines presque ſoyeuſes, très

 luiſant,

luiſant, & paſſant ſouvent dans l'amyanthe, le ſpath calcaire en tache fines jaunâtres ochreuſes du mont Conſtantinowa auprés du village Gouſſewa 30 werſt de Catherinebourg.

C.) *Indeterminées.*

1.) Serpentine, Feldſpath blanc, Hornblende rougeatre, avec des veines d'asbeſt, une varieté remarquable des environs de Gornoſchite, citée par Mr. l'Acad. Hermann au caſ. No. 16.

Les étrangers poſſédent encore quelques autres combinaiſons du principe talcqueux; mais je n'en connois aucune oûtre celles que j'ai décrites en Ruſſie. Au reſte il n'y a que peu d'exemples de mines métalliques dans les roches au principe talcqueux.

Art. III. Pierres de roche compoſées argilleuſes.

A) *Simples.*

1.) Hornblende & Talc. (Gneuſſum lucidum? Gmelin.) La premiere griſe jaunâtre ſpathique, dans le diſtrict Alapajewſkoy 5 werſtes du village Koultajewa. On trouve la meme combinaiſon en Suede.

2.) Hornblende & Schoerl verd diſperſé en petits faiſceaux du méme endroit, (Gneuſſum lamelloſum Gmel.).

3.) Hornblende & Feldſpath. (Gneuſſum ſquamoſum Gmel.) ſur le chemin d'Oudinſk (Voyage de Mr. Renow p. [illegible]). Hornblende noir & Feldſpath blanc des environs de la fonderie de fer Baranſchinſkoy dans la chaine de montagnes nommée Werchotourſkoy Oural.

4.)

4.) Hornblende & Quartz (Gneuſſum corneum Gmel.) La premiere noire feuilletée, l'autre à peine viſible; une roche qui ſe trouve entre des montagnes de Granit de Gneuſs & de Porphyre, dans les environs de la fonderie Schaitanskoy (Herrm. cat. No. 3.). On nomme en general les combinaiſons de pierres, où la Hornblende prédomine Grünſtein. (Saxum ferreum Wall.) Je les diſtingue de la manière marquée pour éviter toute confuſion. On remarque que les combinaiſons de la Hornblende ne ſont guères favorables à la production des mines metalliques à l'exception du fer.

5.) Mica & Quartz (Gneuſſum micaceum Gmel.). Telle eſt une grande partie de nos Saxa fornacum (Geſtellſtein) de Cathérinebourg. On la trouve encore ſur le fleuve Rion dans le Caucaſe (Güld. Reiſe p. 452.). Les mines d'etain ſe trouvent dans une roche ſemblable à Gieren en Saxe & dans beaucoup d'autres endroits.

6.) Mica & Grenats (Gneuſſum glandulosum Gmel.). Au delà de 5 werſt. de Goumeſchkie dans le diſtrict de Cathérinebourg.

7.) Argille griſe endurcie & Mica de Pyſchma, où l'on trouve auſſi une combinaiſon de l'argille & de Talc (Herrm. Cat. No. 55 & 56.) Porphyrius tranſilvanicus Gmelin.

8.) Argille endurcie & Feldſpath (Porphyrius Granitoides Gmel.). Dans la contrée Mounoſerſkoy 2 werſtes du village Pialoſero & 40 de Petroſawodſk.

9.)

9.) Argille & Calcedoine (Amigdalites Calcedonius Gmel.) l'argille eſt verte & endurcie à face tenelſe avec des glandes de calcédoine brun ou brunâtre des environs du fleuve Onack en Nertſchinſk, découverte par feu Mr. le conſeiller de Cour Laxmann.

10.) Argille griſe endurcie compacte & Schoerl noir priſmatique applati & diſperſé ſans aucun ordre d'Oanalaſchka en Tauride (Porphyrius bacillaris? Gmelin).

11.) Argille griſe endurcie compacte & reſſemblante à la précédente (toutes les deux une éſpéce de Tuf qui a l'air volcanique) entremélée de grenats verds polyèdres du fleuve Lena (Porphyrius Spadiceus? Gmelin.).

12.) Schiſte argilleux & ſpath calcaire (Porphyrius ſpathoſus? Gmel.) Cette combinaiſon ſe trouve entre Newianſk & Werchnetagilſk (Herm. Cat. No. 61.). Mr. de Renowantz la cite ſous le nom *d'Ophite* du fleuve Schemanaicha. Une variété à peu prés ſemblable eſt encore citée par Mr. l'Acad. Herman ſous le nom de *Porphyrite* qui vient de Newianſk. Cat. No. 36.

13.) Petroſilex & Feldſpath (Porphyrius rothus Gmelin) le premier gris verdâtre, l'autre criſtalliſé de Poleſma (Herm. Cat. No. 44.). Une combinaiſon ſemblable fait des Gangues conſidérables à Joachimsthal en Bohéme. Voyez Heidinger Preiſſchrift. p. 52.

14.) Petroſilex & Serpentine, le premier eſt gris bleuâtre, l'autre verte brunâtre & diſperſée en taches de l'Argoun en Nertſchinſk.

15.) Petroſilex & Grenats de Colywan.

16.)

16.) Petroſilex & Spath péſant (Porphyrius ſchiſtoſus Gmel.) Le premier gris ſchiſteux, l'autre blanc en paillettes mélées intimément avec le ſchiſte corné. C'eſt la matrice ordinaire de l'or & de l'argent natif, ainſi que de la Luna cornua du mont Smejewſkoy en Colywan.

17.) Pierre à poix & Cacholong de la minière Nicolajewſkoy en Colywan. Renow.

18.) Jaſpe & Quartz; (Porphyrius criſtallinus Gmel.) le premier de couleur de roſe & dans une autre variété rouge foncé, l'autre blanc en forme de veines de la fortereſſe Koëlſkoy dans le Gouvernement Ouſimſkoy.

19.) Jaſpe & Feldſpath. (Porphyrius genuinus Gmel.)

a.) Jaſpe verd & Feldſpath blanc des environs du village Kounara & ſur les champs de Bournaſchewſkoy aux environs du village Ajalſkaya & dans differentes autres parties de l'Altai. Il y en a encore auprés du village Oſſinowka dans le diſtrict Alapajewſkoy; dans le Caucaſe &c. Güldenſt. Reiſ. p. 45 .

b.) Jaſpe gris & Feldſpath de couleur de peau de Taloſka. (Renow.) Jaſpe gris noirâtre & Feldſpath rouge presque en aiguilles parmi les pierres-roulées des environs de la Réſidence.

c.) à Jaſpe noir au pied de la chaine Oubaaleiſkoy & Colywanſkoy; à jaspe brun & Feldſpath blanc du village Sc[illegible]jewa dans le diſtrict Alapajewſkoy.

d.) à Jaſpe rouge.

20.) Jaſpe & Schoerl, (Porphyrius ſcorlinus Gmel.) le premier de couleur verd obſcure à face terreuſe, l'autre

noire

n. ne en priſmes applatis ſur le chemin du village Kiprina vers le village Joſcliakow, dans le diſtriċt Alapaewſkoy.

21.) Trapp & Hornblende (Porphyrius acetoſus Gmelin) du fleuve Tſcheremſchank, qui tombe dans la Tſchousſowaia; une varieté de Baltimite ſelon Mr. l'Academicien Herrman (cat. No. 52.). La roche que Mr. le Conſeiller d'Etat Pallas a apporté nouvellement de la Tauride n'en diffère qu'en peu de choſe. Elle conſiſte de trapp brun melé de criſtaux noir prismatiques applatis de Hornblende, & elle ſe trouve ſur la montagne Koſteel entre Alouſchka & Lambata. On a tenu cette roche pour une produċtion volcanique, & alors ce ſeroit le Porphyrius vulcanicus de Gmelin.

22.) Trapp & Quartz, (Porphyrius Angliae Gmel.) de la miniére nommée l'Aigle Ruſſe à Petroſawodſk.

23.) Trapp & Feldſpath, (Porphyrius antiquus Gmelin.) des environs de Mourſinſk. *Porphyre* ſuivant Mr. l'Acad. Herrman. Cat. No. 52. Et une autre varieté de la minière Radoſtnoi Kamen à Petroſawodſk.

24.) Trapp & Spath calcaire (Porphyrius ſpathoſus Gm.) de la minière l'Aigle Ruſſe à Petroſawodſk; une autre varieté à trapp rouge de la minière Pialoſerſkoy auprès du village Pialoſero 67. w. de Petroſawodſk, & encore une à Trapp gris obſcure de la minière Alexandrowſkoy à Petroſawodſk. Telle eſt auſſi la roche en Bohème.

25.) Baſalte & Schoerl (Porphyrius reticularis) à Balaclave entre Forus & Mouchalatka dans la Tauride.

Trapp

Trapp & Zéolithe vermiculaire } de Nertſchinſk.
Trapp & Spath calcaire étoileux }

B.) *Compoſées.*

26.) Hornblende, Quartz & Feldſpath: (Gneuſſum Syeniticum Gmel.) Sienit, Grünſtein, ou Hornblendeſels du fleuve Neiwa auprés du village Taraſſowa (Herrm. Catal. No. 27.) des environs de la fonderie Polewſkoy (No. 28.) des environs de Cathérinebourg & de Colywan.

27.) Argille endurcie rougeâtre avec des grains de Quartz enfumé & de Feldſpath, une ſorte de Saxum metalliferum Bornii des environs de la riviére Solotowka en Colywan. (Renov.).

28.) Argille endurcie. Schoerl noir & Feldſpath à peine viſible; une varieté de Baltinite ſelon Mr. l'Acad. Herrman, Cat. No. 51.

29.) Trapp, Hornblende & Feldſpath, des environs du lac Baltyn 15: w. de Cathérinebourg (Herrm. Cat. No. 52 & 53.) Le trapp y eſt de couleur gris-clair, la Hornblende ſpathique & quelque fois criſtalliſée à 6 côtés pointus, aux bouts par trois faces. Elle ne conſtitue aucune gangue; c'eſt la Baltinite proprement dite de Mr. l'Acad. Herrman.

30.) Trapp Talc & Mica, le talc argentin. & le mica noir de Pyſchma; une varieté de *Gneiſs* ſelon Mr. l'acad. Herrman Cat No. 15.

31.) Jaſpe, Feldſpath & Schoerl de Procowka ſur la riviére Camyſchenka, une ſorte de Porphyre ſuivant Mr. l'acad. Herrman, Cat. No. 55.

32.) Jaſpe, Feldſpath & Quartz, de Nertſchinſk; Porphyrite de Mr. Heidinger. Cette varieté ſert à former quelque fois des veines métalliques en Saxe & en Bohème.

33.) Petroſilex, Feldſpath & Quartz, au delà de 7 werſt. de Bolſcheretzkoy en Colywane (Ren. p. 46.) & ſur le fleuve Rion dans le Caucaſe. (Güldenſt. Reiſe p. 452.).

34.) Petroſilex, Feldſpath & Hornblende du mont Smeyewſkoy en Colywane; le Petroſilex de couleur griſe ſchiſteux, le Feldſpath blanc en petites paillettes, la Hornblende brune griſâtre. On y trouve auſſi quelque fois des paillettes de ſpath péſant occuper la place du feldſpath, comme je l'ai vû dans d'autres échantillons du même endroit. On trouve la même varieté avec de la Hornblende verte entre Korbolicha & la petite Belija & ſur la Revennaja Sopka (Ren. p. 4-4.). C'eſt la roche qui accompagne ordinairement tant en Ruſſie que dans les pays étrangers des mines métalliques trés riches.

35.) Schiſte micacé & grenats de fer, au delàs de cinq verſtes de Gornoſchite dans le diſtriſt de Catherinebourg.

36.) Schiſte argilleux, Feldſpath & Mica.

37.) Lave, Schoerl & Mica (Piperino) de la Tauride.

C.) *Indéterminées.*

38.) Schiſte micacé, talc & grenats, (Gneuſſum micaceum) aſſiſe ſur un *baſe* granitique entre le Forpoſte Kraſnoyarſkoy & Séwakina. Ren. p. 9.

39.) Schiſte micacé, quartz & grenats d'Olonetz.

40.) Argille endurcie, Feldſpath, Quartz & Mica des environs de Kamenſk; *Porphyrite* ſelon Mr. l'academ. Herrm. Cat. No. 35.

41.) Mica, Grenats, Quartz & Aiguemarine, de Colywane. Ren. p. 6.

Art. IV. Pierres de roche compoſées *ſiliceuſes.*

A.) *Simples.*

1.) Quartz & Mica, (Gneuſſum fornacum. Gmel.)

a) Quartz blanc jaunâtre & mica noir des environs de Mourſinſk, *Geſtellſtein* du Cat. de Mr. Herrm. No. 22.

b.) Quartz jaune à grains gros, avec trés-peu de mica de Nertſchinſk.

c.) Quartz trés compacte gris & mica en feuillets trés minces de la miniére Wojetzkoy à Petroſawodſk. Cette roche porte des mines d'or en Tirole des mines d'argent à Kongsberg en Norvege, de cuivre & de plomb à Jemteland; d'etain à Gieren en Saxe &c.

2.) Quartz & Schoerl, (Granites mélaleucos? Gmel.).

a.) Quartz & Schoerl noir du village Kiprina dans le diſtrict Alapajewſkoy & de Pyſchma.

b.) Quartz & Schoerl verd d'Olonetz.

c.) Quartz laiteux & Schoerl verd en aiguilles de Pyſchma Cat. No. 40.

d.) *Pierre-à-cheveux.* (Granites capillaris, le quartz pour la pluspart transparent & le Schoerl capillaire rouge diſpoſé en différens ſens de Cathérinebourg.

3.) Quartz & Asbert,

a.) Quartz mèlé par ci par la de quelques ſils d'asbeſt; c'eſt la gangue de la miniére Kalitſchiéoſtrowſkoy dans le diſtrict Povenetzkoy 225 w. de Petroſawodſk; & une autre variété de la miniére Pialoſerſkoy 23 w. du village Pjalooſero & 67 w. de Petroſawodſk.

b) Quartz brun intimément mélangé d'une copieuſe quantité d'amïanthe blanc capillaire, de ſorte que le moindre morceaux qu'on en dégage en contient, du village Schaitanka dans le diſtrict Alapajewſkoy.

4.) Quartz & Kyanite au delas de 30 werſtes de Catherinebourg. La Kyanite eſt diſperſée en priſmes applatis longs & en différens ſens dans du quartz blanc & ſec.

5.) Quartz & Grenats (Granites Bavaricus Gmel.) de la miniére Bereſowſkoy en Catherinebourg.

6.) Quartz & Talc (Granites talciſer Gmelin.)

a.) Quartz grénû, ferrugineux avec un air entiérement ſablonneux, intimément mélé de talc en particules trés fines, trés ſouvent terreux & décompoſé en Steinmark, le tout de couleur plus ou moins jaune ou jaune rougeatre, compacte, ſans avoir l'air ſchiſteux & entremelé de plus ou moins grands criſtaux cubiques bruns de pyrite ferrugineux trés ſouvent auniére des miniéres Bereſoſſkoy en Catherinebourg. Cette

Cette roche eſt nommée Gneuſs par quelques auteurs minéralogiſtes. Mais ſi le vrai gneuſs conſiſte de quartz, de mica & d'argiles demi-endurcie comme le dit Ferbèr, ou de quartz, mica & de feldſpath, comme l'aſſure Charpentier, & s'il eſt ſchiſteux, comme on le reconnoit aſſez généralement, alors cette roche de Bereſoſſskoy peut être à peine nommée telle, vû qu'elle en diffère par ſes propriétés relatives. Elle n'a de commun avec le Gneuſſum des étrangers, que l'abondance des mines métalliques qu'elle favoriſe.

b.) Quartz compacte intimément mélé de talc gris, & le tout enſemble d'un air ſchiſteux, d'Olonetz.

7.) Quartz & Topaze (Gneuſſum Topazinum Gmelin). Quartz ferrugireux gras, jaunâtre, avec des criſtaux de véritable Topaze (Criſtal pondéreux des Ruſſes) jaunes, quadrangulaires ſtriés le long des priſmes, & pointus par un bout de Catherinebourg.

8.) Quartz & Feldſpath, (Granites ſimplex? Gmel.)

a.) mélés enſemble ſans aucun ordre, des environs de la fortereſſe Grobowſkaya ſur la riviére Uetka; *Geſtellſtein* de Mr. l'acad. Herrm. Cat. No. 25.

b.) Quartz brun & Feldſpath blanc des environs du lac Tchebarkoul dans le diſtrict Troitzkoy.

c.) à Feldſpath jaune au delà de 30 w. du village Schaitanka dans le diſtrict Alapajewſkoy.

Roche primitive qu'on l'on trouve auſſi en Dalékarlie & en Finnlande.

9.)

9.) Fedſpath & Quartz (Granites ſimples Gm.)

a) Feldſpath blanc jaunâtre & Quartz des environs de Werchnetagilsk Herm. Cat. No. 29.

b) Feldſpath rouge & Quartz blanc de l'Isle Medweſchey avec du cuivre natif.

c) Feldſpath de couleur blanche ou jaunâtre, quelque fois presque argentin avec du Qartz brun, paſſant par le feldſpath en forme de tubes d'orgue parallèles, ou diſpoſé de manière à donner une reſſemblance de lettres hébraiques. quelque fois ſe terminant par les bouts en criſtaux piramidaux ou tabulaires; *Pierre hébraique.*

d) Feldſpath de couleur rouge brun, melé de Quartz presque noir & paſſant ou en forme de tubes d'orgue parallèles ou de manière à former des reſſemblances de lettres hébraiques. comme dans la variété précédente. On aſſure que cette roche eſt la matrice du ſchoerl rouge de Sarapoulskoy.

e) Feldſpath oſſeux, melé de Quartz criſtalliſé, du village Juſchakowa de Mourſinsk dons le diſtrict Alapajewskoy.

10.) Feldſpath & Hornblende (Granites ſquamoſus Gm.) de Colywane Ren. p. 445.

11.) Feldſpath & Trémolite, le feldſpath blanc presque argentin quelque fois rougé, & la Trémolite blanche ou argentine. tirant quelque fois ſur le bleu, du côté du Sud du lac Baikal près de la rivière Sludenka.

12.)

12.) Schoerl & Quartz (Granites melaleucos Gmel.) Schoerl noir en priſmes longues ramaſſés & Quartz blanc diſperſé en grains ça-&-la, des environs de la minière Eliſabetskoy dans le diſtrict de Cathérinebourg.

13.) Schoerl & Mica, (Granites Zillenſis Gmel.) Schoerl rouge brun en fibres ramaſſées & entremélé de mica argentin, du village Juſchakowa dans le diſtrict Alapajewskoy.

14.) Calcédoine & Quartz, une roche ſinguliére, mélangée de calcédoine jaune & Quartz enſumé pour la plus-part transparent, quelque fois criſtalliſé & toujours recouvert de calcédoine plus ou moins ſtalactitique, des environs de Schaitanka. C'eſt ici qu'on pourroit même placer les agathes ruſſes, dont la beauté varie ſuivant l'air le plus ou moins criſtallin du quartz, ſuivant la vivacité des couleurs de la calcédoine, du carniol, ou du jaſpe &c., qui s'y mèlent.

15.) Zeolithe en maſſe & Zeolithe écailleuſe, des volcans de Marécan. La premiere compacte, de couleur rouge-brun, avec un air Jaſpitique, l'autre en boules plus ou moins grandes, quelque fois de la grandeur de la tête d'une épingle, blanche, poreuſe, écailleuſe, ou brune enſumée, compacte & vitreuſe. Toutes les deux s'écument facilement & ſans addition à la flamme de la lampe des émailleurs, & donnent quelques foibles étincelles avec le briquet.

16.) Grenats en maſſe & grenats criſtalliſés, tous les deux jaunes de Cathérinebourg.

17.) Grenats & ſchoerl, (Granites ſimilaris Gmel.) du mont Koumba dans le diſtrict Verchotourskoy.

18.) Smiris & ſpath calcaire, le premier brun noirâtre & grenû, l'autre en taches fines jaunâtres. Cette roche eſt parſemée de paillettes de pyrites cuivreuſes, de la minière Voskreſenskoy dans le diſtrict Verchotourskoy.

Enfin il ſemble que c'eſt ici qu'on pourroit placer ces Brecches d'Oaſa & d'Orenbourg ſi riches en cuivre natif, ou pénétrées de verd & de bleu de cuivre. Elles conſiſtent ordinairement de cailloux ſiliceux ou jaſpitique avec un gluten ſablonneux & mélangé de pailletres de cuivre natif.

B. *Compoſées.*

19.) Feldſpath, Quartz & Mica, (Granites genuinus Gm.)

a.) Feldſpath jaunâtre, Quartz gris obſcur & Mica noirâtre des environs du fleuve Tſcheitaſch en Cathérinebourg; une variété à-peu-près ſemblable à gros grains des environs de Schaitanka (cat. No. 5.) & une autre à grains très fins & avec du mica argentin, de la rivière Tſcheremſchanka No. 7.

b.) Feldſpath jaune griſâtre, presque grenû & qui ſe décompoſe, quartz brun en formes de grains & mica noir en petites taches rondes de Catherinebourg.

c.) Feldſpath brun, Quartz brun & Mica noir de Wojetzk à Pétroſawodsk, & une variété à-peu-près ſemblable de Sinaja Sopka en Colywane & de Sliudjanaja Gora (Renow.).

d.)

d.) Feldſpath rougeâtre, Quartz rougeâtre ou gris paſſant en forme de tubes d'orgues, & Mica noir, de Sarapoulskoy aux environs de Mourſinsk; c'eſt la matrice du Schoerl rouge.

e.) Feldſpath blanc laiteux ou jaunâtre, Quartz brun paſſant en tubes d'orgues ou arrangé de manière à donner une reſſemblance de lettres hébraiques, & Mica noir ou argentin; c'eſt encore la pierre hébraique qui vient des environs du village Alabaſchka dans le diſtrict Alapajewskoy.

f.) Feldſpath blanc avec du Mica en petites taches noires & Quartz brun, plus ou moins transparent, iſolé & ſans aucun mêlange. *Pierre d'alliance* des environs du village Reſchewskoy ſur le chemin de Werchotourskoy.

g.) À parties conſtituantes trés groſſieres & iſolées des villages Kereti, Tſchernoretzkoy, & Kalgalakſcha dans la partie de la Finlande qui appartient à la Ruſſie; le mica s'y trouve en lames ſi larges, qu'il y a été employé pour des fenêtres. On trouve le même cas dans les environs du village Alabaſchka du diſtrict Alapajewskoy.

C'eſt la vraye roche primitive que l'on a remarqué auſſi ſur les alpes glacïères du Caucaſe; Güldenſtädt Reiſe. p. 454.

20.) Feldſpath, Mica & Quartz.

a.) à gros grains de Pyſchma, No. 10. Cat.

b.) à grains trés fins de Tagilsk. No. 11.

21.) Feldſpath, Quartz & Hornblende (Granites Sienites Gmel.) Feldſpath brunâtre. Quartz en grains gris & la

la Hornblende verte du fleuve Taloſka en Colywane, &c.

22.) Feldſpath, Quartz, & Aiguemarine des monts glacials de Tigeretzkoy dans le diſtrict Sémipalatnoy; le Feldſpath blanc, le Quartz brun ou enſumé.

23.) Quartz, Feldſpath & Mica.

a.) Quartz blanc & gris, Feldſpath jaune, & Mica verd jaunâtre de Cathérinebourg, le tout d'un grain très fin.

b.) Quartz bleuâtre & gris, Feldſpath jaunâtre & Mica noir des environs de Mourſinsk, le tout d'un grain gros Cat. No. 4.

c.) Quartz verd bleuâtre, Feldſpath blanc criſtalliſé & Mica noir du fleuve Tchertaſch, Cat. No. 9.

d.) Quarz blanc griſâtre, Feldſpath jaunâtre & Mica blanc de Cathérinebourg, Cat. No. 14.

24.) Quartz, Feldſpath & Talc; *Gneuſs granitique* ſelon Mr. l'academ. Herrm. No. 17. du fleuve Tagil.

25.) Quartz, Talc & Feldſpath décompoſé; un autre *Gneuſs* du Cat. No. 21. de Pyſchma.

26.) Quartz, Feldſpath, Hornblende (Granites Sienites Gmel.). Roche feuilletée que l'on trouve dans les environs du mont Sméjewskoy, & une autre variété qui conſiſte de Quartz rude & de Feldſpath jaune rougeâtre romboidal ou prismatique du fleuve Korbolicha (Ren. p. 321.).

27.) Quartz, Feldſpath & Schoerl (Granites ſcorlinus? an gneuſſum ſpathoſum? Gmel.).

a.)

a.) Quartz brunâtre, Feldſpath blanc, & ſchoerl noir luiſant très dur en prismes épais, ſtriés le long des prismes, des monts glacials de Tigeretzkoy.

b.) Quartz blanc, Feldſpath rougeâtre & ſchoerl verd en longues aiguilles de Cathérinebourg.

28.) Quartz, ſchoerl & grenats (Granites tyrolenſis Gmel.) du mont Koumba dans le diſtrict Werchotourskoy.

29.) Quartz, Mica & grenats (Granites triplex ſive Gneusſum alpinum Gmel.) Quartz gris & Mica argentin de la carrière Gornotſchiskoy 5 werſtes de Cathérinebourg.

30.) Quartz, ſpath calcaire & Hornblende des environs du fleuve Lambata & le mont Ajudach dans la Tauride.

31.) Quartz, ſpath calcaire & Mica, dans le diſtrict Povénetzkoy au delas de 5 werſtes du village Foimogouba & 215 de Pétroſawodsk.

32.) Quartz, ſpath calcaire & argille, dans le diſtrict Povénetzkoy 2 w. du village Schilka & 198 de Pétroſawodsk.

33.) Quartz, ſchoerl & Chlorite de Cathérinebourg.

34.) Quartz, Mica & Tremolite. Cette combinaiſon forme la roche vulgairement nommée *Pierre avanturine*, qui a été trouvée au delà de 30 w. de Cathérinebourg ou 6 werſtes du village Koſſoulina ſur le chemin de Tobolsk. Elle eſt toujours ferrugineuſe & tant ſoit peu ſchiſteuſe. La maſſe principale en eſt un Quartz grênu, presque ſablonneux & argilleux, de couleur rouge-des-tuiles quelque fois

rouge griſâtre ou griſe ou jaunâtre; ce quartz eſt intimément mélangé de petites paillettes de Mica doré ou argentin, comme on le voit dans quelques autres échantillons; la trémolite y eſt diſpoſée en fibres plus ou moins longues, & ſouvent en forme d'étoiles de la même couleur rouge & toujours ferrugineuſe. Toute cette maſſe devient enfin argilleuſe & ferrugineuſe par la décompoſition. Étant polie cette pierre a un éclat aſſez vif, & les paillettes de mica qui y ſont diſperſées forment ſa beauté principale par l'air doré qu'elles préſentent. Elle a été même employée pour des bagues pour de boutons, &c., mais il eſt rare d'en trouver des morceaux de la même beauté, aſſez grand pour pouvoir en faire des tabatiéres &c. Et même faut-il éviter toujours les morceaux qui ſont mélangé avecde la trêmolite, vû que les endroits qui la contiennent ne ſont ſuſceptibles que d'un poli mat & déſagréable.

35.) Schoerl, Hornblende & Quartz, (Granites Hoepſneri, Gmel.) d'Olonetz.

C. *Indéterminées.*

36.) Feldſpath, Quartz, Mica & Schoerl, Feldſpath jaunâtre, rouge, blanc, ou argentin, Quartz brun paſſant en tubes d'orgue parallèles de maniére à donner la repréſentation de lettres hébraïques, Mica noir ou argentin quelque fois criſtalliſé ou paſſant en veines, & ſchoerl noir priſmatique; c'eſt encore une pierre hébrïaque de Sarapoulskoy des environs de Mourſinsk. Cat. No. 12.

b.)

6.) On cite la même combinaiſon du Forpoſte Bournaſchewskoy.

37.) Feldſpath, Quartz, Feldſpath criſtalliſé & Mica blanc & noir des environs de Reſchetka, Cat. No. 13.

38.) Quartz, Feldſpath, Mica & Grenats, le quartz en forme de grains de couleur rouge-brun, & le feldſpath blanc de Sarapoulskoy, Cat. No. 6.

39.) Grenats en maſſes verds, grenats criſtalliſés rouges, Quartz blanc & gras, ſpath calcaire jaunâtre. — & Feldſpath rougeâtre de la minière Schiloſskoy en Cathérinebourg.

40.) Quartz, Feldſpath, Mica, Topaze brun & carnéole au delà de 5 werſt. du village Juſchakowa dans le diſtrict Alapajewskoy.

On voit par cet expoſé. 1.) Quelles ſont les différences deobjets que l'on trouve deſignés ſous la même desnomination par les auteurs minéralogiques, & que la méthode qu'on a ſuivie dans l'expoſition des pierres de roche compoſées n'a point été portée à cette préciſion, qu'elle dévoit avoir eu égard à l'importance de la matière. 2.) Que les pierres de roche compoſées les plus favorables à la formation des mines métalliques, c'eſt-à-dire celles qui nous donnent le plus d'eſpérance dans leur exploitation ſont celles, où le principe argilleux & talqueux prédominant ſe décompoſe & où il eſt mélé de particules quartzeuſes ferrugineuſes, comme on le voit par les combinaiſons du Quartz & du Mica, du Quartz & du Talc, de Pétroſilex, de Feldſpath & de Hornblende &c. Les pierres de roche compoſées calcaires le ſont moins, & celles du ſimple prin-

cipe

cipe talcqueux encore moins en comparaiſon de celles du principe calcaire. Et enfin les roches ſiliceuſes ſans aucun melange de pierres calcaires, argilleuſes ou talcqueuſes ſemblent être les moins propres pour la formation des mines métalliques, comme on le voît par l'exemple du Granit, du Quartz & du Feldſpath, du Schoerl & du Quartz &c. Et en cela 3.) les pierres de roche compoſées des pays étrangers ne différent que très peu de celles de notre patrie, quoiqu'en général on y puiſſe obſerver quelque difference dans la manière dont elles ſont mélangées. 4.) Qu'il eſt très eſſentiel d'obſerver les différens mèlanges de ces éſpéces de pierres quand on éxamine les montagnes les plus avantageuſes pour l'éxploitation de mines métalliques, à quelques exceptions près. *) 5.) Peut-être même trouvera-t-on enfin ſuivant la claſſification expoſée que les roches les primitives ſoyent celles principe ſiliceuxe les ſécondaires celles à principe argilleux, les tertiaires celles au principe talqueux & calcaire &c. Mais je rémets à une occaſion plus favorable l'éxpoſition des mes idées ſurcette matière en général.

*) C'eſt ce que ſemble avoir expreſſement indiqué le très judicieux Wallerius en diſant: indem von der verſchiedenen Art der Beſtandtheile der Gehalt der Berge vielleicht am meiſten abhängt. Voyez Anfangsgründe der Metallurgie. Leipzig. 1770. pag. 3.

TYPHA

TYPHA LAXMANNI PROPOSITA

Ab

JOAN. LEPECHIN.

Conventui exhibit. die 15 Mars 1797.

Inter ſcriptores hiſtoriae naturalis obtinuit mos, ut corporibus naturalibus minime cognitis, ad propagandam inventorum memoriam, nomina, ſaltim trivialia, ab ipſorum cognomine petita conciliare ſoleant. Hos ipſe ſecutus beati atque de hiſtoria naturali bene meriti viri cognomine uti haud inconſultum duxi. Nam hic indefeſſus vir in itineribus ſuis mineralogicis iuga altiſſimorum Sibiriae montium multoties peregrans, et ipſorum penetralia, aliis non adeunda, introſpiciens, non intermittebat etiam obſervare plantas in loco earum natali. Huic ipſius aſſiduitati et nunc proponenda Typhae ſpecies debetur, quae evidenter foliis ad dimidium fere linearibus, latioribus, a medio vero ad extremum ſubito coarctatis et in acumen, pro more foliorum gramineorum, deſinentibus, a duabus in vulgus notis ſpeciebus, nimirum *Typha latifolia* et *anguſtifolia* differre videtur, quaeque definienda eſt, quod ſit *Typha foliis anguſtis, linearibus, a medio fere ad apicem usque ſubito coartatis, clava graciliore, ſpicis maſcula foemineaque remotis.*

De-

Deſcriptio.

Radix fibroſa, fibris craſſiuſculis, albicantibus, tres aut quatuor pollices longis conſtans, perennis.

Culmus non raro ultra duor pedes altus, ſolioſus, ſoliis gramineis, ad ſuperiora denudatus.

Folia longa, ex vaginis ſoliorum ſuperiorum exeuntia, alterna, ſuperiora per paria diſpoſita, ipſo culmo nonnunquam longiora, ab exortu ad medium fere linearia, ſtriata, ſaturate viridia, a medio vero ſubito arctiora, in apicem deſinentia.

Flores, pro natura generis, hermaphroditi, et eodem modo conſtituti ſunt, ut in duabus ſpeciebus notis. Aſt maſculi a foemineis ad duas uncias remoti.

Claua, ratione reliquarum huius generis ſpecierum, gracilior et brevior eſt.

Habitat in ulteriori Sibiria Transbaicalenſi, locis humidis, in paludibus atque ripis fluviorum udis.

OB-

OBSERVATA DE SALMONE SALARE OCEANI SEPTENTRIONALIS.

Auctore

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui Acad. exhib. die 5 Octob. 1797.

Praeter plurimos pisces eſculentos, qui quotannis capiuntur in Oceano boreali a maritimis Roſſiae incolis, idem Oceanus inſignem quoque largitur copiam Salmonis Salaris, quo, praeſertim ſalito, remotiſſimi etiam a mari homines per totam Roſſiam omni fere anni tempore ſolent uti. Piſcis hic non adfertur in Roſſiam ab exteris regionibus, ſed omnis, quicunque in uſum trahitur, ſubminiſtratur a Roſſicis piſcatoribus, qui illum nunquam in ipſo pelago, ſed ſemper in fluviis, vel potius eorum oſtiis diverſimode capiunt. Non facile enumerari poſſunt flumina, quae ab oris Lapponiae Roſſicae ad remotiſſima littora Oceani glacialis, Sibiriam alluentis, aquas ſuas ad mare deferunt; ſed adhuc multo difficilius eſt determinare, quaenam quantitas huius piſcis quolibet anno capiatur; nihilominus exinde, quod per omnem Roſſiam ille divehitur, ingentem eius copiam capi plane eſt perſpicuum.

In iſta ſtupenda quantitate unius eiusdemque piſcis id maxime eſt mirandum, quod eius tot fere dentur varietates, quot ſunt flumina, quae ſubit et in quibus Salmo commoratur; quae res piſcatoribus eſt notiſſima. Illi eorum, qui in variis fluminibus ſive amnibus hanc piſcaturam exercent, omnes varietates, variis aquis proprias, habent ſibi notas, et viſo piſce, qui ab alio etiam piscatore erat captus, mox cognoſcunt, ex quo fluvio ille fuit extractus. Diverſitas iſta Salmonum praecipue conſiſtit in habitu externo, magnitudine, colore, pinguedine et ſapore. En praecipua loca Oceani Septentrionalis marisque Albi, quae mihi innotuerunt, in quibus manifeſtae diverſitates inter Salares obſervantur.

In vaſtiſſimo Oceani ſinu, qui ab oppido Lapponiae Kola, ſinus Kolenſis denominatur, piſces hi multo maiores et ſapidiores deprehenduntur quam in omnibus reliquis Lapponiae Roſſicae ſinubus; pondere ſuo ſaepe quadraginta libras excedunt, et neſcio quid inexplicabile praeſeferunt, quo a congeneribus in aliis aquis degentibus facile diſtinguuntur; id quod obſervatur etiam in iunioribus Salmonulis, quos incolae Tindam appellant, & qui primis aetatis ſuae annis nitidiſſimo argenteo gaudent colore, et adeo agiles ſunt, ut vel unica tantummodo Tinda, in retia illapſa, omnem aquae ſuperficiem in motum cieat, et multos piſces in ea incidiſſe piſcatoribus imponat.

Fluvios maris Albi, uti Dwinam, Oregam, Warzugam, ſubeunt Salmones, qui conſtanter a ſe invicem differunt tam colore ſquamarum quam magnitudine et teneritate

cor-

corporis. Salmones fluvium Onegam ſubire ſoliti, magnitudine et grato ſapore praecellunt alios, qui in reliquis fluviis hoſpitantur. Illis proxime accedunt, quos fluvius Dwina ſub initium menſis Auguſti e mari excipit. In hoc fluvio imprimis apparent agmina Salmonum adultorum, qui non raro octaginta libras pondere aequant; dein ſequuntur iuniores; tandem ſub finem autumni in conſpectum veniunt ſalmonuli et magnitudine et pondere prioribus multo minores. Notatu etiam dignum eſt, quod in amne Salga, prope Monaſterium Sancti Nicolai, quod ad ſiniſtrum oſtium Dwinae eſt ſitum, ſalmones omni tempore deprehenduntur minimi, quorum pondus a tribus ad ſeptem tantummodo libras extenditur, et qui valde ſunt macilenti.

E contrario, Salmones, qui ex oceano glaciali ad Oſtia fluvii Petſchorae migrationes ſuſcipiunt, et cum fluxu maris ſabuloſos oſtiorum alveos, poſt refluxum ſiccos, ingredi ſolent ibique retibus capiuntur, omnium tenerrimi ſunt, tametſi magnitudine caeteris non cedant; ita ut cutis eorum facillime disrumpatur, quam primum manus piſcatoris ruditer ipſis admoventur, et per fiſſuras cutis manet ex illis pinguedo, fluiditate oleo ſimilis. Aſt in unico hocce fluvio vel potius eius oſtiis, aeſtate 1796 anni. quingenta dolia Salmonum fuerunt capta, quodlibet autem dolium a 560 ad 720 libras ponderat; non quotannis tamen Salmones tanta capiuntur in copia, et fuerunt anni, quibus piſces hi in variis fluviis et ſinubus maris neque apparuerunt. Poſſunt itaque illi. per aliquod annos, carere aqua dulci et ſola marina vivere.

 Prae-

Praecipuam iterum diverſitatem inter hosce piſces offerunt fluvii Meſen, Kuloy et in hunc influens amnis Soiana, in quibus ſingulis diverſi habitus, magnitudinis imo etiam ſapiditatis ſalmones capiuntur, licet diſtantia inter hos fluvios in eundem ſinum Meſenenſem oſtiis ſuis hiantes nullius fere momenti ſit, et ſalmones ex fluvio Kuloy in Soianam migrantes primo utantur aquis prioris fluvii, ſed ad Soianam delati brevi mutantur, adeo ut difficilius ſit diſtinguere unam aquam ab altera, quam Salmonem huius fluvii a Salmone alterius.

Haec et plura alia, quae poſſem adducere exempla, clare demonſtrant, omnes diverſitates in ſpecie Salmonis Salaris occurrentes aquarum dulcium, quas ſolent frequentare, eſſe effectus. Hae igitur aquae non tam conveniunt ſalmonibus, quam aqua marina. Confirmant hoc plurimae obſervationes, accolis Oceani factae, quae docent, piſces hos, quando nimis diu in fluviis manere coguntur, ita immutari, ut non ſolum naturalem corporis ſui colorem, verum etiam totam amittant pinguedinem, et ex pulcherrimis ſapidiſſimisque piſcibus evadant difformes et exſucci. Eiusmodi ſalmones, quoniam autumno fluvios ſubeunt et in illis hyemem tranſigunt, a noſtratibus autumnales (Лошаки) dicuntur, quando ſub finem hiemis in reditu ad mare capiuntur. Magna in his ſalmonibus animadvertitur mutatio: ſquamae corpus tegentes variis inficiuntur maculis, ipſum corpus non ſolum firmitate et pinguedine orbatur, ſed et colorem acquirit ex livido aeneum; imo, ſolidae etiam corporis partes inſigniter afficiuntur; maxilla inferior protenditur in uncum, labium ſuperius intrantem; id quod in Salmonibus marinis nun-

nunquam obſervarunt noſtrates; in illis vero, qui in fluviis hibernarunt, quotannis id animadvertitur tam in maribus quam in feminis; perſaepe enim redeunt ad mare feminae cum ſuis ovis quae deponunt vel in ſinubus maris, vel in oſtiis fluviorum. Aſt reſpectu huius mutationis in ſalmone ſalare obviae Celeberrimi etiam Ichtyologi maximopere disſentiunt. Beatus Linnaeus in Fauna ſua Svecica, ſub deſcriptione huius piſcis ſequentem addit annotationem: „Karius apud nos hyemes tranſigit, uti in lacu Siljan Dalekarliae, tumque facie multum mutatur. Variat maxilla „vix manifeſte inflexa, & maxilla inferiore anguſtata, di„giti inſtar, ſurſumque inflexa intra ſinum maxillae ſupe„rioris; hanc notam credidere noſtri ſpeciem diſtinctam in„dicitare at multoties diſſecui pisces, omnes autem ma„xilla adunca eſſe mares intellexi, reliquas vero feminas.„ At Celeber. Bloch in Hiſtoria ſua piſcium adſert ſequentia: „Le Saumon à crochet a été décrit comme une femelle „par Bellon, Rondelet et Salvien; mais Gesner, Gronov „et Linné l'ont donné pour un mâle. Ceux que j'ai ob„ſervés, ſe ſont tous trouvés mâles. Mr. le Conſeiller Gö„den, de Rugenwalde, qui a une pêche conſiderable dans „ſon baillage, me marque, que de pluſieurs milliers de „ces poiſſons que ſes gens ont ouverts, pour les fumer & „les envoyer dehors, il ne s'eſt pas trouvé une ſeule fe„melle qui eût un crochet. Les écrivains ne ſont pas non „plus d'accord au ſujet de crochet: quelques-uns croient „qu'il le perd après le frai; d'autres qu'il ne l'a que dans „la mer. Cependant je puis aſſurer que je l'ai trouvé également à quelques-uns qui avoient été pêchés à l'em„bouchure de la Wippre, au moment où ils ſortoient de „la

„ la mer, & dans d'autres qui avoient été pris en y re-
„ tournant.

„ Quand Mr. Duhamel croit que ce crochet ne commence à paroître que par une maladie, & lorsque le poiſſon devient maigre, l'experience le contredit; car je l'ai trouvé auſſi bien dans les poiſſons gras que dans les maigres. „

Ex omnibus hisce relationibus id ſolummodo certi elicere poſſumus, quod dentur inter ſalares tam mares quam feminae, quibus maxilla inferior in uncum protrahitur; et obſervatio illuſtris Duhamel, quam refellit celeber. Bloch, pro veriſſima haberi debet; Salmones enim, qui in fluviis autumnum et hyemem tranſigunt, revera in ſtatum morboſum incidunt; quod luculenter demonſtrant mutatio coloris, macilentia corporis et flacciditas fibrarum. Defectus autem et vitia haec facile emendantur, quando iidem piſces ad aquas redeunt marinas. in quibus denuo pingueſcunt et firmitatem ac robur acquirunt. Sed emendatio maxillae inferioris non tam facile perficitur ac partium mollium; hinc ſit, quod occurrant ſalmones valde etiam pinguedinoſi, quibus maxilla inferior manet adhuc difformis. Difformitas autem iſta omnino debetur aquis dulcibus, et in iis tantummodo obſervatur piſcibus, qui ab oſtiis fluviorum longiſſime recedunt, et diutius quam natura eorum fert, in fluviis hoſpitantur; caeteri vero multo plures Salmones, qui debito tempore ad mare revertuntur, maxillam inferiorem nunquam habent aduncam.

Aſt

Aſt quoniam piſces hi ſenſibilem ab aqua dulci experiuntur mutationem, in aquis vero marinis manent incolumes; hinc eos unice piſces eſſe marinos fit evidens; quod vero per aliquod temporis ſpatium habitent etiam in fluviis, id ſibi commune habent cum plurimis piſcibus marinis qui certis temporibus e mari expatiantur et fluvios aſcendunt, perinde ac faciunt piſces lacuſtres, qui verno praeſertim tempore lacus ſuos deſerunt, et per brachia, ſinus ac rivos lacubus contiguos divagantur, non ut ova ſua alicubi deponant, ſed ut excurſionibus praecipue delectentur.

DE

DESCRIPTION DE LA TOPAZE DE SIBERIE,

avec 2 Planches.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 9 Novembre, 1797.

Depuis quelques années on apporte de la Sibérie une pierre, qu'on trouve chez les bijoutiers ruſſes ſous le nom de *tiagélowésnoy-Kamén*, & il y a quelques perſonnes, qui la regardent comme une eſpèce de *Diamant*, laquelle pourtant n'eſt qu'une *Topaze*, mais *topaze véritable* de couleur *blanche*.

Je ne parle pas de la Topaze *ſchoerliforme* de la *Daourie*, qu'on rencontre quelquefois d'un jaune très beau, & laquelle doit être rangée parmi les *Berils* ni de la Topaze *enfumée*, qui ſe trouve aſſez abondamment aux monts d'*Oural*. La pierre, dont je fais ici la deſcription en eſt fort différente; mais il y en a deux variétés dont la criſtalliſation n'eſt pas la même, quoique toutes les deux ſoient de la même eſpèce. L'une ſe trouve dans la *Daourie* aux environs de *Nertſchinsk* ſur la frontiere de la *Chine*, & l'autre aux montagnes Ouraliennes dans la contrée de la *Sloboda* de *Mourſinsk*. Nous donnerons à celle-là le nom de To-

Topaze de la Daourie, & à l'autre celui de *Topaze d'Oural*; elles ne diffèrent cependant que par leur forme ayant toutes les autres proprietés en commun.

Couleur.

La *Topaze de la Daourie*, ainſi que celle d'Oural, eſt ordinairement d'une couleur blanche, ou plutôt de la couleur d'eau, aſſez reſſemblante au criſtal de roche blanc transparent; mais on trouve quelquefois des criſtaux, qui ſont jaunâtres ou d'un jaune clair, ſemblable à la couleur de la *Topaze de Saxe;* ceux-ci ſont cependant très rares. D'autres criſtaux ont maintefois une couleur verdâtre tirant ſur le bleu, presque comme celle d'aigue-marine, c'eſt ce qu'on rencontre encore plus rarement que la couleur jaunâtre.

Transparence.

La transparence de nôtre Topaze n'eſt parfaite que quand le criſtal eſt pur, ce qui n'arrive pas ſouvent; la plûpart a une quantité de pailles & de fentes, quelquefois remplies d'une terre jaunâtre très fine. Ce tiſſu pailleux lui donne ſouvent une lueur changeante, à peu près comme celle de l'*Adoularïa* ou *pierre de lune de la Suiſſe*, & à cauſe de ces pailles elle joue ſouvent très-joliment les couleurs d'Iris; toutefois il eſt très rare de trouver un criſtal de nôtre Topaze, qui ſoit parfaitement net & transparent.

Péſanteur.

Sa péſanteur eſt très conſidérable étant bien plus grande que celle de toutes les autres pierres criſtalliſées de Sibérie, & c'eſt auſſi par cette raiſon, que les bijoutiers

 ont

lui ont donné le nom de *tiagélowesnoy-Kamén*, c'eſt-à-dire *pierre péſante*, car ſa péſanteur ſpécifique eſt ſelon mes eſſais de 3473-1000, en quoi donc elle approche aſſez à la péſanteur de la Topaze de Saxe, celle-ci étant ſelon Mr. Werner de 3556-1000.

Par la calcination nòtre Topaze ne perd que 5 pour cent, parceque àlors ſon poids eſt de 3314-1000.

Criſtalliſation.

C'eſt particulièrement par la criſtalliſation, que la *Topaze de la Daourie* diffère de celle d'Oural. Celle-là
Tab. V. eſt repréſentée avec toutes ces variétés ſur la 5. planche.

La forme de la *Tapaze de la Daourie* ou de *Nertſchinsk* eſt un priſme quadrangulaire allongé, terminé par une pyramide obtuſe à deux plans larges pentagones & à 4 petites faces triangulaires. (Fig. *a*, *b*, *c* & *d*, dont *a* repréſente le priſme & la pyramide avec un plan large, *b* le priſme avec deux facettes triangulaires, *c* la baſe quadrangulaire du priſme & *d* la pyramide avec tous ces plans.).

Mais ce priſme n'eſt que la moitié du criſtal; quand il eſt en entier, ce qu'on trouve pourtant très-rarement, il dérive un octaèdre rectangulaire, formé par deux pyramides à ſix plans, dont deux de chacune ſont pentagones & toujours beaucoup plus larges que les autres, dont le nombre eſt de 4, & qui ſont petites & triangulaires iſocèles en biſeau; (fig. e.). Cependant on voit cette Topaze difficilement avec ſes deux pyramides, parcequ'elle eſt d'ordinaire implantée par l'une de ces extrèmités dans la roche,

che, ou bien auſſi dans des autres criſtaux de Topaze enfumée. Il n'y a que celles qu'on trouve couchées horizontalement ſur les grouppes, dont les deux extrêmités ſont quelquefois également terminées.

Ainſi la forme la plus parfaite de nôtre Topaze eſt un prisme quadrangulaire terminé par deux pyramides hexaèdres, dont les faces larges pentagones forment un angle obtus d'une part tandis que de l'autre elles ſe rencontrent avec les arêtes du prisme, qui ne ſont point tronquées. Cette forme a donc la plus grande reſſemblance avec la *Topaze de Saxe*, ſurtout celle des criſtaux de la *Topaze de Nertſchinsk* dont le prisme eſt un peu plus allongé qu'à l'ordinaire, & d'où les plans larges de la pyramide deviennent plus étroits. (fig *f*, g, *h*, *i*, *k*.).

Au reſte la forme de la *Topaze de Nertſchinsk* eſt aſſez conſtante, excepté les petites facettes triangulaires, qui ſont différemment ſurcoupées, dont reſultent pluſieurs variétés. Souvent elles ſont tronquées de cette manière, comme il eſt repreſenté dans les figures *l* & *m*, quelques-unes comme fig. *n*, & une ſeule fois j'ai rencontré un criſtal formé par un prisme quadrangulaire & une pyramide à deux faces larges pentagones, mais dont les quatre petits plans ſont tronqués de la ſorte, qu'il en reſulte de chaque coté 5 plans dont deux ſont triangulaires, deux quadrangulaires & un héxagone.

À l'ordinaire les criſtaux de cette topaze conſiſtent, comme il eſt dit ci-deſſus, d'un prisme quadrangulaire ſtrié le long de ſes faces, mais quelquefois on en trouve, dont

le prisme conſiſte de huit faces aſſez diſtinguées; cependant 4 en ſont toujours très étroites. (fig. *p*, *q*, *r*, *s*, *t*).

Il eſt rare de trouver la *Topaze de Nertſchinsk* avec une troncature au ſommet de la pyramide; il y a pourtant quelques-unes, dont les bords de l'héxagone ſupérieure ſont tronqués par un plan linéaire fort étroit. (fig. *s.*) Parmi pluſieurs criſtaux j'en ai trouvé auſſi un, dont la pyramide ne conſiſte que de deux faces larges triangulaires, furtronquées d'un plan linéaire, & avec un ſommet arrondi, dont la ſurface paroit ecailleuſe ſans aucune forme diſtincte. (fig. *u.*).

Quant à la criſtalliſation de la *Topaze d'Oural* elle eſt repreſentée avec ſes varietés ſur la meme planche. C'eſt un prisme ſuboctaédre comprimé, dont quatre faces ſont larges & quatre étroites, terminé par une pyramide hexaédre ſemblable à celle de la *Topaze de Nertſchinsk* avec cette différence, que les deux plans pentagones de celle-ci ſont toujours plus larges, au lieu que les quatre facettes étroites de celle-la deviennent plus large à raiſon que les plans pentagones ſe diminuent en largeur, (fig. *aa. bb. cc*). En outre la pyramide eſt ſouvent terminée cuniforme, dont le ſommet eſt pointû & ſurcoupée avec une quantité de facettes en quoi cette variété reſſemble beaucoup à la Topaze de Breſil; (fig. *dd. ee. ff. gg.*) quelquefois le ſommet de la pyramide a une petite troncature. (fig. *ii. kk.*).

Quoique dans la plûpart des criſtaux de cette Topaze le prisme eſt très diſtinctement détaché, quelquefois cependant il paroit quadrangulaire à la baſe, (fig. *ll. dd. hh.*)

k k.) ayant en même tems ſix, huit & même dix faces latérales, dont quatre ou ſix ſont très ſoiblement exprimées. Parmi une quantité des Topazes d'Oural j'ai trouvé une dont la pyramide a auſſi une ſurface ecailleuſe. (fig. *h h.*).

Grandeur des Criſtaux.

La grandeur des criſtaux de nôtre Topaze eſt très différente & va de la grandeur d'une tète d'épingle jusqu'au diamétre d'un pouce & plus, comme on peut voir ſur la planche ci-jointe où toutes les variétés y repréſentées ſont copiées d'après leur grandeur naturelle.

Lueur.

Les faces latérales ſont toujours fort liſſes, ainſi que les petites facettes de la pyramide, mais les plans larges de celle-ci ſont à l'ordinaire mattes, ce qui s'entend pourtant ſeulement de la *Topaze de Nertſchinsk*, car celle d'Oural eſt d'une lueur égale, tant ſur les faces latérales, que ſur la pyramide, avec cette différence que la *Topaze de la Daourie* a une ſurface plus graſſé, étant en même tems auſſi plus ſtriée ſuivant ſa longueur; toutes les deux ſont auſſi luiſantes dans l'interieur que ſur l'extérieur.

Caſſure.

La caſſûre de nos Topazes ſibériennes eſt feuilletée en les caſſant de travers, mais le long du criſtal elle eſt vitreuſe & presque concoïde.

Dureté.

Elle eſt très dure & notamment plus dure que par ex. les aigues-marines de Sibérie; elle eſt en même tems fort

ſort denſe, de ſorte qu'étant polie elle a une eau très brillante, & contre le briquet elle donne des etincelles très vives.

Parties conſtituantes.

Selon l'analyſe de nòtre ſavant confrère, Mr. le Conſeiller de Cour Lowitz, qu'il a bien voulu entreprendre à ma priere, & dont il communiquera lui-même la relation, cette Topaze contient:

Terre ſiliçeuſe - - - - -	46, 15.
Terre argilleuſe - - - - -	46, 15.
Eau - - - - - -	1, 15.
Oxide de fer, un veſtige	
Perte - -	6, 55.
	100, 00.

Propriétés au feu.

La Topaze de Sibérie eſt, comme celle de la Saxe, infuſible ſans addition d'un fondant dans le feu ordinaire du laboratoire; un criſtal mis ſeul dans un vaſe clos enduit de charbons n'a pas fondu, mais il devint blanc à peu près comme le gyps; il a perdu ſa tranſparence en ſe décompoſant en feuilles minces & friables, propriété que poſſede de même la Topaze de Saxe Dans un feu très fort & long tems continué elle paſſe à l'état d'email ſur la ſuperficie.

Frottée ſur du drap elle devient un peu electrique.

Uſage.

Comme il eſt rare de trouver un criſtal de nòtre Topaze qui ſoit tout nêt, elle eſt très recherchée quand elle

elle eſt pure; on la taille à Cathérinebourg & ailleurs, & on en fait des bagues qui ſont payées bien plus chères que p. ex. l'*Amethyſte*, le *Beryl* ou la *Criſolithe* de la Sibérie. Il y a quelques unes, qui ont la blancheur & presque l'éclat du diamant lorsqu'elles ſont bien montées.

Lieu natal.

J'ai déjà remarqué au commencement de ce Memoire, qu'il y a deux endroits en Sibérie, où l'on trouve cette Topaze, c'eſt-à-dire aux environs de *Nertſchinsk* & aux monts d'*Oural*. Sur tous les deux endroits on la rencontre dans les fentes ou filons du Granit, enſemble avec le *Beryl* & la *Topaze enfumée*, ſouvent en grouppes d'une grande beauté, dont une eſt repréſentée dans ſa grandeur naturelle ſur la 6. planche, où l'on voit une quantité de cristaux de *topaze véritable* entremelée avec quelques pieces de *topaze enfumée* & le tout grouppé ſur une piece de *feldſpath criſtalliſé*. Tab. VI.

EX-

EXPÉRIENCES SUR L'ACIER DAMASSÉ.

avec une Planche.

Par

B. F. I. HERMANN,

Préſenté à l'Académie le 29 Novembre 1798.

L'acier damaſſé eſt un produit très recherché dans l'Orient à cauſe de ces ſabres fameux, qu'on y en fait, & leſquels ſont en grand uſage dans les *armées turques*, en *Perſe*, aux *Indes* & même au *Japon*; cependant le véritable procédé de préparer cet acier eſt encore un ſecret en Europe jusqu'à nos jours.

Mais il y a des lames damaſſées d'un genre très-différent, ſavoir:

1mo) des lames faites d'acier damaſſé véritable à la maniere de *Turquie* ou de *Perſe*, dont les belles fleurs du damas dérivent de la compoſition même, quoique elles ne deviennent viſibles qu'après avoir trempé la lame bien polie dans une leſſive convenable; alors le damas eſt indéſtructible, & quand il s'uſe, ou en cas qu'on voudroit repolir la lame, les fleurs du damas éclorrent derechef auſſitôt que le ſabre eſt retrempé dans la compoſition requiſe.

2do)

2do) des lames faites d'acier ordinaire & couvertes d'un vernis, ſur lequel on ecrit avec une aiguille différentes figures, après quoi elles ſont miſes dans une eau forte très affoiblie par l'eau ordinaire; ce melange ronge le métal, & les figures y gravées prennent une couleur noirâtre, au lieu que le reſte du ſabre, couvert de vernis, eſt blanc; c'eſt ce qu'on appelle *damas faux.*

On voit aiſement, que par ce dernier procédé la lame n'acquiert aucune amélioration, & le damas, n'etant que ſuperficiel, ne la rend meilleure qu'elle n'eſt par la préparation ordinaire; mais les lames, faites d'acier damaſſé véritable. montrent non ſeulement les plus belles fleurs de damas, mais elles poſſedent en même tems la meilleure qualité par rapport à leur dureté & leur ténacité. Celle-là eſt à l'ordinaire ſi grande, qu'on peut couper le fer avec & par la derniere elles réſiſtent aux preuves les plus fortes ſans ſe caſſer ni plier. propriétés, dont ne ſont guère doués les lames européennes.

Cette qualité ſuperiéure ne s'acquiert que par la bonté du damas, qui depend lui-même, ainſi que la beauté de ſes fleurs, de la façon de préparation, dont l'imitation a été bien recherché en Europe, mais avec très peu de ſuccès, car jusqu'à préſent on ne ſache pas qu'on fiſſe uſage de lames damaſſées véritable dans nos armées, quoique la grande utilité, qui en pourroit réſulter, ſoye très palpable.

Pendant mon ſéjour en Sibérie à la fabrique d'acier que j'y ai etablie, entre autres eſſais, j'ai auſſi taché de trouver la methode de préparer l'acier damaſſé d'après la ma-

manière orientale; mais après avoir lû tout ce, que *Buffon*, *Perret*, *Chardin*, *Rinmann* &c. ont écrit ſur ce ſujet, j'ai trouvé que leur façon de faire le damas ne peut pas être celle, qui ſe pratique en Orient parcequ' en travaillant ſelon leurs préceptes il ne me réſultoit pas un produit de la qualité réquiſe.

Par hazard je fis connoiſſance avec un Arabe qui a été lui-même à *Damask* & qui a vu les célébres fabriques de cet endroit. En ſuivant les indications qu'il a pu me donner, & en variant & multipliant de différente manière mes eſſais, j'ai préparé des lames, qui par la beauté de leurs fleurs, ainſi que par la dureté & la ténacité, ne ſont peut-être pas inférieures aux fameux ſabres turques. Voici les expériences principales que j'ai faites ſur ce ſujet.

§. 1. Pour faire le damas il faut premièrement préparer les matériaux, qui conſiſtent en différentes ſortes d'acier & de fer. J'ai pris trois pouds d'acier cru fait à *Pyſchminsk* par la fuſion à la maniere de *Stirie* du fer de fonte de *Kamensk*; de cet acier, conſiſtant en 7 barres, on a fait un paquet en mèttant les plaques l'une ſur l'autre, enſuite il etoit enclavé dans une tenaille, ſoudé enſemble avec du ſable & du ſel commun dans un feu vif, écroui & ſix fois plié ſur lui même, après quoi on en forgeoit ſous le marteau des barres de 2 pouces & demi de largeur & d'un quart de pouce d'épaiſſeur. Le déchet étoit un poud & ſix livres.

§. 2. On ſoudoit enſuite un paquet de barres de fer dur de *Kamensk*, miſes l'une ſur l'autre & péſant un poud dix-huit livres, en l'écrouiant & pliant trois fois ſur lui-mê-

même; àlors on en forgeoit une barre de la largeur & épaiſſeur ſusdite. Le déchet conſiſtoit en trente livres.

§. 3. De ces matériaux préparés j'ai pris de l'acier raffiné & écroui (§. 1.) ſept barres, qui péſoient - - 1 poud.
du fer écroui, (§. 2.) cinq barres - - - —— 28 liv.
du fer ordinaire dur de Kamensk, deux barres —— 18

Total 2 p. 6 liv.

Toutes ces barres étoient ſoudé enſemble, écroui & plié une fois ſur elles mêmes; enſuite j'en faiſois faire une barre ronde de trois quarts de pouce d'épaiſſeur, laquelle, après l'avoir convenablement chauſé, a été tordue comme une corde; àlors on en forgeoit une barre mince dont l'épaiſſeur n'excedoit pas un quart de pouce ſur une largeur d'un pouce & demi. Déchet 26 livres.

§. 4. Pour en faire une lame de ſabre j'ai pris une barre d'acier ecroui & ſix fois plié ſur lui-même (§. 1.) & deux barres du damas tordu & forgé en barres minces (§. 3.) de manière que celui-là etoit mis au milieu en le couvrant de deux cotés avec du damas. (*) Après l'avoir bien chauſſé & ſoudé enſemble on en préparoit une lame, qui étoit miſe dans une compoſition de leſſive convénable; mais la ſoudure réiterée de ces trois barres pour les unir, & le travail ſous le marteau pour forger la barre, etoient la cauſe, que les lignes provenues du tordage ſe prolongoient trop, étant en même tems un peu trop larges; auſſi l'acier du milieu eſt dévenu trop viſible en ne donnant à cette lame

Yy 2 plus

(*) En ſuivant en cela la methode de *Perret*.

plus de qualité que ne poſſèdent les lames ordinaires. (Voyez Planche VII. fig. *a*).

§. 5. Après cela j'ai fait encore un autre paquet, conſiſtant en

trois barres d'acier cru	1 p. 17 liv.
trois barres d'acier raffiné & ſix fois plié ſur lui-même	— 33. —
deux barres de fer doux de Nigenétaguilsk	— 25. —
trois barres de fer dur de Cathérinebourg	— 35. —
Total	3 p. 30 liv.

Ainſi le nombre de toutes les barres monta à 12; ils étoient rangés & miſes l'une ſur l'autre de la manière ſuivante:

1.) Fer dur de Cathérinebourg.
2.) Acier raffiné.
3.) Fer doux de Nigenétaguilsk.
4.) Acier crû.
5.) Fer dur.
6.) Acier raffiné.
7.) Fer doux.
8.) Acier crû.
9.) Fer dur.
10.) Acier raffiné.
11.) Acier crû.

§. 6. Ce paquet en l'ayant bien ſoudé & forgé ſous le grand marteau étoit ſix fois plié ſur lui même; alors on en forgeoit ſous le martinet des barres quarrées d'un quart de pouce d'épaiſſeur, qu'on tordoit enſuite pour en forger des barreaux minces d'un huitième de pouce d'épaiſſeur ſur un pouce de largeur. Le déchet étoit un poud & 22 li-

livres. Le damas provenu de ce melange avoit des lignes fines en montrant de très jolies fleurs.

§. 7. Tous les matériaux conſommés à la préparation de ces deux ſortes de damas conſiſtoient en

Acier crû - - - - - - -	4 pouds	17 liv.
Acier raffiné - - - - - - - - -		25
Fer dur - - - - - - -	2 - -	13
Fer doux - - - - - - - - - -		25
Total	8 pouds.	

Charbon de Sapin - - - 4 corbeilles c'eſt-à-dire	80 pouds.
Sable - - - - - - - - -	3 —
Sel commun - - - - - - - - -	— 12 liv.
Un maitre avec un ouvrier y ont travaillé - -	6 jours.

§. 8. J'ai pris trois barres minces (§. 6.) forgés du damas de la cinquième expérience & en les ſoudant enſemble & les pliant une fois ſur elles mêmes j'en ai fait une lame de ſabre, dont les fleurs furent d'une beauté ſupérieure; il avoit des lignes fines & de très jolies figures. (voyez Tab. VII. fig. *b. c.*)

§. 9. Pour mieux voir l'effet de la différence du travail & des matériaux j'ai fait préparer encore un troiſième paquet de damas, en y employant:

Acier crû, 4 barres de - - - -	1 poud	20 liv.
Fer dur 2 —— - - - - - -	——	21 —
Fer doux 2 —— - - - - - - -	——	20 —
en tout	2 pouds	21 liv.

En

En les mèttant l'une ſur l'autre de cette façon:

1.) Acier crû.
2.) Fer doux.
3.) Acier crû.
4.) Fer dur.
5.) Acier crû.
6.) Fer doux.
7.) Acier crû.
8.) Fer dur.

On ſoudoit ce paquet en le pliant quatre fois ſur lui même, après quoi on ſorgeoit des batons ronds d'un demi pouce d'epaiſſeur, qui ſurent rechauſſés & tordus; enſuite on les applatiſſoit ſous le martinet, d'où reſultèrent des barres, dont l'épaiſſeur n'excedoit pas $\frac{7}{16}$ de pouce. On a pris 8 de ces barres & en les reſoudant & pliant encore une fois ſur elles mèmes, on en ſorgeoit ſous le marteau des barres d'un pouce d'épaiſſeur, & en les portant ſous le martinet, on en a fait des barres d'un demi pouce d'epaiſſeur & de trois quarts de largeur; le dechet étoit un poud & une livre.

§. 10. Pour faire des ſabres de cette ſorte de dames, on coupoit en deux la barre, on la plioit ſur elle mème & on la ſoudoit enſemble; après quoi on ſorgea une lame, dont les fleurs etoient fines & bien travaillées, mais trop allongées (Tab. VII. fig. *d.*).

Pour voir, ſi l'acier crû ſeul, lorſqu'il eſt raffiné, ècroui & tordu, montre des fleurs de damas, j'ai fait ſouder un paquet de huit barres d'acier crû fin & très dur, en les pliant ſix fois ſur elles mèmes; mais lorſqu'on avoit fait

de

de la manière ſusdite une lame de ſabre polie, & trempée dans la compoſition, il n'en reſultoit point de damas; on voyoit ſeulement quelques lignes ſoibles, qui n'etoient que l'effet du tordage.

§. 12. J'ai vû presque les mêmes réſultats quand j'ai pris de l'acier crû melé de petites veines de fer; en le préparant & forgeant en barres de la même manière, il en provint une lame, dont la ſurface rongée par la leſſive montroit bien quelques lignes ſerpentinées, mais point de damas véritable.

§. 13. Et pour ſavoir, ſi l'on pouvoit faire du damas d'acier ſeul ou de différentes ſortes d'acier ſans y mêler du fer, ſeulement par l'ecrouiment & le tordage, on prit une barre d'acier crû & une barre d'acier raffiné, qui etoit ſix fois plié ſur elle même; on les ſoudoit enſemble en les pliant huit ſois, & après en avoir forgé une barre, qui étoit enſuite tordue, on en faiſoit une lame, qui ne montroit point de damas, mais ſeulement quelques lignes blanches, qui réſultèrent du tordage.

§. 14. Le même effet en provint, lorsque en prenant une barre d'acier crû, & une barre d'acier ſix fois raffiné, on les ſoudoit enſemble ſans pourtant les plier; on n'y voyoit point de damas, ſeulement quelques lignes blanches provenues du tordage.

§. 15. Mais quand j'ai pris une barre d'acier ſix fois raffiné, & une barre de fer doux, de la même épaiſſeur, que je ſoudois enſemble, & lorsque les ayant pliés 3 fois ſur elles mêmes, tordues & encore une ſois pliée, le damas, qui

qui en reſultoit, etoit très viſible, quoique les lignes etoient encore trop larges & ſemblables à des nuages (Pl. VII. fig. c).

§. 16. Une barre d'acier eut ſoudée avec une barre de fer doux du même volume, étant trois fois pliée & tordue, enſuite encore une fois pliée & forgée en lames, le damas, qui en provenoit, étoit presque le même comme celui-là, (§. 15.) mais moins fin, & la plaque ne pouvoit pas être parfaitement bien ſoudée.

§. 17. Une barre d'acier ſix fois raffiné ou plié, ſoudée avec une barre de fer doux, toujours de la même épaiſſeur, etoient encore ſix fois plié ſur elles mêmes, tordue derechef une fois plié, enſuite forgé en lame & polie. Le damas en ſortoit avec des lignes très fines & fort ſerrés, ſe laiſſant en même tems très bien forger & ſouder.

§. 18. Enfin j'ai ſoudé enſemble *deux* barres d'acier raffiné & ſix fois plié, avec *une* barre de fer doux miſe au milieu; ce paquet étoit 3 fois plié ſur lui même, tordu, encore une fois plié, & forgé en plaque. Le damas eſt beau & bon avec des fleurs de couleur plus noire que blanche, dont les figures ſont bien travaillé.

§. 19. Le même effet en réſultoit lorsque j'ai fait ſouder enſemble deux barres d'acier ſix fois raffiné avec une barre de fer au milieu, dont le paquet étoit encore ſix fois plié ſur lui même; il fut enſuite tordu, encore une fois plié & forgé en plaque; mais le damas étoit encore plus fin & mieux travaillé que celui de la 18e expérience.

§. 20.

§. 20. Les réſultats de tous ces eſſais ſont donc les ſuivants:

1. On ne peut guère préparer du damas véritable & de belles fleurs ſans y meler avec l'açier une certaine quantité de fer.
2. Cette quantité de fer ne doit pas excéder la moitié du poids de l'acier.
3. Il vaut mieux encore de n'y mêttre du fer que le tiers du poids de l'acier.
4. On doit employer de preférence plutôt le fer doux que le fer caſſant.
5. Il ne réſulte point de damas ſans tordage.
6. On doit ſe ſervir de l'acier raffiné le plus fin, &
7. L'acier & le fer, en les ſoudant en paquet, doivent être plié ſur eux mêmes au moins ſix fois avant le tordage, non ſeulement pour faire éclorre de belles fleurs de damas, mais encore pour lui donner de la qualité, car ce n'eſt que par ce travail qu'on lui rend un très haut degrés de ténacité.

§. 21. Mais outre la compoſition du damas la trempe eſt un point capital pour donner aux lames cette grande dureté, qui les a rendu ſi fameuſes. Quelques voyageurs prétendent que dans l'Orient on les trempe dans du ſang de bouc. & d'autres les veulent avoir vu tremper dans un grand courant de vent, ainſi que dans du linge mouillé d'eau, *ſans* le réchauffer enſuite comme il eſt de coutume en Europe.

§. 22. J'ai taché d'imiter ces procédés autant que les circonſtances me l'ont permis; mais je ne pouvois pas trouver l'effet ſouhaité, & lorsque j'ai trempé les lames dans une fluidité froide ſans les réchauffer enſuite, elles me revenirent toujours trop caſſantes; je me ſuis donc convaincu, que ſans réchauffement on ne vient jamais à bout de les faire durables; mais pour leur conſerver la dureté qui les rend ſi ſupérieures, on ne doit pas les réchauffer jusqu'à la couleur violette, comme on le fait ordinairement dans les fabriques européennes. J'ai trouvé la manière ſuivante comme la meilleure: je chauffe les lames forgées partout également dans un feu vif jusqu'au rouge clair; je les tire avec viteſſe au travers d'un amas de pouſſière de charbon humecté, & je les trempe enſuite dans l'eau pure & froide; à la fin je les *rechauffe* doucement jusqu'au degrés, qu'elles reçoivent à la ſuperficie la couleur rouge, ſans les laiſſer paſſer à la couleur violètte ou bleue.

§. 23. Après la trempe vient la politure, à la quelle on procede comme on fait avec les lames ordinaires, avec cette précaution pourtant, qu'il faut donner aux lames damaſſées la politure la plus haute & la plus fine, qu'il ſoit poſſible, puisque les fleurs de damas ne deviennent pas ſi jolies & ſi bien marquées, quand des ſtries de l'eguiſoir ſont encore viſibles ſur la lame.

§. 24. Enfin on fait eclorre les fleurs du damas; on ſe ſert à cet effet d'une leſſive qui ronge plus ou moins le métal en colorant une partie des ligres en noire & laiſſant l'autre en blanc. La meilleure de ces compoſitions eſt ſans doute l'eau forte, affaiblie par l'eau ordinaire. Lorsqu'on y mèt

mêt une lame damaſſée, ſa ſurface dans une ou deux minutes ſe couvre d'une ocre noire fine, ſous laquelle, aprés l'avoir lavé & nettoyé avec de la pouſſiere de verre, ſe montrent les fleurs du damas.

§. 25. Mais comme cette leſſive révient trop chère pour la pouvoir employer en grand, ſurtout parcequ'il faut ſe ſervir de l'eau forte depurée, qui ne doit pas contenir de l'acide vitriolique ni de l'acide muriatique on peut faire uſage d'une compoſition, qui conſiſte d'une ſolution de vitriol ou ſulſate de cuivre, & de la craie. Sur une livre de Vitriol on prend une huitième de livre de craie, en y verſant autant d'eau pure, qu'elle ſoit en état de reſoudre les matériaux, & dans cette leſſive on mêt les ſabres; àlors l'acide vitriolique ronge le metal & le cuivre ſe dépoſe ſur la lame.

Par ce procédé le damas devient auſſi très-viſible & fort beau; mais pour faire, que les fleurs ſoient bien diſtinctes. il faut laiſſer les lames beaucoup plus long tems dans cette compoſition, que dans l'eau forte.

DE OVO PERFORATO.

Auctore
N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhib. die 25 Oct. 1798.

In conventu huius Academiae, die [illegible] Iunii huius 1798 anni, ſuper hac ipſa menſa expoſitum fuit ovum, quod miſit Academiae illuſtris Comes A. A. Muſin-Puſchkin, ſtatim ac gallina illud peperit. In apice huius oui obtuſo conſpiciebatur foramen oblongo ſinuatum latitudine unius lineae, longitudine duarum circiter linearum. Ex illo foramine prominebat pedunculus, qui funiculum umbilicalem vel potius appendicem vermiformem mentiebatur, et poene dimidii pollicis longitudinem aequabat. Apex illius pedunculi, iam ſiccus factus et incurvatus intortusque, pedem quaſi avis aliquomodo referebat et variis coniecturis anſam praebuit; probabile enim videbatur, pullum iam formatum ovo ineſſe, cum exempla non deſint, in ovario gallinae loco vitelli inventum fuiſſe pullum perfecte declaratum, uti videre licet in Tranſactionibus philoſophicis No. 50. pag. 1019, ubi gallinae illius figura etiam eſt expreſſa; et aliud exemplum eiusdem phoenomeni proſtat in Ephemeridibus Naturae Curioſorum (Dec. 2. ann. 4. Append. Obſerv. XXVIII.), ubi a *Doctore* Michaele Luzenius gallina

vivi-

vivipara eſt deſcripta. Aſt ex ſola inſpectione prominentis pedunculi et ex ſigura foraminis, quod non vi aliqua apertum, ſed ſub ipſa putaminis formatione relictum fuiſſe ex margine eius rite terminato erat perſpicuum, impoſſibile fuit divinare, quid intra ovum contineretur. Idcirco longitudinaliter putamen ovi diffregimus: effluxit inde albumen limpidiſſimum cum vitello et chalazis; ſed praeter haec contenta, integrum ovum conſtituentia, apparuit corpus duriuſculum, ex rubro-fuſcum, ſiguram pyri quodammodo referens, magnitudine ovi columbini, propria membrana obvolutum, cuius tenuiori apici inſidebat ille pedunculus, qui extra foramen putaminis prominebat. Diſcidimus cuticulam illud corpus tegentem, qua aperta in conſpectum prodiit maſſa ex inſpiſſato ſanguine conflata, in qua neque vaſcula, neque fibrillae aliquae detegi potuerant, ſed tota ex grumis ſanguinis intime unitis erat compoſita, totumque replebat, in quo continebatur, ſacculum, ſiguram pyri referentem. Maſſa illa ſanguinea valde erat compacta, ita ut pyriformis ille ſacculus ad tactum duriuſculus deprehenderetur, diſciſſaque membrana ſacculum efficiente grumoſus ille ſanguis non ſine vi quadam digitis diſcerpi potuiſſet.

Aperto itaque putamine, omnia ovi contenta in conſpectum prodiere; inerant nempe ipſi albumen et vitellus, licet hic poſterior a preſſione illius maſſae ſanguineae globoſam ſuam formam pauliſper amiſerit; aſt prorſus nihil in ovo deficiebat, quod producendo pullo inſervire deberet; ſed praeter haec incluſum erat ovo corpus extraneum, quod ad partes naturaliter illud conſtituentes non magis pertinebat, quam illae aciculae, quae in ovis putamine penitus opertis fuerunt repertae (vid. Collection Academ. de Dijon tome:

tome 1. page 388.). Corpus illud non fuiſſe molam ex primordio foetus praeternaturaliter prognatam, patet exinde, quod vitellus et albumen in ovo adfuerint, neque ovum fuerit incubatum. Cum vero molae in viviparis animalibus potiſſimum reperiantur in eorum utero; in oviparis autem ipſum ovum officio uteri fungatur; hinc maſſa illa ſanguinea merito mola appellari poteſt; hoc enim nomine in genere appellantur maſſae duriuſculae et quaſi carneae, quae poſt graviditatis ſigna prodeunt de utero et plerumque irregularis formae eſſe ſolent. Licet autem multi egregii auctores contenderint, molas has ex corrupto ſemine naſci; aſt recentiorum obſervata evincunt contrarium. Iam celeb. Ruiſchius, qui multas molas ſedulo examinavit, tandem conclufit, " veroſimile admodum eſſe, molas ita decantatas nil aliud eſſe, quam eiusmodi carnoſas uteri ex-
„ creſcentias, aut placentulas retentas, et ab utero com-
„ preſſas, neutiquam vero ex mala conceptione ortas."
Quamobrem molas illas ſarcomata appellavit. "quia, in-
„ quit, praeter carnem in illis nihil deprehendi: eiusmodi
„ excreſcentias uterinas, per pedunculum utero adhaeren-
„ rentes, obſervavi in ipſo utero, dum mulieres in partus
„ doloribus eſſent. . . Illud vero neutiquam mirandum,
„ quandoquidem in ipſo etiam ſtomacho, et veſica urinaria
„ eiusmodi corpuſcula excreſcere obſervavi". (Obſerv. Anatom. Chirurg. Obſervat. 28. 29. pag. 38. et ſeq. et Obſerv. 58. p. 52.). Eiusmodi certe mola, ſi mola dici poteſt, fuit corpus illud ovo incluſum, ex quo etiam pedunculus prominebat, qui ſuſtentandae maſſae ſanguineae intra corpus gallinae inſerviebat. Videndum nunc eſt, qua ratione corpus illud intra ovum pervenerit.

Phy-

Phyſiologi docent, ovum in auibus ita formari: in principio ex vaſis ovarii ſecerni vitellum, qui tenui pellicula obvolutus tamdiu ovario adhaeret uti ſua pellicula, ita vaſis ovarii pedicellum minimum efformantibus, donec cicatricula vitello impreſſa a mare fuerit faecundata; in actu foecundationis avelli vitellum ab ovario et in oviductum deferri; ex vaſis oviductus exſudare humorem pro efficiendo duplici albumine, quod eo ſpiſſius eſt, quo vitello propinquius; in albumine propria cuticula obtecto formari chalazas, vitello accreſcentes, quarum ope ſuperficies vitelli, cui dicta cicatricula eſt innata, ſemper ſurſum ſpectat. quamcunque ſitum ovum habuerit; tandem, inſtante iam partus tempore, totum ovum putamine obduci calcareo, cuius apice obtuſo illud foras eliminatur.

Patet hinc, omnes partes ovum conſtituentes non unā et ſubito, ſed pedetentim et ſucceſſive formari. Eo igitur tempore, quo albumen vitello accreverat, reperiebatur iam in oviductu mola illa e ſuo pedunculo propendens, quae caſu vel potius natura loci naſcenti albumini quam proxime ſeſe applicuit, et cum eo tandem ſimul putamine obtecta eſt. Sed eo ipſo tempore pedunculus, quo illa ſuſtinebatur, fortiter adhaerebat ſuo fundo. et videtur fuiſſe vas ſanguineum, in varicoſum tumorem morboſe dilatatum, quod, cum molimina partus acceſſerint, tenſione diſruptum ſupra ovum remanſit, et impedimento fuit, ne illud putamine penitus clauderetur. Inde ortum eſt foramen, per quod mola illa, ob ſuam magnitudinem, nullo modo extrahi potuit, et reſiſtentia ſua rupturam pedunculi effecit. Si autem pedunculus iſte ad ipſam putaminis ſuperficiem fuiſſet abruptus, et ovum cum mola intus contenta in to-

tum

tum putamine occluderetur; ex eiuſmodi ovo. poſtea incubato, omnino diſſormis aut et monſtroſus prodiiſſet pullus. In tanta ignorantia cauſarum, a quibus monſtra naſcuntur, phoenomen hoc lucem aliquam afferre videtur. cur aliquando in auibus etiam monſtra occurrant. Omne enim corpus extraneum eiusmodi magnitudinis, qualem ſupradicta habuit mola. ovo incluſum, omnino impedimento debet eſſe non modo pullo iam creſcenti, ſed et ipſi adhuc foetui, tenerrima ſua organa expandenti; cum, quo teneriora laxioraque ſunt primordia embryonis, eo facilius a preſſione adiacentis corporis vitientur; praeſertim eo tempore, quando gallina incubans ova ſua permiſcet, ut ſingula aequabilem experiantur calorem. Non ſola autem preſſio alieni corporis, ſed et ipſa anguſtia putaminis pullum diſſormem vel monſtroſum reddere poteſt; quando enim in unico ovo duo continentur vitelli. uti hoc in ovis avium domeſticarum ac praecipue gallinarum perſaepe obſervatur; tum fere impoſſibile eſt, ut ex tali ovo duo prodeant pulli plane perfecti, licet ambo vitelli perinde fuerint foecundati Hanc forte ob cauſam prudentes faeminae ova, binos vitellos continentia. nunquam gallinis ſupponunt. ut illa incubent; nihilominus. ante aliquot annos, vidimus hic Petropoli geminos pullos ex uno ovo excluſos' et omnibus membris inſtructos ſed tergis ſibi invicem adnatos; ita ut, dum alter pedibus inſiſtebat alter protenſis ſurſum ſuis artubus, dorſo eius neceſſario incumberet et moleſtiſſime agitaretur. Patet hinc, ſolam anguſtiam putaminis in cauſa fuiſſe, ut gemini pulli ſibi mutuo contigui tergis coaleſcerent, quemadmodum coaleſcunt poma, quae a floreſcentia ſe mutuo quam proxime tangunt.

ALCA

ALCA CAMTSCHATICA PROPOSITA.

Ab

JOHAN. LEPECHIN.

Conventui exhib. die 11 Octob. 1798.

Non omnia omnis fert tellus, iam veterum effatum eſt. Quotidiana nos docet experientia pro regionum diverſitate diverſa habitare animalia, diverſa reperiri vegetabilia, diverſa que e gremio terrae effodi foſſilia. Sic videmus remotiſſimam a nobis peninſulam Kamtſchatcam in regno vegetabili propriis ſuperbire plantis, exemplo Rhododendri Kamtſchatici, Heraclei Saccharini Spiraeae Kamtſchaticae; cet ſic novimus, in regno animali mare ipſam alluens, variis phocarum abundare ſpeciebus, quae alibi fruſtra quaeruntur. Quantas in piſcibus, praeſertim in genere Salmonum, obſervari varietates, abunde conſtat. Non minori diverſitate allici peregrinatores animalibus volatilibus, praecipue aquatilibus, docet nos hiſtoria Kamtſchatica ex ſchedis viri indefeſſi, beati Stelleri, et ex propriis obſervationibus per beatum Kraſcheninnicovium concinnata.

In hac hiſtoria legimus iniectam mentionem cuiusdam merguli marini, qui totus niger eſt atque criſtatus, et roſtro rubro donatus (*a*); ex quo facile colligere eſt, avem a

(*a*) Hiſtoriae Kamtſchatcae T. I. pag. 332. edit. Rhuten.

a laudato viro ſub nomine *ſenis nigri Stell*: propoſitam omnino eſſe ſpeciem nunc deſcribendam, quam a Domino Golicoff, mercatore ſtrenuo atque capturae lutrarum marinarum diverſique generis phocarum in inſulis inter Kamtſchatkam et Americam ſeptentrionalem ſitis per virum diligentem ipſiusque ſocium Dom. Schelechoff. intentus, varia producta, harum regiorum, quae quoque hiſtoriam Naturalem reſpiciunt, colligere curavit, obtinui. Prototypon huius, quamvis male ſit differtum, vermibusque exeſum, ſequentem tamen deſcriptionem ſubiectamque huic imaginem elicere permiſit.

Deſcriptio.

Habitus corporis, roſtri conformatio pedesque extra aequilibrium ſiti luculenter docent, avem noſtram ad genus Alcae Linn. pertinere.

Magnitudo totius avis non ultra pedem pariſinum excurrit.

Roſtrum fere conicum, pulchre cinnabarini coloris, ſed apice albicante.

Mandibula ſuperior dorſo convexo percurritur aciebus utrinque a ſinu apicis roſtri ad baſin usque itidem convexis, ſed verſus baſin magis patulis.

Mandibula inferior magis coarctata, oblique truncata.

Vertex capitis, gula, collum atque dorſum nigris cooperiuntur pennis, venter magis diluto nigrore reſplendet, transparente aliqua canitie, quae ſatis verſus inferiora conſpicuum eſt.

Alae itidem nigrae, aſt lituris brunneis obſcuris, praeſertim verſus plagam externam notatae.

In

In fronte eriguntur pennae anguſtae, longae, nigrae in criſtam verſus anteriora recurvatam, quas a plaga poſteriori concomitantur pennae albidae eiusdem naturae atque ſitus, ſed multo breviores.

Inter baſin doſtri et canthum oculi anteriorem in genis conſpicitur macula fere triangularis e pennis albiſſimis efformata, quae cum pennis retro criſtam nigram confluens, conſtituit quaſi faſciolam albam, quae verticem capitis nigram ſeparat. Retro canthum oculi internum, reperitur macula nigra fere rotunda, quae a pennis decurrentibus, verticem capitis tegentibus, efformatur, ex margine eius proveniunt pennae utrinque anguſtae, albidae, dependentes, quarum longiores verſus exteriora reflectuntur.

Pedes pone aequilibrium ſiti, livido colore tincti, et pro more generis natatorii.

Habitat in inſulis inter Americam Septentrionalem et Kamtſchatcam ſitis. Interdiu in mari gregatim circumnotans; noctu vero in cuniculis littoris ex rupium fiſſuris latitans. De modo aves has caprendi legi meretur ſupra laudatus Kraſcheninnicovius. (*a*)

(*a*) Loco citato.

OBSERVATIONES QVAEDAM CIRCA LAPIDES CALCAREOS

Auctore

BAS. SEWERGIN.

Conventui exhib. die 7 Junii 1798.

Inter corpora mineralia Imperii Roſſici, quae penitiori ſubiicere examini et quid notatu dignum offerant Academiae exponere quondam conſtitui, reperi nuper nonnulla digna mihi viſa quae naturae curioſis innoteſcerent. Singularem nempe illam Pyroſmaragdi proprietatem qua calefactus Smaragdino eoque ipſa ſub diurno luce conſpicuo colore lucet, dum intuerer: operae pretium me facturum eſſe exiſtimavi, ſi alia quoque Roſſica ex calcareorum ordine mine alia ſimili ſcrutinio exploraverim; et revera contigit mihi phaenomena iis Pyroſmaragdi ſimilia in eiusmodi quoque corporibus detegere, a quibus ea productum iri vix ac ne vix quidem ſuſpicari licuiſſet. Complures enim reperi, eosque puriores lapides calcareos vix ullo niſi aëreo acido imbutos, qui dum caleſcerent, ſmaragdino vel viridi et coeruleſcente colore lucerent, cum acidis tamen efferveſcerent, et penitus illis ſolverentur. Quae cum ita ſint: nondum certe in aprico eſt, ſit ne huius phoſphoreſcentiae origo ab acidi phoſphorici particulis, veluti in Apatite et calce phoſphorata Eſtremaduricnſi, an, quae et Cel. Crellii ſuſpicio eſt, ab aliis

aliis quibusdam particulis propriae indolis repetenda? Quae quidem poſterior ſententia eo veroſimilior eſſe cenſenda videtur, quod calx phosphorata, arte ſi praeparetur, ea proprietate deſtituatur.

Lapides calcarei huius indolis a me obſervati ſunt ſequentes.

1. *Calcareus Marmor lamelloſum vel micans;* Marmori ſalino Italorum externa facie ſimillimum. Color eius ex flavo albus; nitor exiguus ex parte non niſi a particulis micantibus interſperſis oriundus, textura granulato lamelloſa, fragmentis obtuſis indeterminatis, extremitatibus tenuioribus pellucidis tactu rudi. Character eius diſtinctivus eo potiſſimum abſolvitur, quod particulae eius granulares tantilla vi inter ſe cohaereant ut lapidis arenarii laxioris more facile ſeparari a ſe invicem queant. Reperi traditur prope caſtrum Sanara in Sibiria. Nonnulla eius fruſta maculis et raris venis coerulei coloris diſtincta ſunt. quas particulis cupri originem debere, experimenta docent. Paſſim quoque fruſta ſunt ſpathoſa; aliis etiam Tremoliten contineri animadverti.

Nonnulla lapidis huius ſpecimina conventui academico menſe Aprili huius anni iam exhibui.

In tenebris chalybe percuſſa Marmoris haec varietas ſcintillas rutilas ſpargit, in pulverem redacta et prunis inſperſa lucem coloris ſmaragdini vel coeruleo-viridis ſed parum diuturnam illam, edit; qualem tamen phosphoreſcentiam in alia marmorum varietate, nec compactorum neque micantium, ulla obſervare mihi licuit; ex quo colligere licet,

dari

dari marmorum varietates, quae particulis ciusmodi phosphoreſcentiae productricibus deſtituantur. Cum acido muriatico efferveſcit calcareus noſter et brevi eo ſolvitur, exceptis particulis quibusdam, quas ulteriori examine veram calcem phosphoratam eſſe reperi; unde id equidem concludo, marmor hoc lapidem eſſe ex calce acido aëreo imbuto et calce phosphorata mechanice admixtis compoſitum, perinde ac Celeb. Lowitz ſimile quid in Tremolite prope lacum Baikali obvio locum habere oſtendit, quem mechanice admixtam calcem aëratam continere experimentis comprobavit.

2. Paulo poſt, eandem proprietatem in alia quoque Marmorum varietate lamelloſa cum Tremolite mixta et Careliae indigena detexi, ubi hoc praeterea notatu dignum eſt, Tremolitem eſſe ſpathoſum et eadem ac Marmor gaudere proprietate, prunis ſcilicet inſperſum ſmaragdino colore in tenebris lucere.

3. *Spathum duplicans vel Criſtallus Iſlandica.* Spathum hoc calcareum pellucidum, colorem vini prae ſe ferens, cuius fruſta naturali cortice nudata obiecti per ea viſi imaginem duplicant. Haud ita pridem prope vicum Sargubae ad lacum Jukſba in diſtantia 20 ſtadiorum Ruſſicorum ab urbe Petroſawodſk detectum eſt; fruſta eius huc translata eaque ſatis magna ſuperficiem cortice ferrugineo cum asbeſto mixto plerumque obductam oſtendunt. In pulverem redacta et prunis inſperſa colore ſmaragdino lucent, hac que luce phosphorica ipſis adeo Pyrſmaragdis antecellunt, idque inſuper notatu dignum offerunt, quod cum acidis non minus efferveſcant et illis plane ſolvantur.

4.

4. Spathum calcareum commune, opacum, cuius duo ſpecimina examinare mihi licuit, unum album Catharinopolitanum; alterum ſublutei coloris prope lacum Baikali obvium et Baikalite a me olim deſcripto, nec non Mica priſmatica criſtalliſata mixtum. Ambo prunis inſperſa lucent colore viridi, qui tamen eò, criſtalli Islandicae longe debilior eſt. Ambo cum acidis effervefcunt.

5. Spathum calcareum ferrugineum forma piramidalo triedra criſtalliſatum et Kamenſki obvium in tenebris prunis inſperſum ſimili colore viridi lucet. Idem huic ſpathi locus natalis eſt, qui criſtallos ferri ochracei bruni piramidales triedras intus cavas progenerat, quorum et ſpecimina et deſcriptionem menſe Aprili praeterito Academiae tradidi.

Quae cum ita ſint patet: Pyroſmaragdum non unicum lapidem eſſe. qui ea gaudeat proprietate, ut prunis inſperſus ſmaragdino colore luceat; neque ipſa illa phosphoreſcendi proprietas in ſpatho duplicante, aliisque a me expoſitis ſpathi calcarei varietatibus, ab acido phosphorico, ut in Apatite proficiſci videtur cum nonnullas earum forti cum effervefcentia acidis plane ſolvi iam compertum ſit. Vtrum vero a corporum horum parte aliqua conſtitutiva, an a materia colorante particulari ipſis inhaerente origo iſtius phosphoreſcentiae repetenda ſit, dubius equidem haereo. Volatilem certe eſſe materiam iſtam inde patet, quod ſplendorem illum phosphoricum cito perdant iſti lapides, perditum denuo calefacti nunquam recuperent.

Sed quamvis his experimentis demonſtraverim fluorem et Apatiten non unicos lapides eſſe, qui hac proprietate praediti ſint, inde tamen omnia ſpathia calcarea huius indolis eſſe, erroneo iudicio concluderemus, quandoquidem nec

nec ſpathum calcareum luteum piramidale triedrum flvore ſpathoſo cubico mixtum, cuius elegantiſſima ſpecimina ex fodina Klitſchkinſkoy in Nertſchinſk extrahuntur, nec ſpatha calcarea in fodinis et lapidariis Oloretzi reperta, nec ſpathum calcareum griſeum diffuſum Catharinopoli natum, nec plura alia eiusdem loci Marmora ſpathoſa, neque demum Marmor compactum album Nertſchinſkienſe iſta phosphoreſcendi proprietate gaudere, inſtitutis experimentis reperi; atque memorabile omnino videtur proprietatem iſtam tot ſpathorum calcareorum et Marmorum ſpeciebus communem, neutiquam tamen omnibus competere; experimenta enim mea licet non niſi roſſica ſpectent mineralia: nullus tamen dubito, in exoticis quoque easdem proprietates detectum iri.

Marmor ſic dictum ſalinum cum pro calcareo primitivo communi conſenſu habeatur et noſter ille lapis calcareus granularis prope Samaram obvius acidum phosphoricum contineat; operae pretium eſt, idem experimentum cum aliis aliorum regionum marmoribus lamelloſis repeti, ut quid de eorum formatione ſentiendum eſſe videatur, ſolidiori argumento inde ſtabiliri queat. Quodſi enim acidum phosphoricum in regno minerali praeſertim in calcareis illis lapidibus obvium, e regno animali originem repetere, pateſceret; marmorum quorundam lamelloſorum formatio primitiva dubio haud mediocri implicari mihi videretur, quo ſane fieret, ut lapis iſte noſter calcareus Geognoſtica quoque utilitate Mineralogorum attentionem ſuo quodam iure ſibi vindicare poſſet.

Caeterum cum plurimi alii, hac qui proprietate praediti ſunt, lapides calcarei acidis cum efferveſcentia cito et plane

plane ſolvantur, hancque ob cauſam particulis heterogeneis minus mixti eſſe videantur; calcarei autem impuriores, veluti Marmora denſa, iſta proprietate deſtituantur; fallor, an in calcareorum puritate facili et prompto modo dignoſcenda, aliquid inde utilitatis practicae hauriri poteſt? Neque ſpes eſt nulla, fore ut ignibus quoque artificioſis iſta phosphoreſcentia commode inſervire queat.

Cum denique calci phosphoratae naturali et Pyroſmaragdo communis iſta propri tas ſit: monentur hoc experimento tyrones ut caveant ſibi, ne quos lucem illam viridem phosphoricam ſpargere vident lapides omnes Apatitides vel Pyroſmaragdos eſſe praecipiti iudicio putent, ut quoque niſi praevia ulteriori experimentorum indagine nihil hac in re ſtabiliri poſſe, ſibi nunquam non perſuaſum habeant.

MIRABIL.

JALAPARVM HYBRIDARVM CONTINVATA DESCRIPTIO.

Auctore

I. T. KOELREUTER.

Conventui exhibuit die 10 Dec. 1797.

Exp. XIII.

Ialap. vulg rubr. ♀ / longiſſ. ♂ } ♀.

Ialap. vulg. rubr. ♂.

An. 1769. d. 16. Iul. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1770. plantae tantum duae.

a.) Tubus floris 1″, 9 — 10‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Totus flos rutilus, cum notabili flaveſcente tinctura verſus loborum marginem. Oſtium tubi floris purpureum. Statura plantae ſat grandis, habitusque ad modum ♀ (Exp. I) adhuc non parum divaricatus; attamen rami ex ipſorum caulibus ſub angulis iam iam acutioribus egreſſi, quam in eadem. Folia adhuc craſſiuſcula, aſt iam intenſius viridia, quam

quamlibet adſpectu minus ſplendentia. Seminum bonorum, quae ſponte dabat, numerus non exiguus.

b.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Color floris idem, ac ♀, (Exper. 1.) ſed pallidior paullo, marginemque verſus flavedine intermixta conſpicuus. Oſtium tubi floris violaceum.

Planta haec habitus ſui ratione ac foecunditate cum a.) conveniebat.

Exp. XIV.

Ialap. vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♀.

Ialap. vulg. alb. ♂.

An. 1769. d. 19. Iul. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1770. plantae tantum quatuor.

a) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 7‴. latus. Totus flos egregie dilute violacens, ſeu purpureo violaceus: oſtio tubi floris purpureo. Planta fere altero tanto maior, quam vulg. alb. Caules ac ramos ſuos ſub angulo multum acutiori emittebat, quam eadem, hinc tota quaſi ſurſum porrecta. Idem ſat craſſi, articulisque fortibus ac nodoſis inſtructi. Folia glabritie ac colore iis ♂ iam valde ſimilia. Copia florum prodigioſa, ſeminaque foecunda non pauca.

b.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color floris, quem *Lilac* vocant; in medio ſtella ex albo flaveſcens, oſtiumque tubi violaceum. Statura

plantae paulo humilior, quam *a*), habitus autem totius, reſpectu coloris ſubſtantiaeque foliorum, cum matre ſua hybrida adhuc multum conveniens. Folia ipſius autumnum verſus multis maculis ferrugineis foedata ac in univerſum ſatis puſtuloſa. Foecunditas circiter, ut *a*).

c.) Tubus floris 1″, 8‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Totus flos e pallide violaceo rubicundus ſive intenſius *Lilac*. Oſtium tubi purpuraſcens. Plantae ſtatura circiter, ut *b*), multoque erectior, ſub angulis ſcilicet notabiliter acutioribus, quam ♂. Folia adhuc ſatis ſordide viridia ac pubeſcentia. Foecunditate *b*) par.

d.) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Totus flos violaceus, oſtio tubi obſcuriori. Rami huius plantae ad modum matris ſuae hybridae adhuc ſatis propatuli, hinc ſtaturae humilioris, quam *c*.), licet hac ipſa longitudine caulium ramorumque haud inferior fuerit. Folia ſordidius viridia adhuc, aſt iam glabra ſatis. Semina foecunda perpauca.

Exp. XV.

Ialap. {vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂.} ♀.

Ialap. vulg. flav. ♂.

An. 1769. d. 18 Iul. et ſequent. Flores plurimi.

Deſcriptio.

Prod. an. 1770. plantae duodecim.

a.)

a.) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flos e violaceo rubicundus ſive intenſius *Lilac.* Tota planta, longiflorae ad inſtar, ſibi ipſi permiſſae, longe lateque procumbens, ſeriusque florens. Folia ſordide viridia. Semina foecunda, non obſtante maxima florum copia, vix nonnulla; reliqui fere omnes una cum ſuis pedunculis decidui.

b.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus, adeoque peramplus. Color floris fere pallide carmeſinus, cum tinctura flaveſcenti vix notabili marginem verſus. Planta habitu erectior, maior altiorque vulg. rubra. Folia, ut in hac ipſa, intenſe viridia ac lucida. Flores, quoad maximam partem decidui quidem, parvo tamen numero ſemina bona dabant.

c.) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos pallide-violaceo-rubicundus, marginem verſus flaveſcenti leviſſime permixtus. Planta habitu ſatis humilis, ramis paucioribus ac, vulgaris in modum, erectioribus. Folia veſiculoſa, ſordide viridia. Semina foecunda ſat numeroſa.

d.) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus latiſſimus ſc. 1″, 9‴. Floris medium ſtella quaſi e violaceo carmeſina ornatum; limbus autem ipſe flaveſcenti colore notabiliter tinctus. Planta habitu ſuo ac magnitudine vulgari ſimillima. Folia intenſe viridia. Semina bona ſat numeroſa.

e.) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flos pallide flaveſcenti rubicundus, ac in medio ſtel-

la

-la ſtraminei coloris notatus. Planta, quoad habitum vulgari perſimilis, excepto maiori biſurcationum ramorum numero. Folia ſatis profunde viridia. Inter flores innumeros perpauci tantum, ſemine foecundo foeti.

f.) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1, 1‴ latus, adeoque ſatis anguſtus. Flos dilute carmeſinus, cum notabili tinctura flava marginem verſus. Plantà habitus humilioris, quoad diſtributionem ramorum vero a vulgari haud abludens. Color ac ſubſtantia foliorum inter ♀ et ♂ medium tenuere. Semina bona ſatis numeroſa.

g.) Tubus floris 1″. 1‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus, hinc ſatis anguſtus. Flos rutilus ſive cinnabarinus ac marginem verſus tinctura flaveſcenti permixtus. Planta omnium ex hac copula ortarum fere altiſſima, imo vulgari longe altior; directio ramorum vero magis perpendicularis, quam in eadem. Color ac ſubſtantia foliorum ut in praecedenti. Foecunda ſemina pauca numero.

h.) Tubus floris 1″. 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flos fere carnei coloris, in violaceum paululum vergentis, ac in medio ſtella ſtraminei coloris inſignitus. Planta craſſitie ac altitudine g.) adhuc ſuperans. Directio ramorum, ut in eadem. Folia ſordide viridia. Ceterum in ſummo fere gradu infoecunda, vixque unum alterumve ſemen bonum.

i.) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 1″ latus. Color floris e violaceo rubicundus, aſt pallidior paullo,

lo, quam *a*.) ac absque notabili tinctura flaveſcente. Planta habitu ſuo ad vulgarem valde accedens; Folia ſimiliter. In ſummo fere gradu infoecunda: nam ſemina bona vix nonnulla in tota planta reperta ſunt.

k.) Tubus floris 1″, 11‴ longus, adeoque omnium longiſſimus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color, ut in *i*.) Statura plantae humilior, aſt ſatis erecta; caules valde pauci ac tenues, ramis paucioribus. Color ac ſubſtantia foliorum, ut in longiflora, ſimulque veſiculoſa. Sterilitatis ratione *i*.) non inferior.

l.) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Planta altitudine vulgarem multum ſuperans, ramis paucioribus quidem, aſt ſatis craſſis ac erectis. Folia inter longifl. et vulg. media. Seminum bonorum numerus parcior.

m.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color floris e rubicundo flaveſcens, in aurantium valde inclinans, cum ſtella in medio pallide carmeſina. Planta habitu ſuo ad vulgarem valde accedens, attamen caulibus ramisque paucis inſtructa. Folia e flaveſcenti viridia. Semina foecunda ſatis numeroſa.

Exp. XVI.

Ialap. { vulg. alb. ♀. / longifl. ♂. } ♀.

Ialap. vulg. alb. ♂.

An. 1771. d. 10 Iul. et ſeq. Flor. plur.

De-

Deſcriptio.

Prod. anno 1775. planta tantum unica.

Tubus floris 1″, 10‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus: lobis oblongioribus adhuc, ſatisque fiſſis. Totus flos niveus. Genitalia utraque longiſſima, e flore longe prominentia. Planta in univerſum matri ſuae, ſc. vulg. albae, iam rurſus propinquior quidem attamen ambitu adhuc ſatis eximio caulibus ramisque craſſis ac divaricatis, foliisque maioribus ac ſaturate viridibus inſignis; nihilominus tamen inſoecundior, quam ſub priori ſuo ſtatu hybrido: tota quanta nempe valde exiguum bonorum ſeminum numerum proferebat, haecque ipſa globoſiora, ſuperius impreſſa, iisque longiflorae adhuc ſatis ſimilia. Pondus plantae 4. ℔, 17. lot. Radicis 1. ℔, 22. lot.

Exp. XVII.

Ialap. { vulg. flav. ♀. / longifl. ♂. } ♀.

Ialap. vulg. flav. ♂.

Anno 1774 menſ. Iul. Flor. plures.

Deſcriptio.

Prod. anno 1775. plantae tres, ab iis Exp. inverſi XXII, inferius indicandi, haud multum abludentes.

Exp. XVIII.

Ialap. vulg. rubr. ♀.

Ialap. { vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♂.

Anno 1769. die 19. Iul. et ſeq. Flores plurimi.

De-

Deſcriptio.

Prod. anno 1770. plantae novem.

a.) Tubus floris $1''$, $7'''$ longus; Limbus $1''$, $8'''$ latus, adeoque latitudine inſignis. Totus flos vere roſei coloris, oſtio tubi ſanguineo. Planta ambitu grandis, ac matre ſua naturali ſc. vulg. altior, ramis numeroſis longe lateque expanſis. Folia iam ſatis profunde viridia ac glabra. Per totam aeſtatem in ſerum autumnum usque indeſinenter florebat, floresque producebat innumeros, eosdemque longe plures, quam pater ipſius hybridus, ac, licet eorum plurimi caſſi defluxerint, foecundorum tamen ſeminum copiam valde notabilem largiebatur.

b.) Tubus floris $1''$, $4'''$ longus; Limbus $1''$, $3-4'''$ latus. Flos ipſe roſeus, cum tinctura leviter flaveſcente, oſtioque tubi purpureo. Planta altior *a*), adeoque altitudine vulgari longe ſuperior, ramos ſuos ſub angulis multo acutioribus, hincque magis perpendiculares exſerebat, quam haec ipſa. Folia e luteo viridia ac lucida. Copia florum eorundemque foecunditas, ut in *a*). Ramuſculi tenniores erant, quam alias in vulg. eſſe ſolent. Ceterum utraque habitu ſuo toto ad vulgarem iam valde accedebat.

c) Tubus floris $1''$, $5-6'''$ longus; Limbus $1''$, $5-6'''$ latus. Flos e rubicundo violaceus, cum tinctura notabiliter flaveſcente laborum marginem verſus. Oſtium tubi violaceum. Planta *b*) paulo altior, ramis licet multo magis divaricatis, quam vulg. Foliorum color inter ♀ et ♂ medius Florum numerus eorumque foecunditas fere ut in *a*) et *b*).

d) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Totus flos egregie e violaceo rubicundus, ſive intenſius *Lilac*: oſtio tubi violaceo. Planta reſpectu magnitudinis ac diſtributionis ramorum *b*) ſatis ſimilis. Folia dilute viridia, floresque valde numeroſi. Seminum foecundorum copia valde notabilis.

e.) Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flos eleganter ac vivide roſeus: oſtio tubi purpureo. Planta magnitudine ac diſtributione ramorum vulgari valde reſpondens. Semina foecunda pauca.

f.) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos e concolor, more longiflorae plicatus ac ſatis profunde inciſus. Planta haec, quamlibet ramorum numero inferior *a*) et *b*), alias tamen omnes ex hac copula procreatas altitudine longe ſuperabat, utpote vulgari altero tanto altior. Color foliorum ramorumque diſtributio circiter, ut in hac ipſa. Caules ramique longiores ac tenuiores cum *b*) ipſi communes erant. Foecunditate *c*) par.

g.) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flos eleganter ac vivide roſeus cum tinctura flaveſcenti vix notabili. Oſtium tubi purpureum. Planta habitu ac magnitudine *b*) et *d*) valde conveniens. Folia ſordide viridia ac pubeſcentia, cum e contrario in plurimis aliis glabriora fuerint. Semina foecunda pauca.

h.) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 0‴ latus. Flos ſpecioſe ac vivide roſeus, absque ulla alterius coloris miſtura. Oſtium tubi coloris paullo intenſioris.

ris. Planta habitu toto ad vulgarem valde accedens. Semina foecunda ſat numeroſa.

i.) Tubus floris 1″, 1 — 2‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flos fere aurantii coloris, cum ſtella oſtioque tubi purpuraſcentibus. Planta haec pariter vulgari non abſimilis, licet paullo altior, ramisque longiusculis ac gracilioribus inſtructa fuerit. Foecundorum ſeminum copia valde notabilis.

Exp. XIX.

Ialap. vulg. alb. ♀.

Ialap. { vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♂.

Anno 1769. die 19 Iul. et ſeq. Flores plurimi.

Deſcriptio.

Prod. anno 1770. plantae quinque.

a.) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flos totus albus, cum ſtillura e violaceo rubicunda vix notabili. Oſtium tubi purpureum. Planta habitus altioris magisque verticalis, quam vulgaris. Folia inter ♀ et ♂ media. Seminum bonorum numerus, non obſtante ingenti florum copia, valde exiguus.

b.) Tubus floris 1″, 4 — 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos *a*) concolor: oſtio tubi e violaceo carmeſino elegantiſſimo. Calyx inſolenter magnus laciniis longis et acuminatis. Planta toto ſuo habitu ad vulgarem proxime accedabat, exceptis foliis ſaturatius

tius virentibus, lucidioribus, margineque introrſum flexis. Foecunditas, ut in *a.*).

c.) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 6 — 7‴ latus. Totus flos ſpecioſiſſimus, dilute violaceus. Habitus, ut in *b.*), folia autem inter ♀ et ♂ media. Seminum bonorum numerus permagnus.

d.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Totus flos roſeus, ſive pallide carmeſinus. Habibus plantae circiter ut in vulgari, excepto ambitu maiori. Folia e flaveſcenti viridia ac ſubnitida. Seminum foecundorum numerus ſatis magnus.

e.) Tubus floris 1″, 3 — 4″ longus; Limbus 1″, 3 — 4‴ latus. Flos albus cum violacei valde diluti mixtura. Oſtium tubi ſaturate violaceum, ut in longiflora Ceterum habitus plantae *d.*) maxime affinis. Semina foecunda vix nonnulla.

Exp. XX.

Ialap. vulg. flav. ♀.

Ialap. { vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♂.

Anno 1769. die 18 Jul. et ſeq. Flores plurimi.

Deſcriptio.

Prod. anno 1770. plantae quinque.

a.) Tubus floris 1″, 4″ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Totus flos e violaceo carmeſinus ſive ſaturate roſeus, in violaceum vergens, absque notabili flaveſcentis mi-

mixtura. Planta facile omnium ex hac copula maxima et robuſtiſſima. Diſtributio caulium ramorumque ſub angulis obtuſioribus, longiſlorae ad inſtar, adhuc ſatis divaricata. Folia ſordidius viridia. Seminum bonorum numerus non exiguus.

b.) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Floris color, quem *chamois* vocant, ſive chartulis iſtis haud abſimilis, quibus auri ſoliola interponere ſolent bractearii. Tota planta magnitudine ac diſtributione ramorum ad vulgarem in genere maxime accedens, colore vero luteolo caulium ac ramorum ad ♀ in ſpecie, absque ullo rubicundi veſtigio. Semina foecunda permulta largiebatur, quamlibet prodigioſa eius florum copia haud foecundata defluxerit.

c.) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Totus flos e violaceo rubicundus, absque flaveſcentis coloris admixtione. Plantae habitus a vulgari parum diverſus. Foliorum color inter vulg. et longiſl. medius. Foecunditate *a*) par.

d.) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flos e purpuraſcente flaveſcens, cum ſtella in medio violacea. Planta quidem non multo maior vulgari, verum in numeroſiores ramos ſubdiviſa. Folia e flaveſcenti viridia. Foecunditas, ut in *b.*).

e.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos e violaceo rubicundus ſive intenſius *Lilac*, absque notabili flaveſcentis coloris admixtione. Planta vulgari altior. Foliorum color inter vulg. et longiſl. medius. Semina bona ſatis numeroſa.

Exp.

Exp XXI.

Ialap. vulg. alb. ♀.

Ialap. { vulg. flav. ♀. / long fl. ♂. } ♂.

Anno 1774. menſ. Iul. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. anno 1775. plantae duae.

a.) Folia plantae iunioris veſiculoſa. Tubus floris 1″, 9‴ longus, inferius anguſtus valde, ſuperius amplus ac incurvus. Limbus 1′. 7 — 8′′ latus. Flos albidus, venulis e violaceo rubicundis ſtriatus. Oſtium tubi una cum genitalibus utriusque ſexus e violaceo purpurei coloris. Calyx ſatis longus.

b.) Tubus floris 1″, 5½‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Flos in univerſum albidus aſt fere ubique cum violaceo purpurei coloris umbra. Oſtium tubi ac genitalia, ut in a.). Calyx valde magnus ac amplus.

Exp. XXII.

Ialap. vulg. flav. ♀.

Ialap. { vulg. flav. ♀. / longifl. ♂. } ♂.

Anno 1774. menſ. Iul. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. anno 1775. plantae quatuor, ſub iuvenili aetate foliis veſiculoſis inſtructae.

a.)

a.) Tubus floris 1″, 3 — 4‴ longus; Limbus 1″, 4 — 5‴ latus. Flos ſtraminis colore. Calyx parvus, laciniis anguſtis arcteque tubo adpreſſis.

b.) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos *a*) concolor fere ſeu ſubalbidus. Calyx parvus.

c.) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos carneus, oſtio tubi una cum genitalibus utriusque ſexus e violaceo carmeſini coloris.

d.) Tubus floris 1″, 8‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Totus flos ſulphureus. Calyx magnus.

Exp. XXIII.

Ialap. { vulg. rubr. ♀.
longifl. ♂. }

propr. pulv. conſperſ.

Anno 1769. die 4. Aug. et ſeq. Flores plurimi.

Deſcriptio.

Prod. anno 1770. plantae octo.

a.) Tubus floris 1″, 9 — 10‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flos ipſe albus, oſtio tubi purpureo, limbo plicato, ac, longiflorae inſtar in lobos ac crenas profundius inciſo. Piſtillum ex flore longiſſime prominens. Planta toto ſuo habitu longiflorae proximior, ambitu peramplo, caulibus ramisque divaricatis. Folia etiam ſordidius viridia, firmiorisque ſubſtantiae. In ſummo gradu ſterilis, licet foecundarum tam naturalium, quam artificialium multas habuiſſet vicinas.

b.)

b.) Tubus floris 2″ longus, ac ſolito amplior. Limbus 1″, 2‴ latus. Tubus integer e bruno purpuraſcens. Flos e violaceo carmeſinus, elegantiſſimus. Planta toto ſuo habitu longiflorae quidem proximior, folia autem ipſius e flaveſcenti viridia, ſubſtantiaeque tenerioris, quam a) Caules ac rami pauciores, attamen ſat longi fere undique rubedine ſuffuſi. Semina foecunda perpauca ſerius demum protulit.

c.) Tubus floris 1″ tantum longus ac inſolenter incurvatus. Limbus 10‴ tantum latus. Flos e violaceo rufus, cum ſtella in medio in violaceum vergente. Piſtillum longiſſime productum. Tota planta pygmaea, ramis brevibus procumbentibus, ac undique rubore ſuffuſis. Folia e flaveſcenti viridia, praecocius emarcida, ita, ut caules ac rami iis tandem denudati, geniculisque ipſorum ſolutis et ipſi conciderint. Pauci, quos produxit planta, flores infoecundati delapſi ſunt omnes. Radix, ad modulum plantae, pariter exilis.

d.) Tubus floris 2″, 4‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Totus flos e pallide-violaceo rubicundus ſive *Lilac*, valde plicatus, ac in lobos ſatis profundos et concavos diffiſſus. Planta haec tota valde pubeſcens, caulium ſitu fere horizontali longiflorae multum aemula. Rami e contrario ſatis erecti, ac longiſſimi, numeroſique. Folia ſordide viridia ac veſiculoſa. Semina foecunda perpauca.

e.) Tubus floris 2″, 2‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos e pallide violaceo rubicundus ac fere roſeus. Tota plan-

planta vaſti ambitus, eiusdemque habitus, ut *d.*). Folia autem ſaturatius viridia, glabriora, minusque villoſa. Semina foecunda perpauca.

f.) Tubus floris 2″ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flos ſaturate roſei coloris, lobis ſatis plicatis. Magnitudine ac diſtributione caulium ramorumque inter vulg. et longifl. media planta. Folia ex atro viridia, ſubſtantiae ſpiſſioris, ac valde veſiculoſae. Ceterum tota planta pilis denſius obſita. Seminum foecundorum numerus perparvus.

g.) Tubus floris 2″, 6‴ longus, ac *b.*) inſtar ſolito amplior. Limbus 1″, 4‴ latus. Flos pallide violaceus, tubo e bruno purpuraſcente. Laciniae calycis longiſſimae, graciles et acuminatae. Planta ſitu fere horizontali ambituque vaſto caulium ramorumque craſſiorum, quorum multi erant, longiflorae aemula. Folia ſordide viridia. In ſummo gradu infoecunda.

h.) Tubus floris 2″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6 latus ac planus. Flos albidus, violaceo intermixtus. Oſtium tubi violaceum. Planta habitu ac magnitudine *f.*) quidem ſimilis, aſt ramis paucioribus onuſta ac villoſior. Folia autumnum verſus maculis rubiginoſis obſeſſa. Flores non ſolum omnes, ſed plurima etiam folia mature ſatis, imo ipſi quoque rami tandem delapſi: hinc in ſummo gradu infoecunda.

Exp. XXIV.

Ialap. { vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♀.

Ialap. longifl. ♂.

Anno 1769. d. 9. Aug. et ſeq. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 177[illegible]. plantae duae.

a.) Tubus floris 2'', 7' longus; Limbus 1'', 7''' latus. Flos niveus, coloris e violaceo rubicundi umbra quaſi tinctus, lobis, more longiflorae, profundius iam fiſſis ac crenatis, oſtioque tubi ſaturatius violaceo. Semina bona, quae ſponte dabat planta, facie iis longifl. iam ſimiliora, quam ſub priſtino ſtatu hybrido.

b.) Tubus floris 2'', 6''' longus; Limbus 1''' latus. Flos totus niveus; lobis profundius adhuc inciſis magisque plicatis, quam *a*), oſtio tubi egregie violaceo. Semina conſimilia, aſt ſuperis impreſſa, urnulae forma. De reliquo plantae hae duae, ſub primo ipſarum gradu aſcendente, tota habitu ac viſcoſitate ad longifloram iam valde accedebant, tantamque cum ea ſimilitudinem prae ſe ferebant, ut pro genuinis facile quivis primo obtutu eas habuiſſet. Odor florum fragrantior, quam ſub priore ſtatu hybrido. Folia quoque petiolis iam brevioribus inſtructa, cordata magis, colorisque ſordidius ac e flaveſcenti viridis. Ambae etiam tam ſponte quam pulvere antherarum longiflorae iterata vice conſperſae, haud exiguum bonorum ſeminum numerum dedere. Hinc nihil amplius obſtabat plenariae Jalapae vulgaris rubrae in longifloram transmutationi, quam quidem, ut iam in priori diſſertatione eius mentio facta eſt, ſubrepetita ſingulis annis fecundatione in octavum usque gradum aſcendentem feliciter proſecutus ſum, ſub quo vel ſcrupuloſiſſimus inveſtigator inter hanc arti-

artificialem et genuinam, tam ratione externae ſimilitudinis, quam foecunditatis, vix notabilem aliquam differentiam detegere potuiſſet.

Conſectaria.

Ad Exp. XIII. De plantis hisce paucioribus, quas ex hac copula, obtinui, quodammodo idem valet, quod de iis Exp. XVIII. tanquam inverſo, inferius dicetur. Inſolens, verum peramoenus color *a.*) hic praecipue notandus: ulteriori argumento, experimenta primi gradus deſcendentis vel aſcendentis, unâ cum aliis his ſimilibus, innumerarum varietatum fontes eſſe inexhauriendos.

Ad Exp. XIV. Experimentum hoc inverſum eſt Exp. XIX. Habitus verticalior *a.*), prodigioſaque florum egregiorum copia hic praecipue notari merentur.

Ad Exp. XV. Omnes hae plantae in univerſum ad ſimilitudinem vulgaris iterum plus minusve acceſſerunt; interea tot tantaeque inter easdem occurrebant differentiae, ut exinde clarius iterum eluceſceret, quam varie natura generationis aequilibrio in primo gradu deſcendente ludere ſoleat. Teſtantur id inter hasce plantas memorabilis diverſitas habitus magnitudinis, partiumque ipſarum proportionis; porro color florum maxime varius, eorumque inaequalis foecunditas. Variae quoque harum plantarum ſingulari aliqua proprietate prae ceteris emicabant, v. gr. *a.*) floreſcentia ſeriore, ſitu caulium ramorumque magis horizontali, quam ſub ipſarum primo ſtatu hybrido; *d.*) limbo florum latiore quo genuinam matrem ſuper-

peravit. *f.*) *g.*) *l.*) limbo ſolito multum anguſtiore, quam ſub priore ſtatu hybrido, licet ex hac copula contrarium potius exſpectandum fuiſſet *g.*) et *h.*) extraordinaria plantae altitudine ac habitu magis verticali, quam vulg *l.*) colore florum plane ſingulari. Quod ad foecunditatem attinet, partim lucratae ſunt aliae, partim plus perdidere aliae, quam prius, ut ſub primo gradu deſcendente id ſaepius fieri ſolet.

Ad Exp. XVIII. Omnes hae plantae maiorem affinitatis gradum cum matre ipſarum genuina quam cum patre hybrido, vel etiam cum longiflora naturali habebant; cumque hoc experimentum, ſi influxum diverſorum colorum vulgaris excipias, certo reſpectu cum Exp. XIX, XX et XX, ut et cum Exp inverſo XIII, XIV et XV unum idemque ſit, plantas exinde prognatas his in genere reſponſuras, iisdemque proprietatibus praeditas fore, praeſupponendum erat. Vis vegetativa nonnullarum harum plantarum extraordinarie aucta, in ſpecie *a*) et *b*), quam etiam in variis experimentorum mox dictorum individuis obſervavi, magna diverſitas habitus ac diſtributionis caulium ramorumque, multifaria florum varietas, eorundemque eximia pulchritudo, denique varii foecunditatis gradus, modo auctae valde modo imminutae, momenta ſunt attentione digniſſima. Color florum aurantius *i.*) hic praecipue notabilis cum ad hanc copulam non vulg. flava, ſed rubra pro matre aſſumpta fuiſſet.

Ad Exp. XIX. Omnia huius copulae individua ab iis Exp. XX, quoad praecipua momenta, haud abludebant, prae-

praeterquam quod influxus coloris albi ♀ ſpeciatim effecerit. Eorum nonnulla pulchritudine florum prae ceteris conſpicua, praeprimis *b.*) et *c.*) In *b.*) calyx ſolito maior aberrationem exhibet notabilem.

Ad Exp. XX. Cum hoc mere inverſum ſit Exp. XV, inde procreatas plantas cum illis in genere conveniſſe, diverſasque proprietates ſibi communes habuiſſe, ne mireris. *b.*) ob ſingulariſſimum floris colorem praecipue attendenda.

Ad Exp. XXII. Hic duplex influxus coloris flavi ♀ in liberos hybridos haud dubius eſt.

Ad Exp. XXIII. Ex eventu huius experimenti certo certius conſtat, naturam hic veluti exhauſtam agere, quaſi exlegem ſylveſcere, in monſtra niti, ac fine ſuo ſaepius excidere: plantae etenim inde prognatae partim in ſummo gradu infoecundae, partim minori foecunditate donatae erant, quam ſub priori ſtatu hybrido. Inſolens amplitudo tubi floris in *b*) et *g*); ſtatura pygmaea *e.*), piſtillum longius protenſum in *a.*) et *c.*), veſiculoſa foliorum ſubſtantia *f.*), calyx praeternaturalis *g.*) rubigo foliorum morboſa in *h.*), praematurum foliorum cum ſuis ramis decidium in *c.*) et *h.*), huius degenerationis maniſeſtiſſima ſunt indicia. Ceterum in hoc experimento ſemen maſculinum ♂ ſive longiflorae ſuper foemininum ♀ ſive vulg. rubrae ſuperpondium aliquod obtinuiſſe, plurimae eiusmodi teſtantur plantae, utpote illi in univerſum iam ſimiliores quam prius: id quod vel ex menſura florum, vel ex aliis circumſtantiis, quae in ipſa ſin-

ſingulorum individuorum deſcriptione occurrunt, ſatis ſuperque elucet. Quisquis varietates maxime ſingulares obtinendas ſibi optat, plantas hybridas, nonnihil foecundas, proprio ipſarum pulvere maſculo conſpergere, idque vel per ſubſequentes generationes repetere non taedeat; ſane hoc experimento plus, quam ullo alio, proficiat, meſſemque faciet largiſſimam.

MÉMOIRE
SUR LA PIERRE DE POIX
OU
PISSITE DE SIBÉRIE.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 30 Mai, 1799.

Un de nos Minéralogiſtes les plus diſtingués, Mr. le Prince de *Gallitzin*, dans ſa lettre à Mr. de *Zimmermann* ſur les obſervations de voyages de Mr. *Spallanzani*, en parlant de la *pierre de poix*, s'exprime là-deſſus (pag. 21.) de la manière ſuivante: " C'eſt encore une ſubſtance, dit-il, qu'on n'a jamais rencontrée en grandes maſſes ni ailleurs que parmi les produits *volcaniques* ou dans leur voiſinage." — Une déciſion ſi générale m'a frappée quoique je n'ignore pas que pluſieurs Naturaliſtes, entre autres feu Mr de *Fichtel*, ont taxé p. ex. toutes les Piſſites d'Hongrie de pures volcaniques.

Il ſe peut bien qu'une partie de pierre de poix doit ſon origine au feu; mais les productions de la Nature d'un pays ont ſouvent quelques choſes de particulier, qui ne ſe

trouve

trouve pas dans l'autre, et c'eſt juſtement le cas de la *Piſſite* de Sibérie, qui n'eſt ſûrement pas volcanique. En outre il eſt connu, que dans tout ce grand pays, hors la presqu'isle de *Kamtſchatka*, il n'y a point de volcans ni éteints ni brulans; il y en devoit avoir pourtant, ſi cette pierre n'exiſtoit que par production volcanique, parceque ce pays eſt aſſez riche en belles pierres de poix. Les circonſtances dans les quelles ce foſſil s'y trouve meritent donc bien d'être décrites avec plus d'exactitude qu'on n'a pas fait jusqu'à préſent. Mais il faut remarquer d'abord qu'il y a trois endroits en Sibérie, où ſe trouvent des *Piſſites*.

Premier endroit.

Le premier eſt aux monts *Ourals* aux environs du village de *Mourſinsk*, fameux par la grande quantité de belles *Amethyſtes* qui s'exploitent dans ſon voiſinage; avant d'y arriver ſur le chemin de *Cathérinebourg* on trouve le village de *Schaïtansk*, & c'eſt tout près de celui-ci à coté droit dans une forêt de ſapins, que ſe trouve de la pierre de poix dans une roche, qui approche beaucoup au Gneiſs compacte, conſiſtant d'une grande portion d'argille endurcie, de grains de Quartz & quelques points de Feldſpath & de Mica, *). La pierre de poix n'y exiſte cependant qu'en petites veines, dont l'épaiſſeur ne ſurpaſſe guere deux pouces; leur direction eſt tantôt perpendiculaire, tantôt plus ou moins inclinée vers l'horizont; mais comme on n'y a creuſé que dans une profondeur de deux archines, on n'en peut pas encore bien juger. Quant à la ſurface du terrein

*) Dans cette roche il y a auſſi quelques petites veines de Galène de plomb.

rein il eſt compoſé tout entier des roches primitives, par ex. de Granit, de Gneiſs, de ſerpentine, de pierre à fourneaux &c.:

(La deſcription de la Piſſite de cet endroit voyez dans la Table ci-jointe N°. 1mo).

Second endroit.

Le ſecond endroit où j'ai découvert une autre varieté de Piſſite eſt aux monts *d'Altaï* aux environs de la riviere *Tſchariſch* ſur la montagne où ſe trouve l'ancienne mine de cuivre appellée *Mourſinskaya* qui a été exploitée pendant le tems que feu Mr. *Demidof* etoit poſſeſſeur de toutes les mines altaïques. A la pente occidentale de cette montagne, presque iſolée dans un pays peu montagneux & qui s'éléve à une hauteur conſidérable, ſe trouve une couche de pierre de poix, dont l'epaiſſeur va de 4 jusqu'à 6 pouces.

La partie de la montagne, qui contient le minérai, conſiſte d'une maſſe de grenat compacte jaune & brunâtre, qui n'eſt guere criſtalliſée, que dans les fentes & aux cavites. Sur cette maſſe grenatique ſont adoſſée des roches primitives & ſecondaires comme du Siénite, de pierre calcaire compacte & de la breche ſiliceuſe. La roche grenatique eſt entrecoupée de ſilons de Quartz, de Spath calcaire & d'argille de differentes couleurs, dans lesquelles le minérai eſt diſperſé; & c'eſt auſſi parmi ceux-ci, que ſe trouve la couche de Piſſite, dont la trouvaille eſt pourtant trop recente, pour en pouvoir bien juger.

La déſcription extérieure de la pierre de poix d'ici ſe trouve dans la Table N^{ro}. 2do.

Troiſieme endroit.

Le troiſieme endroit, le quel eſt en même tems auſſi à pluſieurs égards le plus important, de tous ceux où ſe trouvent des pierres de poix en Sibérie, eſt celui de la minière de *Nicolaeſsk*, riche en mines de plomb argentifères. Elle eſt ſituée aux dites montagnes altaïques dans les environs de la riviere *Ouba.* On trouve ici des travaux très-anciens, qui ſont d'une importance conſidérable; mais ce qui eſt bien curieux eſt, que la pierre de poix fait les liſières du ſilon de minerai, & qu'elle ſe trouve avec celui-ci encaiſſée dans la pierre de corne.

Pour mieux démontrer que cet endroit, le plus abondant en pierre de poix en Sibérie, ne ſoit point du tout volcanique, j'ai joint ici un deſſein, qui repréſente en profil l'intérieur de cette mine importante avec toutes ſes roches, dont elle eſt entourée, & les quelles on a reconnu non ſeulement par des recherches à la ſurface du terrein, mais plus encore par les travaux très etendûs dans ſon intérieur, & ſurtout par une galérie capitale, appellée *Alexandroſskaya.*

1.) Cette galérie a été commencée au niveau d'un petit ruiſſeau premièrement ſur une diſtance de 25 toiſes par une couche d'argille marneuſe molle & blanchâtre, melée de petits cailloux de Quartz & de pierres de corne.

2.) Après cette couche vient une autre de la même argille, mais plus endurcie & entremelée de grands fragmens de pierre de corne, en partie arrondis.

3.)

3.) Vient enſuite une couche de Porphyre, dont la baſe eſt une Iaspe verdâtre, tirant ſur le gris. parſemé de points de feldſpath blanchâtre, non pas à la verité en grande quantiié, mais très bien à diſtinguer.

4.) Là-deſſus on trouve une grande maſſe de pierre de Corne, dont l'épaiſſeur va jusqu'à 52 toiſes; cette pierre eſt d'une couleur griſe, rougeâtre ou brunâtre, très-ferrugineuſe; elle eſt traverſée non par des veines quartzeuſes, comme il arrive à l'ordinaire aux pierres de cornes des monts d'altaï, mais de petits filons de ſpath *calcaire*. Elle eſt d'ailleurs une veritable pierre de corne, très-dure, demitranſparente aux coins & écailleuſe à la caſſure; auſſi eſt-elle entaſſée en grandes maſſes fendues en toute direction.

5.) Ayant percé cette roche on trouva un filon de mine de cuivre d'une toiſe de puiſſance, conſiſtant en ocre brunâtre endurcie avec du verd de montagne, & de bleu de cuivre, dont le dernier eſt quelquefois criſtalliſé & reuni en globes, qui ſont ſtriées dans l'intérieur.

6.) Immediatement après ce filon vient une couche, dont l'epaiſſeur va de 10 jusqu'à 40 toiſes, & qui fait le parois ſupérieur du filon. Cette couche conſiſte pour la plus grande partie de différentes varietés de Piſſite entremelée d'argille blanche, griſâtre & jaune. La pierre de poix ſe trouve dans cette couche en morceaux amorphes, dont la grandeur n'excede guère celle d'une tête d'homme; quelquefois pourtant ontrouve des maſſes plus grandes; leur figure n'eſt pas arrondie, mais plus ou moins anguleuſe, ayant la ſurface très inégale; auſſi n'ont-ils guère une co-

 herence

herence parfaite entre eux, puiſque l'argille a empeché pour la plûpart leur réunion.

7.) Sous cette couche de pierre de poix ſe trouve le filon, conſiſtant d'Ocre de plomb argentifer & très ferrugineux, de couleur jaune, rougeâtre brune & griſe, entremelée de grains de quartz & de pierre de corne. Ce filon eſt ſi riche en minérai, qu'on en a dejà tiré 790 poudes 2 liv. 07 $\frac{1}{4}$ ſol. d'argent & en 1774 il y en avoit encore, ſelon un calcul fait ſur la quantité connue du minérai, 5454 poudes 30 livres de ce métal.

8.) Le parois inférieur conſiſte auſſi d'une couche pareille de Piſſite, mais qui n'eſt pas ſi large & epaiſſe, & dont la pierre de poix eſt plus colorée étant pour la pluspart ſi tachetée qu'elle reſſemble beaucoup à la breche.

9.) Sous cette couche on trouva une roche porphyritique, dont la baſe eſt une Hornbleinde presque compacte melé de grains de Quartz, de Feldſpath & quelques parcelles de Mica.

10.) Dans cette roche ſe trouve auſſi un autre petit filon de cuivre de la qualité ſusdite, mais très-pauvre en minérai.

11.) Enfin vient une roche de pierre de corne ſur laquelle, comme on voit très bien à la ſurface du lieu, non ſeulement la couche de porphyre, mais auſſi toute la maſſe du filon avec les parois de Piſſite eſt addoſſée. Cette montagne au pied de la quelle ſe trouvent les travaux de la minière, s'éléve ſur une hauteur à peu près de 30 toiſes, & conſiſte d'une véritable pierre de corne griſâtre parſemée de grains de Quartz & de petits criſtaux de Feldſpath.

Voi-

TABLE

Contenant la deſcription exterieur des Piſſites de Sibérie.

No.	Noms des pierres.	Couleur.	Forme.	Caſſure.	Tranſparence.	Dureté.	Tenacité.	Trait.	Attouchement.	Odeur.
	Aux monts Ourals. Piſſite de Schaitanſk.									
1.	1e. varieté - -	brun foncé, melé de rouge, de jaune foncé & de blanchâtre.	indeterminée.	inégale tirant ſur le concoide; éclat de poix.	demi-tranſparent en petites lames & aux coins.	donne quelques etincelles frappé contre le briquet.	fragile.	difficile à gratter.	gras.	argilleuſe etant humecte par l'haleine.
	Aux monts d'Altai. Piſſite de Mourſinſk									
2.	1e. varieté - -	gris très foncé, melé de brun, de rouge, de jaune & de blanchâtre, couvert d'une couche mince de verd de montagne.	la même	inégale, à peine tirant ſur le concoide; éclat de poix.	demi-tranſparent aux coins.	donne quelques étincelles contre le briquet.	fragile.	difficile à gratter.	un peu gras, mais inégal.	argilleuſe.
	Piſſites de Nicolaéſk. Piſſites unicolores.									
3.	1e. varieté - -	jaune pâle reſſemblant parfaitement à la couleur de paille.	la même	concoide; éclat de poix approchant à celui de verre.	demi-tranſparent aux coins.	fait feu contre le briquet, mais pas vivement.	très-fragile.	facile à gratter donne une poudre blanchâtre.	un peu gras & poli.	argilleuſe.
4.	2de. — — - -	jaune de ſoufre foncé melé de petits grains de demi-opale bleuâtre.	la même	concoïde & inégale, éclat de poix preſque mât.	opaque, même aux coins.	ne fait pas feu contre le briquet.	aſſez fragile	facile à gratter & donne une poudre griſâtre.	pas gras, mais uni.	foiblement argilleuſe.
5.	3me. — — - -	rouge, couleur de brique.	la même	concoide & inégale; éclat de poix.	opaque; à peine y a-t-il quelque demi-tranſparence aux coins.	ne fait pas feu contre le briquet.	très fragile.	facile à gratter & donne une poudre griſâtre.	aſſez gras & uni.	très-ſenſiblement argilleuſe.
6.	4e. — — - -	rouge foncé, mordoré.	la même	inégale tirant ſur le concoide; éclat de poix.	opaque, même aux coins.	donne quelques étincelles contre le briquet.	fragile.	difficile à gratter.	aſſez gras.	très-ſenſiblement argilleuſe.
7.	5e. — — - -	jaune, couleur de ſoufre.	la même	parfaitement concoide, mais la ſurface n'a point d'éclat, elle eſt mâtte	à peine remarque-t-on quelque demi-tranſparence aux coins.	ne donne point d'étincelles contre le briquet.	aſſez fragile.	facile à gratter & donne une poudre griſâtre.	peu gras.	très-argilleuſe.
	Piſſites diverſicolores.									
8.	1e. varieté - -	gris clair, melé de rubans rouges & bleuâtres, ſemblable à une belle Agate.	la même	concoide; éclat de verre.	demi-tranſparent.	ne donne que difficilement quelques étincelles contre le briquet.	très fragile.	difficile à gratter.	gras & poli.	foiblement argilleuſe, hors quelques petites couches blanches, qui happent à la langue, & qui paroiſſent etre de Piſſite décompoſée.
9.	2de. — — - -	tacheté de rouge, de jaune, de blanc & de verdâtre; c'eſt un mélange de Piſſite veritable, d'argile endurcie, de parties de pierre de corne & de demi-opale.	la même	en partie concoïde, & en partie inégale, éclat de poix & de verre.	une partie eſt opaque, l'autre demi-tranſparente, du moins aux coins.	quelques parties donnent aſſez d'étincelles.	aſſez fragile.	difficile à gratter.	une partie eſt graſſe & liſſe, l'autre mâtte & rude.	argilleuſe.
10.	3me. — — - -	jaune, couleur de paille, tacheté de points rouges & de lignes bleuâtres.	la même	aſſez concoïde; éclat de poix.	demi-tranſparent aux coins.	on en peut tirer aſſez d'étincelles avec le briquet.	aſſez fragile.	difficile à gratter.	un peu gras.	argilleuſe.
11.	4e. — — - -	tacheté de jaune pâle, rouge & bleuâtre, très-reſſamblant à une breche, mais comme ce n'eſt pas une agglutination de Cailloux arrondis, les taches ne ſont pas rondes non plus.	la même	inégale preſque pas concoide; éclat de poix.	à peine un peu demi-tranſparent aux coins.	donne aſſez d'étincelles contre le briquet.	aſſez fragile.	aſſez facile à gratter & donne une poudre blanchâtre.	pas trop gras.	preſque inſenſiblement argilleuſe.
12.	5e. — — - -	rouge foncé, mordoré, tacheté de rouge couleur de brique & de points jaunâtres & griſâtres.	la même	inégale, en partie concoide; éclat de poix.	opaque, même aux coins.	à peine on en peut tirer quelques étincelles.	fragile.	aſſez difficile à gratter.	aſſez gras & uni au toucher.	argilleuſe.
13.	6e. — — - -	brun foncé, tacheté de rouge, de jaune & de blanc, les taches blanchâtres conſiſtent en partie de demi-opales.	la même	inégale, en partie concoide; éclat de poix.	en partie demi-tranſparent aux coins.	donne preſque point d'étincelles contre le briquet.	fragile.	difficile à gratter.	aſſez gras.	argilleuſe.
14.	7e. — — - -	rouge de brique & entremelé d'ocre rouge.	la même	concoide; éclat de verre.	opaque, même au coins.	donne quelques étincelles contre le briquet.	fragile.	difficile à gratter.	moins gras qu'uni au toucher.	argilleuſe.

No.	Noms des pierres.	Couleur.	Forme.	Cassure.	Transparence.	Dureté.	Tenacité.	Trait.	Attouchement.	Odeur.
15.	8. Variété - - -	jaune clair, couleur de paille, tachete de points grisâtres, qui consiſtem de pierre de corne, qui y eſt mêlée.	indeterminée.	inégale, la surface eſt mâtte	opaque.	donne assez d'etincelles contre le briquet.	pas si fragile comme les autres.	difficile à gratter.	rude au toucher.	assez argilleuse.
	Pierres qui se trouvent dans la même couche parmi les pissites de Nicolaëfsk.									
16.	Pierre de corne - -	verd, couleur d'olive foncée.	la même.	concoide & en même tems écailleuse; la surface eſt mâtte, sans aucune éclat.	assez demi-transparente aux coins.	donne des etincelles très vives contre le briquet.	assez difficile à casser.	ne se laisse pas gratter.	sec, mais uni.	foiblement argilleuse.
17.	Pierre de corne, qui ressemble beaucoup à la pierre à fusil.	grise, avec des parties jaunâtres; celles-ci consiſtent d'une couche de pierre de poix, avec la quelle la pierre de corne eſt comme fondue ensemble; aussi eſt-elle couverte d'une couche d'argille blanche, qui happe à la langue.	la même.	concoide, surtout dans les parties, qui consiſtent de Pissite; celles-ci ont aussi l'éclat de cire, les autres sont mâttes.	un peu demi-transparente aux coins.	la pierre de corne fait un feu très vif contre le briquet, mais pas l'autre.	assez facile à casser.	difficile à gratter.	sec.	argilleuse.
18.	Pierre de corne - -	grise tirant sur le blanc, melée d'une multitude de grains de quarz gris.	la même.	inégale, la surface interieur eſt mâtte.	un peu demi-transparente aux coins.	on en peut tirer des etincelles vives avec le briquet.	ne se casse pas trop facilement.	très-difficile à gratter.	sec & rude.	presque point d'odeur.
19.	Jaspe très ferrugineuse.	rouge foncé tirant sur le brun.	la même.	uni, un peu tirant sur le concoide, la surface mâtte.	opaque, même aux coins.	donne assez d'étincelles contre le briquet.	assez difficile à casser.	difficile à gratter.	sec, mais uni.	sensiblement argilleuse.
20.	Breche - -	le fonds consiſte d'argille endurcie d'un jaune très foncé avec des taches blanchâtres, provenant de fragmens de pierre de corne quarzeu e arrondis (No. 18.).	la même.	inégale.	opaque pour la plupart.	Il n'y a que les parties de pierre de corne qui font feu contre le briquet.	fragile.	en partie facile à gratter.	sec & rude.	argilleuse.
21.	*Breche* - -	argille endurcie d'un jaune foncé, tacheté en verdâtre, qui provient de morceaux de pierre de corne arrondis. (No. 16.).	la même.	inégale.	opaque, hors les fragmens de pierre de corne, qui sont demi-transparentes aux coins.	fait vivement feu contre le briquet.	se casse assez facilement.	se laisse gratter en partie.	sec & rude.	argilleuse.
22.	Breche - -	c'eſt une argille endurcie un peu grasse d'un jaune très-foncé, melée de fragmens d'une argille blanche aussi endurcie & happant à la langue.	la même.	inégale.	opaque.	molle.	fragile.	facile à gratter.	rude.	très-argilleuse.

Voilà donc les pierres les plus proches, dont la Piſſite eſt entourée ici, & qui ne ſont ſurement pas de nature volcanique; mais auſſi les roches plus éloignées ne le ſont pas, car il n'y a ici dans les environs de la mine que du Granit, pour la plupart de couleur rouge, de Porphyre de différentes variétés, de pierres de corne &c. par conſequent il y a des Piſſites ici dans des lieux, qui n'ont jamais été travaillés par le feu ſouterrein, & il y a ici comme en Saxe, des pierres de poix avec des porphyres.

Je paſſe maintenant à la déſcription extérieure de nos piſſites, laiſſant les recherches ſur leur qualité interieure aux chymiſtes. Mais il y en a plusieurs ſortes, dont les nuances en couleur & en dureté ſont aſſez nombreuſes; on les peut cependant réduire à 13 variètés principales, qui ſe diviſent en deux claſſes, dont l'une conſiſte en Piſſites *véritables*, l'autre en *pierres de corne*, & en *breches corneuſes*, qui ſe trouvent parmi les premieres, & qui tiennent quelquefois le milieu entre la Piſſite & la pierre de corne.

La *Piſſite veritable* de *Nicolaéfsk* ſe ſubdiviſe encore en deux parties dont une eſt unicolore, & l'autre plus ou moins melée de différentes couleurs.

(Voyez la table ci-jointe de No. 3. jusqu'à 22.)

SILI-

SILICIS TOPAZII SIBIRICI
EXAMEN CHEMICVM.

Auctore
T. LOWITZ.

Conventui exhib. die 10 *Ian.* 1799.

§. 1.

Topaziorum Sibiricorum deſcriptionem ingenioſam, egregiis delineationibus dilucidatam, Cel. Collega, Dom. Conſil. aulicus Herrmann, cum Ill. Academia anno praeterito communicavit, idemque nonnulla huius foſſilis ſpecimina puriſſima, ut chemicis artificiis partes eorum conſtituentes explorarem, benevole mihi tradidit.

Externam formam quod attinet, Topazius Sibiricus valde quidem differt ab illo, qui in Saxonia ad Schneckenſtein reperitur; utramque vero hanc Topaziorem varietatem igni et tubo ferruminatorio ſubiectam ratione plane conſimili ſeſe gerere et pulcherrime inter ſe convenire, e ſequentibus patebit.

§. 2.

Habitus via ſicca.

a.) Foſſilis huius fruſtulum ſine ulla additione tubo ferruminatorio expoſitum, ineunte incaleſcentia, cum ſtrepitu in tenerrimas diſſiluit lamellulas, quae calore, ad vehementiſſimam usque incaleſcentiam, aucto, lacteam quidem opaci-

ta-

tatem, neque tamen in ipſis adeo marginibus ſuis, fuſſionis veſtigium ullum prodiderunt.

Topazii Saxonici fragmentum ſimili modo tractatum, etiam ſimili prorſus modo ſeſe geſſit.

b.) Alkalia fixa in neutram hanc Topaziorum varietatem effectum ullum exſerebant.

c.) Boracis ſalisque microcoſmici in utramque non niſi exiguam vim eſſe deprehendi.

d.) Topazii Sibirici cryſtallum, pondere 130 granorum, in tigillo carboneo probe obturato per bihorium vehementiſſimo furni anemii igne tractavi. Omnibus reſrigeratis, in permultas lamellulas lactei coloris diſſiluiſſe cryſtallum, et ponderis iacturam grani unius cum dimidio paſſam eſſe, reperi, cuius quidem iacturae origo ab expulſis particulis aqueis repetenda eſſe merito videtur.

e.) Gravitatem ſpecificam quod attinet, eam Topazii Sibirici = 3,457, illamque Saxonici = 3,522 invenire mihi licuit.

Atque ex ſumma hac utriusque Topaziorum, ignis in utramque effectum quod attinet, convenientia, facilis quidem ſeſe coniectura obtulit, conſimilem convenientiam in ipſa quoque utriusque mixtione locum habere, ut Topazii Sibirici ulteriore analyſi chemica, quum eam Saxonici Cel. Wieglebius iamiam inſtituiſſet, ſuperſedere potuiſſe iure meritoque viderer. Hoc tamen non obſtante, operae pretium mihi viſum eſt, Topazium Sibiricum, utpote Roſſiae indigenum naturae productum, penitiori examini ſubiicere; quod ut facerem, non formae ſolum utriusque diſſimilitudo ſuaſit, ſed

ſed id quoque potiſſimum me impulit, quod conſtet. chemiam ab eo inde tempore, quo Cel. Wiegl bius Topazii Saxonici naturam eſt ſcrutatus, tot et tanta incrementa cepiſſe totque novis foſſilium diſſolvendorum artificiis auctam eſſe, ut complura mineralia, quorum natura a decem inde, et quod excurrit, annis in aprico poſita eſſe videbatur, recentioribus tractata methodis, partes conſtituentes ab iis, quas olim oſtendere viſa ſunt, plane diverſas prodere, reperta ſint.

§. 3.

Analyſis chemica.

a.) 130 illa (§. 2. *d.*) Topazii Sibirici igne tractati grana in pulverem ſubtiliſſimum contrita 14 drachmis lixivii potaſſini cauſtici, dimidium ſui ponderis ſalis ſicci continentis, miſcui; mixta in tigillo argenteo, humore lenti primum caloris ope abacto, per horam candeſcentiae expoſui; omnibusque refrigeratis, maſſam ſalinam non colliquatam aqua fervida ſolvi, et ſuperſtes gryſei coloris ſedimentum terreum, hac operatione non ſolutum, aqua elui.

b.) Reſiduum hoc terreum (*a.*) cum acidi muriatoſi ſex drachmis probe contritum glutinis farinacei ſpiſſioris formam ſubiit. Haecce maſſa, additis eidem in cucurbita vitrea 6 circiter aquae unciis, leniter calefacta ſolvi et in maſſam fluidam non pellucidam quidem illam, neque tamen ſedimenti quid deponentem, liqueſcere viſa eſt, quae accedente ebullitione plane pellucida facta mox gelatinae ſeſe forma induere coepit; quo viſo, fervidiſſimam illam una denuo cum aquae libra agitando dilui. Hoc facto, terra ſiliceа ſub forma granulorum mucilaginoſorum ex gryſeo coerule-

rulefcentis coloris fundum petiit, liquorque largo huic ſedimento ſupernatans pariter coeruleſcente eaque permanente opacitate imbutus apparuit. Repetita tamen ebullitione, tam liquoris quam ſedimenti ſilicei color ille coeruleſcens plane omnis diſparuit, et ſedimentum modo memoratum a liquore nunc pellucido filtri ope ſeparatum, lotum ſiccatumque et calcinatum terrae ſiliceae 55 grana exhibuit.

c.) Solutio illa alcalina (*a.*) affuſo acido muriatoſo copioſum dimiſit ſedimentum album, quod uberiore eiusdem acidi affuſa copia denuo ſolvebatur, quo facto, terram in ea contentam ammoniaci cauſtici ope praecipitavi, lotamque in filtro chartaceo collegi.

d.) Solutio acida (*b*), aliquot guttis acidi ſulphurici affuſis non turbari, viſa eſt; ex quo pronum eſt iudicium, foſſile noſtrum nec ponderoſae neque Stronthianae terrae quidquam continere. Potaſſinum vero boruſſicum liquorem hunc levi quidem illo, absque omni tamen ſedimento et ſalva eiusdem pelluciditate, coeruleo colore imbuit, hocque ipſo indicio deliteſcentis ferri veſtigia prodidit.

e.) His cognitis ſolutioni huic debitam ammoniaci cauſtici copiam addidi, et obtentum hoc modo largum ſedimentum, ei, cuius ſupra (*c.*) mentionem feci, ſimillimum, filtro chartaceo collectum, aqua elui.

f.) Liquor a ſedimento hoc filtri ope ſeparatus, et evaporatione condenſatus acidi oxalici, ammoniaci — et potaſſini-carbonicorum acceſſu illibatam pelluciditatem oſtendit. Ex quo, nec calcis quidquam foſſili noſtro ineſſe, ſequitur.

g.) Duo illa ammoniaci cauſtici auxilio e ſolutionibus ſuis praecipitata inque filtris collecta et aqua probe edulcorata ſedimenta (*c.* et *e.*), quum unius eiusdemque naturae eſſe mihi viderentur, madida adhuc coniunctim aci-

 do

do ſulphurico diſſolvi. Pars reſidua acido non ſolubilis lota, ſiccata et calcinata grana tria exhibuit terrae ſiliceae. Solutio filtrata et alternis evaporationibus et refrigerationibus ad ipſam usque mellis conſiſtentiam redacta, ne minimum quidem cryſtalliſandi niſum prodidit; ex quo colligere licet, nec terrae illius novae, a Cel. Vauquelino in Sibirico aquamarino ſic dicto nuperrime detectae, in Topazio noſtro quicquam reperiri.

h.) Solutio haec dicto modo inſpiſſata aqua iterum iterumque dilata, addita eidem alumini generando debita potaſſini copia, et evaporationi rurſus ſubiecta, ineunte ebullitione, albiſſima lactisque bubuli ebullientis ad inſtar rugoſa in ſuperficie ſeſe cuticula contexit et brevi poſt penitus lacteſcens, ſedimentum album et ponderoſum, acidorum vim in ſtatu etiam humido plane eludens, ad ſundum depoſuit, quod ſedimentum, cuius natura mihi quidem valde dubia videbatur, in filtro collectum, lotumque et ſiccatum 9 grana pondere aequabat. Liquidum inde denuo filtratum, evaporatione et refrigeratione ad ipſum usque laboris huius finem continuatis, in cryſtallos regulares octoëdricas aluminis concrevit, quae leniter ſiccatae drachmas 6 cum dimidia ponderabant.

i.) Alumen hoc debita aquae copia iterum diſſolvi, terramque e ſolutione hac ammoniaci cauſtici beneficio praecipitavi, quam edulcoratam et leni calore ſiccatam 95, calcinatam vero ponderis 51 granorum reperi.

k.) Terram iſtam (*h.*), e liquore aluminoſo ſponte praecipitatam novemque grana ponderantem, cum omnem acidorum vim plane eluderet, cum drachmis duabus lixivii potaſſini cauſtici commiſcui, mixtamque ad ſiccitatem usque evaporavi. Hoc facto, maſſam ſalinam abundante acidi muriatoſi copia diſſolvi; quaeque heic remanſerunt partes non

ſ-

ſolutae, lotae ſiccatae et calcinatae etiamnum granum unum terrae ſiliceae ſuppeditabant.

l.) E ſiltrata illa ſolutione (*k.*), ſufficiente ammoniaci cauſtici copia aſſuſa, ſatis largum prodiit ſedimentum terreum. Hocce ſedimentum lotum, et humidum adhuc, acido ſulphurico promte nunc ſolvebatur, additoque potaſſino, verum dedit alumen, quod ulteriore tractatione 6 argillae calcinatae grana largiebatur.

m.) Cuncti denique in foſſilis noſtri analyſi hic expoſita reſidui liquores ſalini, evaporando ad ſiccum usque redacti, ſalibusque inde relictis, aqua iterumque ſolutis, ſiliceae terrae unum, tria argillae grana etiamnum ſuppeditaverunt.

§. 4. Quae omnia cum ita ſint; patet, 130 illa foſſilis noſtri grana ſequentes praebuiſſe partes conſtituentes:

				Pro partibus centenis
Siliceae	*b.*)	55.		
	g.)	3.	— 60.	46, 15.
	h.)	1.		
	m.)	1.		
Argillae	*i.*)	51.		
	l.)	6.	— 60.	46, 15.
	m.)	3.		
Aquae? §. 2. *d.*)			— $1\frac{1}{2}$	0, 69.
Oxidi ferri *d.*) veſtigium				
			$121\frac{1}{2}$	92, 99.
Jactura			$8\frac{1}{2}$	7, 01.
			130.	100, 00.

 To-

Topazium ſaxonicum quod attinet, Celeb. Wieglebius (*) e centenario eiusdem ſequentes elicuit partes conſtituentes: Siliceae $52\frac{7}{24}$, Argillae $44\frac{7}{12}$, Calcis $2\frac{1}{2}$, Oxidi ferri $\frac{5}{16}$.

Sibiricus igitur Topazius noſter a Saxonico, ſi a proportionum varietatibus diſceſſeris, non niſi plenario calcis defectu diſcrepat.

§. 5. Coronidis loco etiam id addere a propoſito noſtro non erit alienum, iſtam de qua ſupra dixi (§. 3. *h.*) argillae ſpontaneam ſegregationem exemplum nobis offerre novum, quanta cautione huiusmodi in disquiſitionibus chemicis proſpicere nobis debeamus, ne inopino quodam phaenomeno inducti concluſiones iudicio nimis praecipite maturemus et a veritate digrediamur; hoc eſt, ne ſubſtantiam quandam ſatis iam iam notam nec niſi larvatam pro incognita habeamus. Terram enim argillaceam, igne bene ſiccatam et calcinatam acidis non ſolvi, ſatis quidem ſuperque conſtat; noſtro autem in exemplo dicta illa argillae portio via adeo prorſus humida in acidis inſolubilem ſeſe praeſtitit, cuius rei mentionem hodienum nullam fieri memini; neque inficias ire mihi licet, parum abſuiſſe, quin, ſedimentum iſtud ſponte ſegregatum propriam quandam eſſe terram nondum cognitam, initio exiſtimaverim.

(*) Krells chemiſche Annalen 1788. B. 1. S. 116.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

TENTAMEN
INVESTIGANDI
PARALLAXIN LVNAE
EX
ECLIPSI SOLIS,
QVAE CONTIGIT
Anno 1793 die $\frac{23\ Mart.}{3\ Apr.}$.

Auctore
STEPH. RVMOVSKI.

Conv. Acad. exhib. die 31. Aug. 1797.

Inter omnes methodos invenſtigandi Parallaxin Lunae procul dubio omnibus praeſtantior eſt illa, in qua requiruntur bini Aſtronomi in locis admodum a ſe remotis conſtituti, et obſervantes eodem quam proxime tempore altitudinem Lunae in meridiano verſantis. Hunc praecipue in finem anno 1751 Abbas *de la Caille* iter ſuscepit ad Caput Bonae Spei, dum eodem tempore in Europa varii non minus celebres aſtronomi ſub meridianis non multum a meridiano Capitis Bonae Spei diverſis, ex compacto altitudinibus Lunae capiendis invigilarent. Collatis inter ſe his obſervationibus procul dubio exactius innotuit Parallaxis Lunae; interim tamen varii auctores variant hucusque in illius

lius quantitate, et pleraeque obſervationes Eclipſium Solis poſt hac computatae ſuadere videntur Parallaxin Lunae aequatoream, a *Tobia Maiero* in tabulis Lunaribus exhibitam, aliquot minutis ſecundis eſſe minuendam, ita ut poſt omnes curas aſtronomorum in Parallaxi Lunae incertitudo non nullorum minutorum ſecundorum remanſiſſe ſit ſtatuenda.

Pro tollenda hac incertitudine optandum foret, ut obſervationes, quales anno 1751 inſtitutae ſunt, nunc organis noviter inventis repetantur; verum quousque voti huius compotes facti fuerimus, non inutiles fore arbitror inquiſitiones in Parallaxin Lunae ab Eclipſibus Solis petitae et certiores ab occultationibus ſtellarum, obſervatis in locis valde a ſe remotis, ut ſcilicet effectus Parallaxeos evadat ſenſibilior. Eclipſis Solis anno 1793 Cantabrigiae in America variisque in locis Europaeis obſervata huic requiſito ſatisfacit. Quamobrem e re eſſe exiſtimavi inquirere quantam illa praebitura ſit Parallaxin Lunae aequatoream; id quod eo facilius praeſtare mihi licuit, quod praecipua Elementa huic ſcopo neceſſaria ex diſſertatione Novorum Actorum Tomo X. inſerta deſumere potui: computandae tantum ſupererant pro locis, in quibus Eclipſis eſt obſervata, parallaxes in altitudinem et anguli, quos formant circuli Latitudinis cum circulis verticalibus per centrum Lunae tranſeuntibus.

Ex diſſertatione ſupra memorata pro momento coniunctionis Grenovicenſi die $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ Apr.}}$ $0^h. 41'. 45''$ t. v. Latitudo Lunae reperitur $44'. 56'',4$ quae per $+ 10''$ correcta ſit $45'. 6'',4$. Per computum eiusdem Eclipſis Cel. Beitler Mitawae obſervatae Latitudo ex initio eſt $45'. 6'',6$.

ex

ex fine 45′. 7″. Media igitur erit - - 45′. 6″, 6

Motus horarius Solis - - - -	2. 27, 5
$\frac{1}{2}$ Diameter Solis - - - - -	16. 1, 9
Motus horarius Lunae in Longit.	30. 13, 7
- - - - in Latitud.	2. 46, 79
Motus horarius Lunae a Sole -	27. 46, 2
Parallaxis Lunae aequatorea - -	54. 47, 0
- - - aequator. correcta	54. 38, 5

Referat E C Eclipticam, ☉ locum Solis et ☾ locum Lunae verum tempore coniunctionis; ope motus horarii Lunae a Sole, atque motus horarii Lunae in Latitudinem inclinatio orbitae Lunae relativae O R ad Eclipticam reperitur 5°. 22′. 48″. Vnde Latitudine Lunae ☽☉ exiſtente 45′. 6″, 6 reperitur minima diſtantia centrorum M☉ = 44′. 53″, 2; motus horarius Lunae in orbita relativa 27′. 54″, 5 et logarithmus pro reducendo ſpatio in tempus 0, 3324317, ☽M in tempore 9′. 38″, 3. Hinc concluditur Lunam ex centro Telluris viſam fuiſſe in M 0^h. 51′. 36″, 3 tempore Grenovicenſi. Dato tempore initii vel finis Eclipſis alicubi obſervati, ſi ex diſtantia centrorum apparente, ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae aequali, quaeratur diſtantia eorundem ex centro telluris videnda ☉L, ex triangulo rectangulo M L ☉ habebitur M L, primum in partibus circuli, dein ope logarithmi ſupra exhibiti in tempore. Quodſi hoc modo pro duabus quibuscunque obſervationibus computetur M L in tempore, ſumma eorum vel differentia, prout circumſtantiae requirunt, pateſaciet effectum parallaxeos ſub hypotheſi in calculo aſſumtae. Tab. X. Fig. 1.

Cardo igitur rei in eo verſatur, ut ex diſtantia centrorum apparente quaeratur diſtantia eorundem ex centro

telluris videnda, quae tutiſſime inveſtigari poſſe videtur ſumendo pro datis diſtantia centrorum apparente et Latitudine Lunae apparente, quippequi Latitudo Lunae minus variationi eſt obnoxia prae eiusdem Longitudine.

Cum valor lineae L M pro ſatis exacto haberi nequeat, niſi valores linearum ☉ L et ☉ M exacte fuerint cogniti, videndum erit, quam mutationem ſubire debeat recta M L, ſi ipſis ☉ L et ☉ M exiguae quaedam correctiones tribuantur. Cum ſit $LM = \sqrt{(\odot L^2 - \odot M^2)}$, ſpectatis differentialibus harum rectarum tanquam correctionibus habebitur

$$\partial . LM = \frac{\odot L . \partial . \odot L - \odot M \partial \odot M}{LM}.$$

Poſita igitur correctione ipſius $\odot L = z$ et $\odot M = y$ correctio ipſius L M hinc oriunda habebitur z ſec. M L ☉ — y tang. M L ☉, quae in tempus converſa et ad M L in tempore computatam addita, dabit M L in tempore correctam. Cum obſervatio Cantabrigiae habita terminum praebeat comparationis ab ea computanda initium facturus ſum.

Caculus pro initio Eclipſis Cantabrigiae obſervato.

Initium Eclipſis Cantabrigiae obſervatam eſt 2 Aprilis $18^h. 1'. 27''$ t. v. pro quo, aſſumta Longitudine Cantabrigiae a meridiano Pariſino verſus occaſum numerata $4^h. 53'. 36''$, reperitur Longitudo Solis $13°. 37'. 29''$, Longitudo Lunae $12°. 43'. 38''8$ Latitudo Lunae Borealis $50'. 18'',6 + \text{Corr. } 10'' = 50'. 28'',6$ Parallaxis in Longitudinem $+ 23'. 4'',8$, Parallaxis in Latitudinem $- 49'. 15'',6$, ½ Diameter Lunae apparens $896'',9$. Vnde ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae $1858'',8$.

Reſe-

Referat E C Eclipticam, ☉ locum Solis pro initio, L locum Lunae verum et ☽ apparentem, Z ☽ circulum verticalem et Π L M circulum Latitudinis, L ☽ parallaxin altitudinis; erit Latitudo Lunae apparens ☽ B = 1′. 13″, et parallaxis altitudinis L ☽ = 54′. 24″, 5, ang. Z L Π = 25°. 6′. 2″, et diſtantia centrorum ☽ ☉ per — 5″, 5 correcta evadit 30′. 53″, 3. Ex triangulo igitur rectangulo ☉ ☽ B fiet Tab. X. Fig. 2.

l ☽ B = 1. 8633228.	☽ ☉ B = 2°. 15′. 26″.
l ☽ ☉ = 3. 2679457.	☉ ☽ B = 87. 44. 34.
l ſin. ☽ ☉ B = 8. 5953771.	Π L Z = 25. 6. 4.
☽ ☉ B = 2°. 15′. 26″.	☉ ☽ O = 62. 38. 32.

Ex ☉ in productam L ☽ demiſſo perpendiculo O ☉ reſolutio trianguli ☽ ☉ O dabit

l ☽ ☉ = 3. 2679457.	l ☽ ☉ = 3. 2679475.
l ſin. ☉ ☽ O = 9. 9484883.	l coſ. ☉ ☽ O = 9. 6623285.
l O ☉ = 3. 2164340.	l ☽ O = 2. 9302742.
l L O = 3. 6144859.	☽ O = 851, 6.
l tang. ☉ L O = 9. 6019481.	L ☽ = 3264, 5.
☉ L O = 21°. 47′. 47″.	L O = 4115, 1.

Ex triangulo L ☉ O fit

l O ☉ = 3. 2164340.	L ☉ = 4433.
l ſin. ☉ L O = 9. 5697358.	M ☉ = 2693, 2.
l L ☉ = 3. 6466982.	L ☉ + M ☉ = 7126, 2.
L ☉ = 4433.	L ☉ — M ☉ = 1739, 8.

l L

$l\,L\odot + M\odot = 3,8528580.$ $\qquad$ $l\,M\odot = 3.43026.$
$l\,L\odot - M\odot = 3,2404993.$ $\qquad$ $l\,L\,M = 3.54667.$
$7.0933573.$ $\qquad$ $l\,\text{tg.}\,M\,L\odot = 9.88359.$
$l\,M\,L = 3.5466786.$ $\qquad$ $M\,L\,O = 37^{\circ}.\,24'.\,40''.$
$l\,\text{red.} = 0,3324317.$
$l\,7570'',3 = 3,8791103.$
$2^{h}.\,6'.\,10'',3.$

$l\,\text{tang.}\,M\,L\odot = 9,88359.$ $\qquad$ $l\,\text{ſec.}\,M\,L\odot = 0,10002.$
$l\,\text{reduct.} = 0,33243.$ $\qquad$ $0.33243.$
$0,21602.$ $\qquad$ $0.43245.$
numerus reſpondens $1,64.$ $\qquad$ $2,70.$
unde habetur M L in temp. $2^{h}.\,6'.\,10'',3 + 2,70\,z - 1,64\,y.$

Computus pro fine Cantabrigiae obſervato.

Pro momento finis Cantabrigiae obſervato $20^{h}.\,28'.\,26''.$ t. v. reperitur Longitudo Solis $13^{\circ}.\,43'.\,31'',3$, Longitudo Lunae $13^{\circ}.\,57'.\,41'',3$, Latitudo Lunae $43'.\,30'',8$ et Latitudo correcta $43'.\,40'',8$. Parallaxis Longitudinis $+ 16'.\,42'',4$ Latitudinis $43'.\,58''$, $\frac{1}{2}$ Diameter Lunae. apparens $902'',9$. Hinc Latitudo apparens $= 17'',2$ Auſtr. et ſumma ſemidiametrorum per $- 5'',5$ correcta $30'.\,59'',3 = 1859'',3$.

Tab. X. Fig. 3. Referat E C conſtanter Eclipticam, ⊙ locum Solis, L locum Lunae verum et ☽ locum Lunae apparentem, HLM circulum Latitudinis et Z L circulum verticalem per centrum Lunae tranſeuntem, L☽ parallaxin altitudinis, quae

quae invenitur = 47′. 2″, 3 = 2822″, 3 et angulus Π L Z = 20°. 48′. 10″. Ex triangulo igitur ⊙ ☽ B obtinebitur

l ☽ B = 1, 2355284.	☽ ⊙ B = 0°. 31′. 48″.
l ☽ ⊙ = 3, 2693495.	B ☽ ⊙ = 89. 28. 12
	Z L Π = 20. 48. 10
l ſin. ☽ ⊙ B = 7, 9661789.	
☽ ⊙ B = 0°. 31′. 48″.	L ☽ ⊙ = 68. 40. 2

Ex ⊙ in L ☽ demiſſo perpendiculo O ⊙ triangulum ⊙ ☽ O dabit

l ☽ ⊙ = 3, 2693495.	*l* ☽ ⊙ = 3, 2693495
l ſin. L ☽ ⊙ = 9, 9691750.	*l* coſ. L ☽ ⊙ = 9, 5608439
l O ⊙ = 3, 2385245.	*l* ☾ O = 2, 8301934
l L O = 3, 3316297.	☽ O = 676, 3
	L ☽ = 2822, 3
l tang. O L ⊙ = 9, 9068948.	L O = 2146, 0
O L ⊙ = 38°. 54′. 17″.	

Ex triangulo L ⊙ O fit

l O ⊙ = 3, 2385245.	L ⊙ = 2757, 7
l ſin. O L ⊙ = 9, 7979784.	M ⊙ = 2693, 2
l L ⊙ = 3, 4405461.	L ⊙ + M ⊙ = 5450, 9
L ⊙ = 2757, 7	L ⊙ — M ⊙ = 64, 5.
l L ⊙ + M ⊙ = 3, 7364682.	*l* M ⊙ = 3, 40326
l L ⊙ — M ⊙ = 1, 8095597.	*l* M L = 2, 77301
5, 5460279.	*l* tang. M L ⊙ = 0, 65725
l L M = 2, 7730139.	M L ⊙ = 77°. 35′. 0″.
l red. = 0, 3324317.	
l 1274, 8 = 3, 1054456.	

l tang.

l tang. M L ☉ =	0, 65725.	*l* ſec. M L ☉ =	0, 66753
l red =	0, 33243.	*l* red. =	0, 33243
	0, 98968.		0, 99996
Num. reſpond.	9, 76.		9, 99

Hinc M L' habebitur in tempore 21'. 14'', 8 + 9,99*z* − 9,76*y*.

Calculus pro initio Grenovici obſervato.

Initium Grenovici obſervatum eſt die 3 Apr. 0ʰ. 18'. 41''. t. v. pro quo reperitur Longitudo Solis 13°. 41'. 15'', 5, Longitudo Lunae 13°. 30'. 30'', Latitudo Lunae Bor. 46'. 0'',9 et correcta 46'. 10'', 9. Parallaxis Longitudinis — 18'. 4'', 5, Latitudinis 34'. 49'', 4, Latitudo apparens = 11'. 21'', 5 = 681, 5, ½ Diameter Lunae apparens = 905'', 6. Vnde ſumma ſemi-diametrorum Solis et Lunae per − 5'',5 = 1862.

Tab. II. Fig. 4. Sit EC Ecliptica, ☉ locus Solis, L locus Lunae verus et ☽ apparens, exprimat praeterea H L M circulum Latitudinis et Z L ☽ verticalem, L ☽ exprimet parallaxin altitudinis, quae cum ſit = 2354'', 1 et angulus Z L H = B ☽ E = 27°. 25'. 49'', ex triangulo ☉ ☽ B habebitur

l ☽ B = 2, 8334659.	☽ ☉ B = 21°. 28'. 10''
l ☽ ☉ = 3, 2699797.	☉ ☽ B = 68. 31. 50
	Z L H = 27. 25. 49
l ſin. ☽ ☉ B = 9, 5634862.	
l ☽ ☉ = 21°. 28'. 10''.	L ☽ ☉ = 84. 2. 21

Demiſſo ex ☉ in L ☽ perpendiculo ☉ O fiet

l ☽ ☉ = 3, 2699797.	*l* ☽ ☉ = 3, 2699797
l ſin. L ☽ O = 9, 9976454.	*l* coſ. L ☽ O = 9, 0163805
l O ☉ = 3, 2676251.	*l* ☽ O = 2, 2863602

l L O

l L O = 3, 3346146.	☽ O = 193, 3
l tang. O L ⊙ = 9, 9330105.	L ☽ = 2354, 1
O L ⊙ = 40°. 35′. 55″.	L O = 2160, 8

Reſolvendo triangulum L O ⊙ obtinebitur

l O ⊙ = 3, 2676251.	L ⊙ = 2845, 8
l ſin. O L ⊙ = 9, 8134180.	⊙ M = 2693, 2
l L ⊙ = 3, 4542071.	L ⊙ + ⊙ M = 5539, 0
L ⊙ = 2845, 8.	L ⊙ — M ⊙ = 152, 6
l L ⊙ + M ⊙ = 3, 7434314.	l M ⊙ = 3, 43026
l L ⊙ — M ⊙ = 2, 1835545.	l M L = 2, 96349
5, 9269859.	l tg. M L ⊙ = 0, 46677
l M L = 2, 9634929.	M L ⊙ = 71°. 9′.
l red. = 0, 3324317.	
l 1976, 7 = 3, 2959246.	
l tang. M L ⊙ = 0, 46677.	l ſec. M L ⊙ = 0, 49068
l red. = 0, 33243.	0, 33243
l 6, 19 = 079920.	l 6, 65 = 0, 82311

Hinc M L in tempore 32′. 56″, 7 + 6, 65 z — 6, 29 y.

Computus pro fine.

Finis Grenovici obſervatus eſt 3^h. 6′. 47″. t. v. pro quo Longitudo Solis eſt 13°. 48′. 10″, Longitudo Lunae 14°. 55′. 5″, 7 Latitudo Lunae Bor. 38′, 14″, 7 et correcta 38′. 24″, 7, Parallaxis Longitudinis — 38′. 11″, 5 Latitudinis 27′. 10″, 1, ½ Diameter Lunae apparens 902″, 3. Hinc Latitudo Lunae apparens 11′. 14″, 6 = 674″, 6 ſumma ſemidia-

Tab. X. Fig. 5.

midiametrorum Solis et Lunae correcta = 1864, 2. Si igitur ⊙ reſerat locum Solis, L locum Lunae verum et ☽ appa-
angulus reperitur parallaxis altitudinis L☽ = 2812″, 1 et
rentem Z L Π = 54°. 34′. 18″.

Reſolvendo triangulum ☽⊙B prodibit

l☽B = 2,8290463.	☽⊙B = 21°. 16′. 51″.
l☽⊙ = 3,2692093.	⊙☽B = 68. 43. 9.
l ſin. ☽⊙B = 9,5598370.	ΠLZ = 54. 34. 18.
☽⊙B = 21°. 16′. 51″.	⊙☽O = 14. 8. 51.

Ex ⊙ in productam L☽ demiſſo perpendiculo O⊙ et reſolvendo triangulum ⊙☽O prodibit

l☽⊙ = 3, 2692093.	*l*☽⊙ = 3, 2692093.
l ſin. ⊙☽O = 9, 3882184.	*l* coſ. ⊙☽O = 9, 9866186.
*l*O⊙ = 2, 6574277.	*l*☽O = 3, 2558279.
*l*LO = 3, 6641247.	☽O = 1802, 3.
l tg. ⊙LO = 8, 9933030.	L☽ = 2812, 2.
⊙LO = 5°. 37′. 26″.	LO = 4614, 5.

Ex triangulo L⊙O prodibit

*l*O⊙ = 2, 6574277.	L⊙ = 4636, 8.
l ſin. ⊙LO = 8, 9912164.	M⊙ = 2693, 2.
*l*L⊙ = 3, 6662113.	L⊙ + M⊙ = 733[illegible], 0.
L⊙ = 4636, 8.	L⊙ − M⊙ = 1943, 6.

*l*LO+

$l L\odot + M\odot = 3,8651040.$
$l L\odot - M\odot = 3,2886069.$

$7,1537109.$	$l M\odot = 3,43026.$
$l LM = 3,5768554.$	$l ML = 3,57685.$
$l \text{red.} = 0,3324317.$	$l \text{tang.} ML\odot = 9,85341.$
$l\,8115 = 3,9092871.$	$ML\odot = 35°.30'.0''.$
$l \text{tang.} ML\odot = 9,85341.$	$l \text{ſec.} ML\odot = 0,08932.$
$l. \text{red.} = 0,33243.$	$0,33243.$
$l\,1,53 = 0,18584.$	$l\,2,64 = 0,42175.$

Hinc ML′ in tempore $2^h.\ 15',\ 15'' + 2,64\,z - 1.\ 53\,y.$

Calculus pro initio Eclipſis Pariſiis obſervato.

Initium Pariſiis obſervatum eſt $0^h.\ 33'.\ 42''$, t. v. pro quo Longitudo Solis eſt $13°.\ 41'.\ 29'',4$, Longitudo Lunae $13°.\ 33'.\ 20'',8$, Latitudo $45'.\ 45''.\ 4 + 10'' = 45'.\ 55'',4.$ Parallaxis in Longitudinem $19'.\ 41'',7$ Latitudinis $32'.\ 11'',6.$ $\frac{1}{2}$ Diameter Lunae apparens $= 906''.$ Vnde ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae per $- 5'',5$ correcta $= 1862'',4$ et Latitudo apparens $= 823'',8.$

Repraeſentet igitur ☉ Solem, L locum Lunae verum et ☽ apparentem, arcus ΠLM exprimet circulum Latitudinis, ZL☽ circulum verticalem, L☽ parallaxin altitudinis, quae invenitur $= 2264,8$ et angulus $ZL\Pi = 31°.26'.48''.$ Ex triangulo itaque ☉☽B habebitur Tab. X. Fig. 4.

l ☽B $= 2,9158218.$	☽☉B $= 26.15.10.$
l ☽☉ $= 3,2700730.$	☉☽B $= 63.54.50.$
l ſin. ☽☉B $= 9,6457488.$	$Z L\Pi = 31.26.48.$
☽☉B $= 26°.15'.10''.$	L☽☉ $= 84°.48'.22''.$

Ex

Ex ⊙ in L☽ demiſſo perpendiculo O⊙ obtinetur

l☽⊙ = 3,2700730.	l☽⊙ = 3,2700730.
l ſin. L☽⊙ = 9,9982131.	l coſ. L☽⊙ = 8,9567751.
lO⊙ = 3,2682861.	l☽O = 2,2268481.
lL⊙ = 3,3214327.	☽O = 168,6.
l tang ⊙LO = 9,9468534.	L☽ = 2264,8.
⊙LO = 41°. 30′. 10″.	L⊙ = 2096,2.

Triangulum autem L⊙O dabit

lO⊙ = 3,2682861.	L⊙ = 2798,9.
l ſin. OL⊙ = 9,8212884.	M⊙ = 2693,2.
lL⊙ = 3,4469977.	L⊙ + M⊙ = 5492,1.
L⊙ = 2798,9.	L⊙ − M⊙ = 105,7.
lL⊙ + M⊙ = 3,7397384.	
lL⊙ − M⊙ = 2,0240750.	
5,7638134.	lM⊙ = 3,43026.
lML = 2,8819067.	lML = 2,88190.
l red. = 0,3324317.	l tang. ML⊙ = 0,54836.
l 1638,1 = 3,2143384.	ML⊙ = 74°. 12′. 10″.
l tang. ML⊙ = 0,54836.	l ſec. ML⊙ = 0,56506.
l red. = 0,33243.	0,33243.
l 7,59 = 0,88079.	l 7,89 = 0,89749.

Igitur ML in tempore 27′. 18″, 1 + 7, 89 z − 7, 59 y.

Calcu-

Calculus pro fine Pariſino.

Finis Pariſiis obſervatus eſt 3^h. 17′. 37″, t. v. pro quo Longitudo Solis eſt 13°. 48′. 13″, 5. Longitudo Lunae 14°. 55′. 51″, 4. Latitudo Lunae correcta 38′. 20″, 5. Parallaxis in Longitudinem — 39′. 55″, 6, in Latitudinem 24′. 41″, 6. ½ Diameter Lunae apparens = 902, 5: Hinc Latitudo apparens 13′. 38″, 9 = 818″, 9, ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae per — 5″, 5, correcta = 1858″, 9.

Sit itaque, ut ante, ☉ locus Solis, L locus Lunae verus et ☽ locus eius apparens, erit L ☽ parallaxis altitudinis = 2816″, 5 et angulus Z L Π = 58°. 16′. 3″. Quam ob rem ex triangulo ☉ ☽ B habebitur

l ☽ B = 2,9132309.	☽ ☉ B = 26°. 8′. 15″.
l ☽ ☉ = 3,2692560.	☉ ☽ B = 63. 51. 45.
l ſin. ☽ ☉ B = 9,6439749.	Z L Π = 58. 16. 30.
☽ ☉ B = 26°. 8′. 15″.	☉ ☽ O = 5. 35. 15.

Ex triangulo rectangulo ☉ ☽ O reperitur

l ☽ ☉ = 3,2692560.	*l* ☽ ☉ = 3,2692560.
l ſin. ☉ ☽ O = 8,9884063.	*l* coſ. ☉ ☽ O = 9,9979325.
l O ☉ = 2,2576623.	*l* ☽ O = 3,2671885.
l L O = 3,6690006.	☽ O = 1850, 1.
l tang. ☉ L O = 8,5886617.	L ☽ = 2816,5.
☉ L O = 2°. 13′. 16″.	L O = 4666, 6.

Triangulum L O ☉ dabit

l O ☉ = 2,2576623.	L ☉ = 4670, 1.
l ſin. ☉ L O = 8,5883388.	M ☉ = 2693, 2.
l L ☉ = ,6693235.	L ☉ + M ☉ = 7363, 3.
L ☉ = 4670, 1.	L ☉ — M ☉ = 1976, 9.

 l L ☉ +

l L⊙ + M⊙ = 3,8670725.
l L⊙ − M⊙ = 3,2959847.

7,1690572.	l M⊙ = 3,43026.
l LM = 3,5815286.	l ML = 3,58152.
l red. = 0.3324317.	l tang. ML⊙ = 9,84874.
l 8202″, 8 = 3,9139603.	ML⊙ = 35°. 13′. 20″.
l tang. ML⊙ = 9,84874.	l ſec. ML⊙ = 0,08781.
l reduct. = 0,33243.	0,33243.
l 1,51 = 0,18117.	l 2,63 = 0,41924.

Vnde ML′ in tempore 2^h. 16′. 42″, 8 + 2,63 z − 1,51 y.

Computus pro initio Eclipſis in Manheim obſervato.

Initium in Manheim obſervatum eſt 1^h. 10′. 55″. t. v. pro quo, aſſumta Longitudine Manheim a meridiano Pariſino verſus ortum numerata 24′. 30″, reperitur Longitudo Solis 13°. 42′. 3″, 8. Longitudo Lunae 13°. 39′. 45″. Latitudo Lunae per + 10″ correcta 45′. 19″, 9. Parallaxis Longitudinis — 25′. 1″, 7, Latitudinis 30′. 32″. ½ Diameter Lunae apparens = 905″, 6. Vnde Latitudo Lunae apparens prodit = 887″. 9, ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae per — 5″, 5 correcta = 1862″. Parallaxis autem altitudinis L☽ reperitur = 2368″, 8 et angulus a circulo Latitudinis ΠM et verticali Z☽ interceptus 39°. 20′. 34″.

Ex triangulo ⊙☽B fiet

l ☽B = 2,9485529.	☽⊙B = 28°. 30′. 57″.
l ☽⊙ = 3.2699797.	⊙☽B = 61. 29. 3.
l ſin. ☽⊙B = 9,6785732.	ZLΠ = 39. 20. 34.
☽⊙B = 28°. 30′. 57″.	L☽O = 79. 10. 23.

Tri-

Triangulum ☉☽O, in quo ☉O eſt perpendicularis in L☽, dabit

l ☽☉ = 3,2699797.	*l* ☽☉ = 3,2699797.
l ſin. L☽O = 9,9921995.	*l* coſ. L☽O = 9,2737956.
l ☉O = 3,2621792.	*l* ☽O = 2,5437753.
l LO = 3,3051579.	☽O = 349,7.
l tang. OL☉ = 9,9570213.	L☽ = 2368,8.
OL☉ = 42°. 10′. 10″.	LO = 2019,1.

Ex triangulo autem L☉O obtinetur

l O☉ = 3,2621792.	L☉ = 2724,2.
l ſin. OL☉ = 9,8269331.	M☉ = 2693,2.
l L☉ = 3,4352461.	L☉ + M☉ = 5417,4.
L☉ = 2724,2.	L☉ − M☉ = 31,0.
l L☉ + M☉ = 3,7337909.	
l L☉ − M☉ = 1,4913616.	
5,2251525.	*l* M☉ = 3,43026.
l LM = 2,6125762.	*l* LM = 2,61257.
l red. = 0,3324317.	*l* tang. ML☉ = 0,81769.
l 881 = 2,9450079.	ML☉ = 81°. 20′. 50″.
l tang. ML☉ = 0,81769.	*l* ſec. ML☉ = 0,82262.
l red. = 0,33243.	0,33243.
l 14,13 = 1,15012.	*l* 14,29 = 1,15505.

ML in tempore 14′. 41″ + 14. 29 *z* − 14, 13 *y*.

Com-

Computus pro fine in Manheim obſervato.

Finis in Manheim obſervatus eſt $3^h. 47'. 42''$. t. v. pro quo reperitur Longitudo Solis $13°. 48'. 27'', 2$. Longitudo Lunae $14°. 58'. 30''$. Latitudo Lunae correcta $38'. 5'', 1$. ½ Diameter Lunae apparens $817'', 8$. Parallaxis in Longitudinem $- 42', 30'', 3$ in Latitudinem $24'. 27'', 3$; unde Latitudo Lunae apparens $= 817'', 8$, et ſumma ſemidiametrorum correcta $= 1857'', 5$. Calculo peracto Parallaxis altitudinis L☽ invenitur $= 2942'', 3$ et angulus a circulo Latitudinis ΠM et verticali Z☽ interceptus $60°. 5'. 1''$. Reſolvendo igitur triangulum ⊙☽B obtinetur

Tab. X. Fig. 5.

l ☽B = 2,9126471.	☽⊙B = 26°. 7′. 15″.
l ☽⊙ = 3,2689288.	⊙☽B = 63. 52. 45.
l ſin. ☽⊙B = 9,6437183.	ZLΠ = 60. 5. 1.
☽⊙B = 26°. 7′. 15″.	⊙☽O = 3. 47. 44.

Ex triangulo ⊙☽O dabitur

l ☽⊙ = 3,2689288.	*l* ☽⊙ = 3,2689288.
l ſin. ⊙☽O = 8,8208350.	*l* coſ. ⊙☽O = 9,9990472.
l O⊙ = 2,0897038.	*l* ☽O = 3,2679760.
l LO = 3,6808520.	☽O = 1853,4.
8,4089118.	L☽ = 2942,3.
OL⊙ = 1°. 28′. 8″.	LO = 4795,7.

Triangulum autem LO⊙ dabit

l O⊙ = 2,0897638.	L⊙ = 4796,8.
l ſin OL⊙ = 8,4088187.	M⊙ = 2693,2.
l L⊙ = 3,6809451.	L⊙ + M⊙ = 7490,0.
L⊙ = 4796,8.	L⊙ − M⊙ = 2103,6.

l L☽ +

$l\,L\odot + M\odot = 3,8744818.$
$l\,L\odot - M\odot = 3,3229632.$

$7,1974450.$	$l\,M\odot = 3,43026.$
$l\,L\,M = 3,5987225.$	$l\,M\,L = 3,59872.$
l red. $= 0,3324317.$	l tg. $M\,L\odot = 9,83154.$
$8534'',2 = 3,9311542.$	$M\,L\odot = 34^\circ.\,9'.\,20''.$
l ſec. $M\,L\odot = 0,08223.$	l tang. $M\,L\odot = 9,83154.$
l red. $= 0,33243.$	$0,33243.$
$l\,2.59 = 0,41466.$	$l\,1.45 = 0,16397.$

Quam obrem M L in temp. $2^h.\,22'.\,14'',2 + 2,59z - 1,45y.$

Calculus pro initio Eclipſis Palermae obſervato.

Initium Palermae obſervatum eſt $2^h.\,7'.\,0''$. t. v. Statuta Longitudine Palermae a meridiano Pariſino $44'.\,0''$, pro momento initii prodit Longitudo Solis $13^\circ.\,43'.\,33'',8$. Longitudo Lunae $13^\circ.\,58'.\,12'',5$. Latitudo Lunae per $+10''$, correcta $43'.\,38'',3$. Parallaxis Lunae in Longitudinem $-32'.\,41'',6$. Parallaxis in Latitudinem $18'.\,26''$, ſemidiameter Lunae apparens $906''$. Hinc Latitudo Lunae apparens $25'.\,12'',3 = 1512'',3$ et ſumma ſemidiametrorum eodem modo quo ſupra correcta $= 1562'',4$. Parallaxis altitudinis $= 2253'',0$ et angulus a circulo Latitudinis et verticali per centrum Lunae tranſente comprehenſus $60^\circ.\,35'.\,3''$. Tab. X.
Ex triangulo igitur $\odot$ ☽ B habebitur Fig. 6.

l ☽ B $= 3,1796380.$	☽ $\odot$ B $= 54^\circ.\,17'.\,36''.$
l ☽ $\odot = 3,2700730.$	$\odot$ ☽ B $= 35.\,42.\,24.$
l ſin. ☽ $\odot$ B $= 9,9095650.$	Z L H $= 60.\,35.\,3.$
☽ $\odot$ B $= 54^\circ.\,17'.\,36''.$	L ☽ $\odot = 83.\,42.\,33.$

Ex

Ex triangulo ☉☽O ad O rectangulo prodit

l ☽☉ = 3, 2700730	l ☽☉ = 3, 2700730.
l ſin. L☽☉ = 9, 9973769.	l coſ. L☽☉ = 9, 0397126.
l O☉ = 3, 2674499.	l ☽O = 3, 3097856.
l LO = 3, 3115420.	☽O = 204.
l tang. OL☉ = 9, 9559079.	L☽ = 2253.
OL☉ = 42°. 5′. 47″.	LO = 2049.

Porro triangulum OL☉ dabit

l O☉ = 3, 2674499.	L☉ = 2761, 4.
l ſin. OL☉ = 9, 8263209.	M☉ = 2693, 2.
l L☉ = 3, 4411290.	L☉ + M☉ = 5454, 6.
L☉ = 2761″, 4.	L☉ − M☉ = 68, 2.
l L☉ + M☉ = 3, 7367629.	
l L☉ − M☉ = 1, 8337842.	
5, 5705471.	l M☉ = 3, 43026.
l ML = 2, 7852735.	l LM = 2, 78527.
l reduct. = 0, 3324317.	l tang. ML☉ = 0, 64499.
l 1311″, 3 = 3, 1177053.	ML☉ = 77°. 14′. 20″.
l ſec. ML☉ = 0, 65584.	l tang. ML☉ = 0, 64499.
l red. = 0, 33243.	0, 33243.
l 9, 73 = 0, 98827.	l 9, 49 = 0, 97742.

Hinc ML in tempore 21′. 51″, 3 + 9, 73 z − 9, 49 y.

Computus pro ſine.

Pro ſine Palermae obſervato 5^h. 56′. 5″ t. v. reperitur Longitudo Solis 13°. 48′. 0″, 1, Longitudo Lunae 14°. 53′. 7″, 1 Lati-

Latitudo Lunae correcta 38′. 36″. Parallaxis Longitudinis Lunae — 45′. 59″, Latitudinis 14′. 14″, 5, ½ Diameter Lunae apparens 901″, 9. Vnde Latitudo apparens 21′. 21″, 1 = 1461, 1. Summa ſemidiametrorum Solis et Lunae per — 5″, 5 correcta = 1858″, 3. Parallaxis altitudinis = 2888, 2 et angulus Z L Π, quem circulus Latitudinis format cum circulo verticali per centrum Lunae tranſeunte 72°. 47′. 23″. Fig. 7.

Reſolutio trianguli ⊙☽B dat

l ☽B = 3, 1647988.	☽⊙B = 51°. 51′. 25″.
l ☽⊙ = 3, 2691158.	⊙☽B = 38. 8. 35.
l ſin. ☽⊙B = 9, 8956830.	Z L Π = 72. 47. 23.
☽⊙B = 51°. 51′. 25″.	⊙☽O = 34. 38. 48.

Triangulum rectangulum ☽⊙O praebet

l ☽⊙ = 3, 2691158.	l ☽⊙ = 3, 2691158.
l ſin. ⊙☽O = 9, 7547412.	l coſ. ⊙☽O = 9, 9152276.
l O⊙ = 3, 0238570.	l ☽O = 3, 1843434.
l L O = 3, 6451176.	☽⊙ = 1528, 7.
l tg. O L ⊙ = 9, 3587384.	L ☽ = 2888, 2.
O L ⊙ = 13°. 27′. 6″.	L O = 4416, 9.

Ex triangulo L⊙O fit

l O⊙ = 3, 0238570.	L⊙ = 4541, 5.
l ſin. O L⊙ = 9, 3666564.	M⊙ = 2693, 2.
l L⊙ = 3, 6571996.	L⊙ + M⊙ = 7234, 7.
L⊙ = 4541, 5.	L⊙ − M⊙ = 1848, 3.

l L ⊙ + M ⊙ = 3, 8594205.
l L ⊙ − M ⊙ = 3, 2667725.

7, 1261930.	l M ⊙ = 3, 43026.
l L M = 3, 5630965.	l L M = 3, 56309.
l reduct. = 0, 3324697.	l tang. M L ⊙ = 9, 86717.
l 7862″, 6 = 3, 8955662	M L ⊙ = 36°. 22′. 20″.
l ſec. M L ⊙ = 0, 09411.	l tang. M L ⊙ = 9, 86717.
l red. = 0, 33246.	= 0. 33246.
l 2, 67 = 0, 42657.	l 1, 58 = 0, 19963.

Hinc M L in tempore 2^h. 11′. 2″, 6 + 2, 67 z − 1, 58 y.

Computus pro initio Eclipſis Mitawae obſervato.

Initium Eclipſis Mitavae obſervatum eſt 2^h. 27′. 58″. t. v. aſſumta Longitudine Mitawae a meridiano Pariſino computata 1^h. 25′. 32″ reperitur Longitudo Solis pro initio 13°. 42′. 39″, 9. Longitudo Lunae 13°. 47′. 49″, 3. Latitudo Lunae 44′. 25″, 3 et correcta 44′. 35″, 3 Bor. Parallaxis in Longitudinem — 33′. 36″, 6, in Latitudinem 32′. 23″, 5, $\frac{1}{2}$ Diameter Lunae apparens = 903″, 0. Hinc Latitudo apparens 12′. 11″, 8 = 731″, 8. Summa ſemidiametrorum Solis et Lunae per — 5″, 5 correcta = 1859″, 4. Parallaxis altitudinis = 2800″, 8, et angulus quem circulus Latitudinis ſormat ad centrum Lunae cum circulo verticali 46°.
Tab. X. Fig. 6. 3′. 36″. Reſolvendo triangulum ⊙ ☽ B obtinebitur:

l ☽ B = 2, 8643924.	☽ ⊙ B = 23°. 10′. 36″.
l ☽ ⊙ = 3, 2693726.	⊙ ☽ B = 66. 49. 24.
l ſin. ☽ ⊙ B = 9, 5950196.	Z L H = 46. 3. 26.
☽ ⊙ B = 23°. 10′. 36″.	L ☽ ⊙ = 67. 7. 10.

Trian-

Triangulum ☉ ☽ O dat

l ☽ ☉ = 3, 2693728.
l ſin. L ☽ ☉ = 9, 9644093.

l O ☉ = 3, 2337821.

l L O = 3, 3176873.

9, 9160948.
☉ L O = 39°. 29′. 58″.

l ☽ ☉ = 3, 2693728.
l coſ. L ☽ ☉ = 9, 5897389.

l ☽ O = 2, 8591117.

☽ O = 722, 6.

L ☽ = 2800, 8.
L O = 2078, 2.

Ex triangulo L ☉ O habebitur

l O ☉ = 3, 2337821.
l ſin. O L ☉ = 9, 8035054.

l L ☉ = 3, 4302767.

L ☉ = 2693, 2.

Si momento initii Mitawae obſervati diſtantia centrorum Solis et Lunae Geocentrica aequalis ſtatuatur minimae diſtantiae centrorum, concludendum foret momentum initii Mitawae obſervatum ad unum minutum primum cum dimidio eſſe erroneum quod cum admitti nequeat, et obſervatio Mitawae habita charactere exactitudinis ſit praedita, non aliter illa cum reliquis conciliari poterit, niſi Latitudo Lunae pro initio augeatur aliquot decimis partibus minuti ſecundi. Et quidem aucta Latitudine 0″, 5 obtinebitur L O = 2695″, 54 et M L in tempore 1′. 32″, 4, correctio autem ipſus M L = 124, 57 *z* − 124, 73 *y* Vnde apparet ex exigua correctione Latitudinis valde ſenſibilem mutationem in quantitatem lineae M L Mitawae redundare debere.

Computus pro fine.

Finis Mitawae obſervatus eſt $4^h. 55'. 44''$. t. v. pro quo reperitur Longitudo Solis 13°. 49′. 1″, 9, Longitudo Lunae 15°. 2′. 12″, 6 Latitudo Lunae per + 10″ correcta 37′. 45″, 8. Parallaxis Longitudinis − 43′. 48″, 6. Latitudinis 29′. 37″, 2 ½ Diameter apparens 898″, 4. Vnde Latitudo Lunae apparens ☽ B = 488″, 6 Summa ſemidiametrorum Solis et Lunae correcta 1754″, 5 Parallaxis altitudi-
Fig. 5. nis L ☽ = 3173″, 1, angulus a circulo Latitudinis et verticali comprehenſus 55. 56. 24″. Ex triangulo igitur ☽ ⊙ B fiet

l ☽ B = 2, 6889535
l ☽ ⊙ = 3, 2682268

l ſin. ☽ ⊙ B = 9, 4207267
☽ ⊙ B = 15°. 16′. 31″

☽ ⊙ B = 15°. 16′. 31″.
⊙ ☽ B = 74. 43. 29
Z L H = 55. 56. 24
⊙ ☽ O = 18. 47. 5

Triangulum ☽ ⊙ O dat

l ☽ ⊙ = 3, 2682268
l ſin. ⊙ ☽ O = 9, 5078119

l O ⊙ = 2, 7760387
l L O = 3, 6927500

l tang. O L ⊙ = 9, 0832887
O L ⊙ = 6°. 54′. 27″

l ☽ ⊙ = 3, 2682268
l coſ. ⊙ ☽ O = 9, 9762285

l ☾ O = 3, 2444553
☽ O = 1755, 7
L ☽ = 3173, 1
L O = 4928, 8

ac denique ex triangulo L O ⊙ fit

l O ⊙ = 2, 7760387
l ſin. O L ⊙ = 9, 0801457

l L ⊙ = 3, 6958930
L ⊙ = 4964, 7

L ⊙ = 4964, 7
M ⊙ = 2963, 2

L ⊙ + M ⊙ = 7657, 9
L ⊙ − M ⊙ = 2271, 5

l L ⊙

l L ☉ + M ☉ = 3, 8841097
l L ☉ — M ☉ = 3, 3563127

7, 2404224

l L M = 3, 6202112
l reduct. = 0, 3324317
l 8967″ = 3, 9526492
l ſec. M L ☉ = 0, 07569
l red. - - 0, 33243

l 2, 56 = 0, 40812

l M ☉ = 3, 43026
l L M = 3, 62025

l tang. M L ☉ = 9, 81005
M L ☉ = 32°. 51′. 10″.

l tang. M L ☉ = 8, 81005
0, 33243

l 1, 38 = 0, 14248

Hinc M L in tempore 2ʰ. 29′. 27″ + 2, 56 z — 1, 38 *y*.

Computus pro initio Eclipſis Petropoli obſervato.

Statuta Longitudine obſervatorii Petropolitani a meridiano Pariſino 1ʰ. 51′. 56″ pro initio Petropoli obſervato 2ʰ. 56′. 26″ eruitur Longitudo Solis 13°. 42′. 45″, 8 Longitudo Lunae 13°. 48′. 51″, 8 Latitudo per + 10″ correcta 44′. 29″, 3 Parallaxis in Longitudinem — 35′. 17″, 1 in Latitudinem 33′. 55″, 7 ½ Diameter Lunae apparens = 901″, 8. Fig. 6.
Hinc Latitudo Lunae apparens 10′. 33″, 6 = 633″, 6. Summa ſemidiametiorum Solis et Lunae per — 5″, 5 correcta = 1858″, 2 Parallaxis altitudinis = 2937″, 1, Angulus quem format circulus Latitudinis cum circulo verticali Z L Π = 40°. 7′. 25″. Reſolvendo triangulum ☉ ☽ B habetur

l ☽ B = 2, 8018152
l ☽ ☉ = 3, 2690925

l ſin. ☽ ☉ B = 9, 5327227
☾ ☉ B = 19°. 56′. 10″

☽ ☉ B = 19. 56. 10
☉ ☽ B = 70. 3. 50
Z L Π = 46. 7. 25
L ☽ ☉ = 63. 48. 45.

Ex

Ex triangulo rectangulo ⊙☾O prodit

l ☽⊙ = 3, 2690925	l ☽⊙ = 3, 2690925
l ſin. ⊙☽O = 9, 9529941	l ſin. L☽⊙ = 9, 6447429
l O⊙ = 3, 2228566	l ☽O = 2, 9138364
l L O = 3, 3257414	☽O = 820
l tang. ⊙LO = 9, 8963152	L☽ = 2937, 1
OL⊙ = 38°. 13′. 28″	LO = 2117, 1

Reſolutio trianguli LO⊙ dat

l O⊙ = 3, 2220566	L⊙ = 2694, 9
l ſin. ☽⊙B = 9, 7915107	M⊙ = 2693, 2
l L⊙ = 3, 4305459	L⊙ + M⊙ = 5388, 1
L⊙ = 2694, 9	L⊙ — M⊙ = 1, 7
l L⊙ + M⊙ = 3, 7314356	
l L⊙ + M⊙ = 0, 1304492	
3, 9618848	l M⊙ = 3, 43026
l M·L = 1, 9869424	l ML = 1, 98094
l red. = 0, 3324317	l tang. ML⊙ = 1, 44932
l 206 = 2, 3133741	ML⊙ = 87°. 57′. 50″
l ſec. ML⊙ = 1, 44942	l tang. ML⊙ = 1, 44932
l red. = 0, 33243	l red. = 0, 33243
l 60, 51 1, 78185	l 60. 50 1, 78175

Hinc ML in tempore 3′. 26″ + 60, 51 z — 60, 50 y.

Calculus pro fine.

Finis Petropoli obſervatus eſt 5^h. 21′. 27″. t. v. pro quo reperitur Longitudo Solis 13^s. 48′. 42″, 0; Longitudo Lu-

Lunae 15°. 1′. 40″,5; Latitudo per + 10″ correcta 37′.49″,4; Parallaxis in Longitudinem — 42′. 51″, 7 in Latitudinem 32′. 11″, 5; ½ Diameter Lunae apparens = 897″, 8, unde Latitudo Lunae apparens 5′. 36, 1 = 336″, 1; ſumma ſemidiametrorum per — 5″, 5 correcta = 1854″, 2; Parallaxis altitudinis = 3216″, 3 angulus a circulo Latitudinis et verticali comprehenſus 52°. 54′. 26″. Ex triangulo igitur ☽ ⊙ B habebimus

l ☽ B = 2, 5287882	☽ ⊙ B = 10°. 30′. 0″
l ☽ ⊙ = 3, 2681566	⊙ ☽ B = 79. 30 0
l ſin. ☽ ⊙ B = 9, 2606316	z L Π = 52. 54. 26
☽ ⊙ B = 10°. 30′. 0″.	⊙ ☽ O = 26. 35. 24

Triangulum rectangulum ⊙ ☽ O dabit

l ☽ ⊙ = 3, 2681566	*l* ☽ ⊙ = 3, 2681566
l ſin. ⊙ ☽ O = 9, 6509350	*l* coſ. ⊙ ☽ O = 9, 9514399
l ⊙ O = 2, 9190916	*l* ☽ O = 3, 2195965
l L O = 3, 6879123	☽ O = 1658, 05
l tang. O L ⊙ = 9, 2311793	L ☽ = 3216, 3
⊙ L ⊙ = 9°. 30′. 50″	L ⊙ = 4874, 35

Denique triangulum L O ⊙ dat

l ⊙ O = 2, 9190916	L ⊙ = 4944, 5
l ſin. O L ⊙ = 9, 2249682	M ⊙ = 2693, 2
l L ⊙ = 3, 6941234	L ⊙ + M ⊙ = 7637, 7
L ⊙ = 4944″, 5	L ⊙ — M ⊙ = 2251, 3
l L ⊙ + M ⊙ = 3, 8829626	
l L ⊙ — M ⊙ = 3, 3524334	
7, 2353960	*l* L ⊙

	$l\, M \odot = 3,43026$
$l\, L M = 3,6176980$	$l\, L M = 3,61760$
l red. $= 0,3324317$	l tang. $M L \odot = 9,81257$
$l\, 8915'', 2 \quad 3,9501297$	$M L \odot = 33^\circ. 0'. 0''$
l ſec. $M L \odot = 6,07640$	l tang. $M L \odot = 9,81257$
l red. $= 0,33243$	l red. $= 0,33243$
$l\, 2,56 = 0,40883$	$l\, 1,39 = 0,14550.$

Hinc M L in tempore $2^h. 28'. 35'', 2 + 2,56\, z - 1,39\, y$.

Quum correctiones z et y debeant eſſe quam minimae, quia ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae, nec non et Latitudo Lunae correctae fuerunt adhibitae, atque cum coefficientes numerici ipſis z et y praefixi prodierint non nimis magni, excepto initio Mitawae et Petropoli obſervato, correctiones rectarum M L et M L′ in calculis ſequentibus tuto negligere licebit.

His praeparatis triplici modo Parallaxis Lunae inveſtigari poterit conferendo vel initium vel finem Cantabrigiae obſervatum cum ſimilibus momentis in Europa obſervatis, vel denique ex durationibus Eclipſis collatis cum durationibus per calculum elicitis. Verum cum duo primi modi requirant exactam Longitudinem Cantabrigiae, quae diverſa a diverſis ſtatuitur, praemonenda mihi non nulla videntur de illius Longitudine.

In calculis praecedentibus Longitudo Cantabrigiae a meridiano Pariſino aſſumta eſt ex Notitia temporum $4^h. 53'. 36''$, in Vol. autem II Actorum americanorum ſtatuitur illa $4^h. 53'. 51''$, differentia exiſtente $15''$, tanta ſcilicet,

quae correctionem Parallaxeos Lunae quaeſitam reddere valet modo negativam, modo affirmativam, prout haec vel illa Longitudo in Calculo adhibeatur. Quam ob rem medium ex iis ſumere eo tutius eſſe exiſtimavi, quod ex formatione et ruptura annuli eadem quam proxime prodeat Longitudo (videatur Nov. Act. Tom. X. pag. 469.) Aſſumta igitur Longitudine Cantabrigiae $4^h. 53'. 44''$. Latitudo Lunae pro fine prodit aliquantum diverſa ſc. $43'. 30'', 6$ et valor ipſius M L' in tempore prodit $21'. 10'', 8$; pro initio autem manet idem; unde ex initio Eclipſis pro Parallaxi Lunae aequatorea ſequentes orientur comparationes.

Comparatio I.

Initium Cantabr.	$18^h. 1'. 27''$	M L in temp.	$2^h. 6'. 10''$.	
Differ. merid.	4. 44. 24		— 32. 57	Gren.
	22. 45. 51	Effect. par.	1. 33. 13	ex calc.
Init. Grenov.	0. 18. 41	Parallaxis	54. 33,7	
Effect. parall.	1. 32. 50	correctio	— 13,3	

Comparatio II.

Initium Cantabr.	$18^h. 1'. 27''$	M L in temp.	$2^h. 6'. 10''$.	
Differ. merid.	4. 53. 44		— 27. 18.	Paris.
	22. 55. 11	Effect. par.	1. 38. 52.	
Init. Paris.	0. 33. 42	Parall.	54. 35,4	
Effect. Parall.	1. 38. 31	correctio	— 11,6	

Comparatio III.

Init. Cantabr.	$18^h. 1'.27''$.	M L in temp.	$2^h. 6'.10''$.
Differ. merid.	5. 18. 14.		— 14. 41. Manh.
	23. 19. 41.	Effect. Parall.	1. 51. 29. ex calc.
Init. Manheim.	1. 10. 55.	Parallaxis	54. 39, 6.
Effect. Parall.	1. 51. 14.	Correctio	— 7, 4.

Comparatio IV.

Init. Cantabr.	$18^h. 1'.27''$.	M L in temp.	$2^h. 6'. 10''$.
Differ. merid.	5. 37. 44.		+ 21. 51, 3. Paler.
	23. 39. 11.	Effect. parall.	2. 28. 1, 3.
Init. Palerm.	2. 7. 0.	Parallaxis	54. 42, 4.
Effect. Parall.	2. 27. 49.	Correctio	— 4, 6.

Comparatio V.

Init. Cantabr.	$18^h. 1'.27'$.	M L in temp.	$2^h. 6'.10''$.
Differ. merid.	6. 19. 16.		+ 1. 32. Mitaw
	0. 20. 43.	Effect. Parall.	2. 7. 42. ex calc.
Init. Mitaw.	2. 27. 58.	Parallaxis	54. 35, 4.
Effect. Parall.	2. 7. 15.	Correctio	— 11, 6.

Comparatio VI.

Init. Cantabr.	$18^h. 1'.27''$.	M L in temp.	$2^h. 6'. 10''$.
Differ. merid.	6. 45. 40.		+ 3. 26. Petrop.
	0. 47. 7.		2. 9. 36.
Init. Petrop.	2. 56. 27.	Parallaxis	54. 39, 2.
Effect. Parall.	2, 9. 20.	Correctio	— 7, 8.

Quodſi

Quodſi uſus fiat Longitudinis Cantabrigiae $4^{h}. 53'. 36''$, quanta in notitia temporum ſtatuitur, correctio Parallaxis prodit equidem minor, attamen iuſto maior quam ut admitti queat. Cum igitur initium Cantabrigiae obſervatum fuerit in exigua Solis altitudine, probabile videtur aliquot minutis ſecundis illud tardius fuiſſe obſervatum; comparationes etenim ſequentes a fine patitae multo minorem praebent parallaxeos correctionem.

Comparatio I.

Finis Cantabr.	$20^{h}. 28'. 26''$.	M L' in temp.	$- 21'. 11''$.
Differ. merid.	4. 44. 24.		2^{h}. 15. 15. Gren.
	1. 12. 50.	Effect. parall.	2. 54. 4. ex calc.
Finis Grenov.	3. 6. 47.	Parall.	54. 43,6
Effect. parall.	1. 53. 57.	Correctio	— 3,4.

Comparatio II.

Finis Cantabr.	$20^{h}. 28'. 26''$.	M L' in temp.	$- 21'. 11''$.
Differ. merid.	4. 53. 44.		2. 16. 43. Par.
	1. 22. 10.	Effect. parall.	1. 55. 32.
Finis Pariſiis	3. 17. 37.	Parallaxis	54. 44,6.
Effect. parall.	1. 55. 27.	Correct.	— 2,4.

Comparatio III.

Finis Cantabr.	$20^{h}. 28'. 26''$.	M L' in temp.	$- 21'. 11''$.
Differ. merid.	5. 18. 14.		2^{h}. 22. 14. Manh.
	1. 46. 40.	Effect. parall.	2. 1. 3.
Finis Manheim.	3. 47. 42.	Parallaxis	54. 46,5.
Effect. parall.	2. 1. 2.	Correctio	— 0,5.

Com-

Comparatio IV.

Finis Cantabr.	20^h. 28′. 26″.	ML′ in temp.	— 21′. 11″.	
Differ. merid.	5. 37. 49.		2. 11. 3.	Paler.
	2. 6. 15.	Effect. parall.	1. 49. 52.	
Finis Palermae	3. 56. 5.	Parallaxis	54. 46.	
Effect. parall.	1. 49. 50.	Correctio	— 1.	

Comparatio V.

Finis Cantabr.	20^h. 28′. 26″.	ML′ in temp.	— 21′. 11″	
Differ. merid.	6. 10. 14.		2^h. 29. 27.	Mitaw.
	2. 47. 40.	Effect. parall.	2. 8. 16.	
Finis Mitaw.	4. 55. 44.	Parallaxis	54. 41,9.	
Effect. parall.	2. 8. 4.	Correctio	— 5,1.	

Comparatio. VI.

Finis Cantabr.	20^h. 28′. 20″.	ML′ in temp.	— 21′. 11″.	
Differ. merid.	6. 45. 40.		2. 28. 35.	Petr.
	3. 14. 6.	Effect. parall.	2. 7. 24.	
Finis Petropol.	5. 21. 27.	Parallaxis	54. 45,7.	
Effect. parall.	2. 7. 21.	Correctio.	— 1,3.	

Ex his comparationibus ſequitur correctionem parallaxis non maiorem — 5″, 1 neque minorem — 1″, 0 ſtatui debere. Verum cum Longitudo Cantabrigiae, prout ſupra dictum eſt, laboret aliqua incertitudine, videndum erit quantam correctionem praebitura ſit comparatio durationum obſervatarum. Qua ratione comparatio iſta inſtitui debeat breviter hic exponere e re eſſe exiſtimo.

Reſe-

Referat ut ante E C Eclipticam, ☉ locum Solis, G M P′ orbitam Lunae relativam ex Centro telluris ſpectatam, ☉ M minimam centrorum diſtantiam. Sit praeterea G locus Lunae Geocentricus tempore initii exempli gratia Grenovicenſis, et G loc s Lunae Geocentricus momento finis ibidem obſervati, habebitur G G′ ſpatium, quod Luna durante Eclipſi ex centro viſa parcurreret, et cum M G et M G computatae ſint in tempore, obtinebitur tempus, quod Luna durante Eclipſi ad percurrendum ſpatium G G′ impenderet; tempus hoc etſi improprie nomine durationis Geocentricae appellare liceat. Pari modo ſi P denotet punctum, ubi Luna momento initii, exempli gratia, Panormae obſervati, et P′ momento finis ibidem obſervati ex cento ſpectata videretur, recta P P′ in tempus converſa dabit durationem Geocentricam durationi Palermae obſervatae reſpondentem. Differentia rectarum G G′ et P P′ in tempore exhibebit differentiam effectuum a parallaxi proficiſcentium, quae cum differentia durationum obſervatarum collata patefaciet, quanta ſumi debuiſſet parallaxis, ut effectus prodeat is, quem obſervationes indicant. Tab. X. Fig. 8.

Minima omnium duratio Eclipſis obſervata eſt Palermae, idcirco omnes reliquae cum illa erunt conferendae.

	Durat. Geocentr.	Duratio obſervata.
Palermae	$1^h.\ 49'.\ 11'',3.$	$1^h.\ 49'.\ 5''.$
Cantabrig.	2. 27. 25.	2. 26. 59.
	38. 13,7.	37. 54.
Palermae	1. 49. 11,3.	1. 49. 5.
Grenov.	2. 49. 12,7.	2. 49. 6.
	59. 1,4.	59. 1.

Du-

	Durat. Geocentr.	Duratio obſervata.
Palermae	$1^h. 49'. 11'', 3.$	$1^h. 49'. 5''.$
Pariſis	2. 44. 1.	2. 43. 55.
	54. 49, 7.	54. 50.
Palermae	1. 49. 11, 3.	1. 49. 5.
Manheim	2. 36. 55.	2. 36. 47.
	47. 43, 7.	47. 42.
Palermae	1. 49. 11, 3.	1. 49. 5.
Mitaw.	2. 27. 54, 6.	2. 27. 46.
	38. 41, 3.	38. 41.
Palermae	1. 49. 11, 3.	1. 49. 5.
Petropoli	2. 25. 9, 2.	2. 25. 0.
	35. 58, 1.	35. 55.

Omnes itaque comparationes a duratione petitae excepta Cantabrigienſi, indicant Parallaxin Lunae aequatoream in computo adhibitam fere nulla egere correctione; nam mora Geocentrica Petropolitana tribuendo ipſi y exigua correctione ad conſenſum cum reliquis reduci poterit. Cum vero comparationes ab initio et fine petitae praebuerint correctionem negativam, ad examen revocavi moram Palermae obſervatam, et conferendo initium Palermae obſervatum cum initio Grenovicenſi et Pariſienſi reperi illud iuſto tardius fuiſſe obſervatum. Poſita Longitudine Palermae a meridiano Pariſino computata $44'. 5''.$ obſervatio Grenovicenſis arguit initium Palermae $6''$. Pariſienſis vero $4''$ iuſto tardius fuiſſe obſervatum. Cum itaque obſervationes Grenovici et Pa-

Pariſiis habitae optime interſe conſentiant, omnes que characteres exactitudinis prae ſe ferant, vero ſimilius videtur initium Palermae obſervatum minuendum eſſe aliquot minutis ſecundis, quo facto correctio parallaxeos a duratione petita proditura eſt itidem negativa. Cum vero determinatio hinc petita fundetur in coniectura proſequendae illi ſuperſedeo.

Excluſis igitur determinationibus ab initio et duratione Eclipſis petitis ſequitur correctionem Parallaxis Lunae aequatoream a *Tobia Maiero* in Tabulis Lunaribus aſſumtam ſub hypotheſi diametri aequatoris ad axem telluris = 230 : 229 intra 1″ et 5″ conſiſtere debere. Verum determinationem hanc pro exacta venditare non audeo, et tentamen hoc ea potiſſimum mente Illuſtri Academiae Scientiarum offero, ut aliis anſam praebeam accuratius inquirendi in Parallaxin Lunae, ſi ſuppetant Eclipſes Solis et praeſertim occultationes ſtellarum fixarum a Luna huic ſcopo idoneae.

OB-

OBSERVATIONS
DE QUELQUES ÉTOILES,

qui culminent à peu de diſtance du zenit, pour ſervir à vérifier la hauteur du pôle de l'obſervatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Par
M. l'Abbé HENRY.

Préſenté à l'Académie le 25 Oct. 1798.

Je n'ai commencé à me ſervir du grand quart-de-cercle mural que vers le milieu de Juin de l'année dernière 1797. Depuis cette époque j'ai fait avec cet inſtrument un aſſez grand nombre d'obſervations, dont une partie a ſervi immédiatement à le placer exactement dans le plan du méridien & ne pourra guère être d'autre utilité; je parle ſurtout des paſſages des aſtres obſervés avant la fin d'Octobre. Car pour les diſtances au zenit, elles pourront ſervir à calculer leurs déclinaiſons dès que l'erreur de la collimation de l'inſtrument aura été ſuffiſamment conſtatée, ce que je n'ai pas encore eu les moyens d'exécuter jusqu'à préſent.

Pour

Pour parvenir à la connoître, au moins à peu-prés, j'ai obſervé, avec un petit quart-de-cercle, de Siſſon, de deux pieds & demi de rayon, tourné alternativement à l'eſt & à l'oueſt, les diſtances au zenit des étoiles β, γ, δ, ε, ζ, de la grande ourſe, en même tems que je les obſervois au quart-de-cercle mural; de cette manière je me ſuis aſſuré que cette erreur, n'eſt que de quelques ſecondes. Mais il eſt difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'obtenir une préciſion plus grande, à l'aide d'un auſſi petit inſtrument; & par conſéquent de s'aſſurer de ſa vraie quantité. Cette erreur connue fourniroit le moyen le plus ſimple de vérifier la latitude de notre Obſervatoire par la comparaiſon des obſervations faites ici & à Paris où il ne reſte pas plus d'une ou deux ſecondes d'incertitude ſur la hauteur du pôle. En attendant que je puiſſe, par quelque moyen, obtenir une vérification complette du quart de cercle mural, voici les diſtances au zenit de quelques étoiles qui culminent à peu de diſtance de ce point, & qui ſont les plus propres pour ſervir à cette comparaiſon.

An, mois et jour.	Diſtances au zenit. Diviſion intérieure.	Diviſion extérieure.	réduite.	milieu.
		γ du Dragon.		
9 Juillet 1797.	8°. 24'. 51,"6	8. 15. 9. 8,"8	8°. 24'. 51,"6	8°. 24'. 51,"6
12	- - 50, 9	- - 9. 7, 9	- - 50, 7	- - 50, 8
13	- - 51, 2	- - 9. 7, 9	- - 50, 7	- - 50, 8
16	- - 50, 8	- - 9. 6, 9	- - 49, 7	- - 50, 2
18	- - 49, 3	- - 9. 6, 7	- - 49, 5	- - 49, 4
30	- - 47, 3	- - 9. 5, 9	- - 48, 1	- - 47, 0

γ du Dragon.

4	Août. 1797.	8°. 24'. 48,"5	8. 15. 9. 5,"2	8°. 24'. 48,"0	8°. 24'. 48,"2
5		- - 48, 8	- - 9. 4, 8	- - 47, 6	- - 48, 2
10		- - 46, 4	- - 9. 3, 3	- - 46, 1	- - 46, 3
13		- - 47, 6	- - 9. 3, 8	- - 46, 6	- - 47, 1
15		- - 45, 2	- - 9. 2, 3	- - 45, 5	- - 45, 2
16		- - 46, 2	- - 9. 3, 2	- - 46, 0	- - 46, 1
17		- - 46, 7	- - 9. 3, 2	- - 46, 0	- - 46, 3
21		- - 45, 5	- - 9. 3, 0	- - 45, 8	- - 45, 6
23		- - 45, 5	- - 9. 1, 5	- - 44, 3	- - 44, 9
24		- - 44, 2	- - 9. 2, 1	- - 44, 9	- - 44, 5
26		- - 45, 0	- - 9. 1, 9	- - 44, 7	- - 44, 8
27		- - 45, 6	- - 9. 2, 2	- - 45, 0	- - 45, 3
28		- - 44, 5	- - 9. 1, 9	- - 44, 7	- - 44, 6
31		- - 43, 5	- - 9. 1, 2	- - 44, 0	- - 43, 7
2	Septembre. 1797.	- - 45, 5	- - 9. 2, 7	- - 45, 5	- - 44, 5
3		- - 44, 5	- - 9. 0, 6	- - 43, 4	- - 43, 9
4		- - 42, 5	- - 9. 0, 0	- - 42, 8	- - 42, 6
5		- - 42, 9	- - 9. 0, 1	- - 42, 9	- - 42, 9
9		- - 41, 6	- - 8. 12, 8	- - 42, 4	- - 42, 0
11		- - 41, 8	- - 8. 13, 0	- - 42, 6	- - 42, 2
21		- - 49, 3	- - 8. 11, 6	- - 40, 2	- - 39, 7
23		- - 4[illegible], 1	- - 8. 11, 4	- - 40, 0	- - 40, 0

c du Dragon.

24	Août 1797	0°. 47'. 26,"2	0°. 13'. 8. 0,"1	0°. 47'. 27,"5	0°. 47'. 26,"8
27		- - 28, 3	- - 8. 3, 3	- - 30, 8	- - 29, 5
28		- - 23, 0	- - 7. 12, 2	- - 26, 3	- - 24, 6
31		- - 22, 9	- - 7. 8, 2	- - 22, 4	- - 22, 7

ο du Dragon.

1	Septembre 1797.	0°. 47′. 22,″5	[illegible]. 13. 7. 6,″0	0°. 47′. 20,″2	0°. 47′. 21,″4
2		- - 22, 0	- - 7. 7, 9	- - 22, 4	- - 22, 2
3		- - 23, 0	- - 7. 10, 5	- - 24, 7	- - 23, 8
4		- - 23, 0	- - 7. 9, 0	- - 23, 2	- - 23, 1
9		- - 22, 5	- - 7. 8, 3	- - 22, 5	- - 22, 5
11		- - 21, 5	- - 7. 7, 0	- - 21, 2	- - 21, 3
12		- - 20, 3	- - 7. 8, 7	- - 22, 9	- - 21, 6
15		- - 18, 0	- - 7. 4, 5	- - 18, 7	- - 18, 2
17		- - 17, 5	- - 7. 1, 1	- - 15, 3	- - 16, 4
23		- - 18, 5	- - 7. 2, 1	- - 16, 3	- - 17, 4
26		- - 16, 0	- - 7. 2, 3	- - 16, 5	- - 16, 1

κ du Cygne.

9	Septembre. 1797.	6°. 55′. 49,″5	7. 6. 4. 5,″0	6°. 55′. 48,″3	6°. 55′. 48,″9
11		- - 49, 9	- - 4. 7, 1	- - 50, 4	- - 50, 1
13		- - 50, 2	- - 4. 5, 3	- - 48, 6	- - 49, 4
15		- - 49, 3	- - 4. 5, 5	- - 48, 8	- - 49, 1
17		- - 47, 7	- - 4. 3, 5	- - 46, 8	- - 47, 4
21		- - 48, 6	- - 4. 4, 8	- - 48, 1	- - 48, 4
23		- - 49, 8	- - 4. 5, 5	- - 48, 8	- - 49, 4
25		- - 47, 7	- - 4. 4, 5	- - 46, 8	- - 47, 3
27		- - 46, 8	- - 4. 4, 5	- - 46, 8	- - 46, 8
2	Octobre.	- - 45, 6	- - 4. 2, 0	- - 45, 3	- - 45, 4
3		- - 45, 2	- - 4. 1, 7	- - 45, 0	- - 45, 1
4		- - 44, 5	- - 4. 2, 3	- - 45, 6	- - 45, 5

a de

α de Caſſiopée.

14 Oct. 97	4°.30′.28,″0	4.12.14.10,″6	4°.30′.26,″5	4°.30′.27,″2
17	- - 27, 6	- - 14.10, 8	- - 26, 7	- - 27, 6
10 Nov.	- - 25, 8	- - 14. 9, 5	- - 25, 4	- - 25, 6
21	- - 23, 8	- - 14. 7, 3	- - 23, 4	- - 23, 6

γ de Caſſiopée.

14 Oct. 1797.	0°.19′. 6,″8	0. 5. 7. 0,″3	0°.19′. 7,″3	0°.19′. 7,″0
17	- - 5, 7	- - 7. 0, 0	- - 7, 0	- - 6, 3
19	- - 8, 0	- - 7. 0, 8	- - 7, 8	- - 7, 9
31	- - 5, 0	- - 6.12, 9	- - 6, 7	- - 5, 8
10 Nov.	- - 5, 7	- - 6.13, 0	- - 6, 8	- - 6, 1
21	- - 4, 5	- - 6.10, 2	- - 4, 0	- - 4, 3

η de Caſſiopée.

17 Oct. 97.	3°.11′.44,″4	3. 6. 8. 9,″1	3°.11′.45,″1	1°.11′.44,″8
19	- - 43, 7	- - 8. 7, 9	- - 43, 9	- - 43, 8
21	- - 42, 5	- - 8. 6, 1	- - 42, 0	- - 42, 2

β de la grande Ourſe.

26 Avril 1798.	2°.28′.16,″5	2°.10. 2.10,″0	2°.28′.15,″8	2°.28′.15,″1
27	- - 15, 4	- - 2. 9, 6	- - 15, 4	- - 15, 4
28	- - 16, 0	- - 2. 9, 6	- - 15, 4	- - 15, 7
29	- - 15, 5	- - 2. 8, 6	- - 14, 4	- - 14, 9
30	- - 16, 1	- - 2. 9, 0	- - 14, 8	- - 15, 4
1 May 1798.	- - 15, 5	- - 2. 9, 1	- - 14, 9	- - 15, 2
2	- - 17, 4	- - 2. 9, 5	- - 15, 3	- - 16, 4
3	- 16, 4	- - 2.10, 6	- - 16, 4	- - 16, 4
4	- 17, 5	- - 2.12, 4	- - 18, 2	- - 17, 8
5	- - 16, 4	- - 2. 9, 9	- - 15, 7	- - 16, 1

γ de

γ de la grande Ourſe.

30 Avr. 97.		5°. 6'. 54,"3	5. 7. 4. 10,"9	5°. 6'. 54,"6	5°. 6'. 54,"5
1	May 1798.	- - 54, 5	- - 4. 12, 0	- - 55, 9	- - 55, 2
2		- - 56, 5	- - 5. 0, 0	- - 56, 9	- - 56, 7
3		- - 58, 1	- - 5. 1, 6	- - 57, 5	- - 57, 8
4		- - 58, 8	- - 5. 2, 0	- - 58, 0	- - 58, 4
5		- - 58, 6	- - 5. 2, 0	- - 58, 0	- - 58, 3
6		- - 59, 7	- - 5. 0, 7	- - 56, 7	- - 58, 3
7		- - 59, 6	- - 5. 1, 0	- - 57, 0	- - 58, 3
8		- - 59, 6	- - 5. 2, 1	- - 58, 0	- - 58, 8
9		- - 58, 8	- - 5. 1, 7	- - 57, 6	- - 58, 2
10		- - 58, 1	- - 5. 1, 7	- - 57, 6	- - 57, 8
11		- - 59, 9	- - 5. 4, 0	- - 59, 9	- - 59, 9
12		- - 58, 4	- - 5. 1, 5	- - 57, 4	- - 57, 7
13		- - 57, 7	- - 5. 2, 8	- - 58, 7	- - 58, 2
16		- - 58, 4	- - 5. 2, 5	- - 58, 4	- - 58, 4

δ de la grande Ourſe.

4	May 1798.	1°. 46'. 45,"0	1. 14. 5. 12,"6	1°. 46'. 46,"6	1°. 46'. 45,"9
5		- - 45, 4	- - 5. 11, 9	- - 45, 9	- - 45, 7
6		- - 46, 3	- - 5. 12, 5	- - 46, 5	- - 46, 4
7		- - 46, 4	- - 5. 12, 3	- - 46, 3	- - 46, 4
8		- - 47, 0	- - 6. 0, 2	- - 47, 4	- - 47, 2
9		- - 46, 5	- - 5. 12, 0	- - 46, 0	- - 46, 2
10		- - 48, 8	- - 6. 0, 4	- - 47, 6	- - 48, 2
11		- - 47, 1	- - 6. 1, 0	- - 48, 2	- - 47, 6
12		- - 48, 4	- - 6. 1, 4	- - 48, 6	- - 48, 5
13		- - 46, 0	- - 6. 0, 5	- - 47, 7	- - 46, 8
14		- - 45, 9	- - 5. 12, 8	- - 46, 8	- - 46, 4
16		- - 46, 8	- - 6. 0, 8	- - 47, 8	- - 47, 3

ε de

ε de la grande Ourſe.

8	May 1798.	2°. 52'. 30,"0	3. 1. 1. 6,"8	2°. 52'. 35,"9	2°. 52'. 30,"0
9		- - 35, 4	- - 1. 6, 6	- - 35, 7	- - 35, 6
10		- - 37, 5	- - 1. 7, 6	- - 36, 7	- - 36, 1
11		- - 38, 5	- - 1. 7, 4	- - 36, 5	- - 37, 5
12		- - 36, 5	- - 1. 8, 0	- - 37, 1	- - 36, 8
13		- - 35, 5	- - 1. 8, 3	- - 37, 4	- - 36, 5
14		- - 39, 2	- - 1. 9, 6	- - 38, 7	- - 38, 9
15		- - 36, 3	- - 1. 7, 9	- - 37, 0	- - 36, 6
16		- - 37, 3	- - 1. 8, 4	- - 37, 5	- - 37, 4
22		- - 37, 3	- - 1. 8, 1	- - 37, 0	- - 37, 1
23		- - 36, 5	- - 1. 8, 0	- - 37, 9	- - 37, 2
24		- - 36, 0	- - 1. 9, 3	- - 38, 4	- - 37, 2
25		- - 37, 5	- - 1. 9, 0	- - 38, 1	- - 37, 8
26		- - 37, 3	- - 1. 8, 3	- - 37, 4	- - 37, 3
27		- - 36, 5	- - 1. 9, 7	- - 38, 0	- - 37, 6
28		- - 38, 4	- - 1. 8, 5	- - 37, 6	- - 38, 0

ζ de la grande Ourſe.

19	May 1798.	3°. 57'. 5,"0	+ 3. 6. 12,"5	3°. 57'. 4,"4	3°. 57'. 5,"0
22		- - 6, 5	- - 6. 11, 5	- - 3, 4	- - 4, 9
23		- - 5, 0	- - 6. 11, 5	- - 3, 4	- - 4, 5
24		- - 5, 8	- - 6. 11, 0	- - 3, 9	- - 4, 8
25		- - 6, 3	- - 6. 11, 8	- - 4, 7	- - 5, 5
26		- - 7, 0	- - 6. 10, 9	- - 3, 3	- - 5, 4
27		- - 5, 6	- - 6. 13, 1	- - 6, 0	- - 5, 6
28		- - 7, 0	- - 6. 10, 5	- - 3, 4	- - 5, 2
29		- - 4, 7	- - 6. 11, 3	- - 3, 2	- - 4, 0
30		- - 6, 5	- - 6. 13, [illegible]	- - 4, 9	- - 5, 7

θ du

θ du Dragon.

7	Juin 1798.	0°. 49′. 44,″5	. 14. 2. 3,″7	0°. 49′. 43,″5	0°. 49′. 44,″1
8		- - 41, 4	- - 2. 1, 8	- - 41, 6	- - 41, 5
9		- - 41, 0	- - 2. 3, 8	- - 43, 6	- - 42, 3
18		- - 41, 5	- - 2. 1, 5	- - 41, 3	- - 41, 4
19		- - 41, 8	- - 2. 0, 8	- - 40, 6	- - 41, 1
20		- - 42, 7	- - 2. 2, 4	- - 42, 2	- - 42, 5
21		- - 41, 6	- - 2. 1, 9	- - 41, 7	- - 41, 6
22		- - 42, 5	- - 2. 2, 5	- - 42, 3	- - 42, 4
23		- - 43, 6	- - 2. 3, 1	- - 42, 9	- - 43, 2
24		- - 42, 9	- - 2. 2, 7	- - 42, 5	- - 42, 7

Après avoir appliqué à ces diſtances au zenit la réfraction, l'aberration & la nutation relatives à chaque étoile & en ſuppoſant la hauteur du pôle de l'obſervatoire de 50°. 56′. 25″. j'en ai déduit les déclinaiſons de ces Etoiles, pour le premier de Janvier 1800, telles qu'elles ſuivent.

Noms

Noms des Étoiles.	Déclin. moyenne Le 1 Janv. 1800.	Variation. annuelle.
γ du Dragon - -	51°. 51′. 13,″8. B.	— 0,″70
ο du Dragon - -	59. 8. 48, 4. B.	+ 4, 17
κ du Cygne - -	53. 0. 24, 7. B.	+ 6, 20
α de Caſſiopée - -	55. 25. 46, 7. B.	+ 19, 90
η de Caſſiopée - -	56. 45. 10, 5. B.	+ 19, 79
γ de Caſſiopée - -	59. 37. 52, 4. B.	+ 19, 67
β de la grande Ourſe	57. 27. 14, 5. B.	— 19, 12
γ de la grande Ourſe	54. 48. 32, 9. B.	— 19, 99
δ de la grande Ourſe	58. 8. 44, 4. B.	— 20, 04
ε de la grande Ourſe	57. 2. 56, 3. B.	— 19, 66
ζ de la grande Ourſe	55. 58. 28, 0. B.	— 18, 96
θ du Dragon - -	59. 6. 21, [illegible]. B.	10, 32

Mais ces déclinaiſons ne ſont qu'hypothétiques puiſqu'elles ſuppoſent l'erreur de l'inſtrument nulle & la hauteur du pôle éxactement connue, ce qui peut n'être pas rigoureuſement vrai.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES DES ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER,

faites à Mitau, dans le Gouvernement de Courlande, à l'Obſervatoire du Gymnaſe académique, avec une Lunette achromatique de Dollond à triple objectif, grandiſſant 80 fois, & ayant une ouverture de 41 lignes du pied de Paris.

Par
GUILL. TH. FR. BEITLER.

Préſenté à l'Académie le 27 Septembre 1798.

La Colonne *O* annonce l'ouverture du diaphragme qui, placé ſur l'objectif avant l'immerſion, ou après l'émerſion, fit disparoître le Satellite à mes yeux. La colonne *D* marque la différence entre le moment calculé de l'immerſion ou émerſion du centre d'un Satellite, et celui de l'obſervation. en retranchant le dernier du premier. J'ai, comme à l'ordinaire, employé pour ce calcul les Tables de Mr. *Lambre*, en ſuppoſant la différençe des Méridiens entre les obſervatoires de *Paris* et de *Mitau* $= 1^h\,25'\,32''$.

Temps vrai astronomiq. 1797. vieux stile.					Obſervations avec leurs circonſtances.	O.	D.	
	jours.	heures	′	″		‴	′	″
Août.	10	9	30	10	Immerſion du III. Satellite. Les bandes viſibles, mais pas parfaitement diſtinctes. Hauteur de ♃ = 8°.	—	— 1	25
		11	54	31	Emerſion du III. Sat. Les bandes comme dans l'obſervation précédente. Hauteur de ♃ = ½°.	7	— 0	19
			59	13	Le III. Satellite a toute ſa clarté.			
	15	10	44	14	Le II Satellite ne ſe diſtingue plus qu'avec peine.			
				36	Immerſion totale du II Satellite. Le ciel eſt parſemé de beaucoup de nuages noirs, et pourtant ♃ eſt bien arrondi et les bandes ſont diſtinctes.	11	— 0	42
	17	13	31	1	Je ſoupçonne le commencement de l'immerſion du II Satellite.			
			36	51	Je ne diſtingue plus qu'avec peine ce Satellite.			
			37	6	Immerſion totale du II. Satellite. Le ciel eſt très clair, les bandes ſont diſtinctes, le diſque de la Planète bien arrondi. Très bonne obſervation.	6	— 2	35
		15	56	29	Emerſion du III. Satellite. Les bandes encore diſtinctes, et le			

Temps vrai astronomiq. 1797. vieux ſtile.					Obſervations avec leurs circonſtances.	O.	D.	
	jours	heures	′	″		‴	′	″
Août.					disque de la Planète bien arrondi. Très bonne obſervation, non obſtant le crepuſcule.	8	−0	44
	22	8	53	9	Le I. Satellite disparoît, l'objectif de ma Lunette étant couvert d'un diaphragme de 18‴ d'ouverture.			
			54	7	Immerſion du I. Satellite. L'objectif de la Lunette étant degagé du diaphragme précédent, le ciel très clair, les bandes viſibles, mais pas diſtinctes, parceque la Planète à la hauteur de 9°, étoit encore un peu plongée dans les vapeurs de l'horizon. Le Satellite avoit auparavant alternativement disparu et reparu. Obſervation médiocre.	15	+0	20
	22	13	22	3	Le II. Satellite vu par un diaphragme de 9‴, placé ſur l'ouverture de la Lunette, s'évanouit.			
			24	19	Le diaphragme étant retiré, le II. Satellite me ſemble disparoître.			
			24	21	Immerſion certaine du II. Sat. Les bandes très belles, et le			

Temps vrai astronomiq. 1797. vieux stile.					Obſervations avec leurs circonſtances.	O.	D.	
	jours	heures	′	″		‴	′	″
Septembre.					bord bien coupé. Très bonne obſervation.	8	−1	9
	5	12	46	19	La lumière du I. Satellite a diminué.			
			47	12	Immerſion du I. Satellite. Les bandes diſtinctes, le ciel aſſez ſerein dans la région de ♃, la Planète bien arrondie. En jettant après cette obſervation par hazard mes yeux ſur l'étoile *Algol*, je rémarquai que la lumière plus foible que celle de β *Trianguli* égaloit en clarté γ *Trianguli*. et ſurpaſſoit un peu celle de ϛ *Perſée*. A 13^h. 12′. t vr. des nuages arrivés m'empêcherent de continuer l'obſervation de ce phénemène, dans lequel je ne m'apperçus d'aucun changement, pendant les 23 minutes, que je m'occupai à comparer les clartés réſpectives d'*Algol* et des étoiles en ſon voiſinage. La table de Mr. *Wurm* annonce le plus grand obſcurciſſement à 13^h. 15′. 41″. t. v. de *Mitau*.	8	+0	18

Temps vraí astronomiq. 1797. vieux stile.	jours	heures	′	″	Obſervations avec leurs circonſtances.	O. ‴	D. ′	″
Septembre.	9	8	3	21	Je ſoupçonne l'immerſion du II. Satellite.			
				23	Immerſion certaine du II. Satellite. Hauteur de ♃ = 11½°. Le ciel ſerein, les bandes belles, la Planète bien coupée.	11	—0	14
	16	10	43	20	Immerſion du II. Satellite. Les bandes belles, ♃ diſtinctement arrondi, non obſtant les vapeurs volantes dans l'Atmoſphère.	11	—0	41
	22	9	52	37	Le III. Satellite ſcintille encore très foiblement.			
			54	15	Immerſion du III. Satellite. Diſtance de la Lune presque pleine environ de 30°. Les bandes diſtinctement viſibles, et le bord de ♃ aſſez bien terminé.	9	+0	8
	23	10	21	31	Immerſion du II. Satellite, qui dans ce moment trop près de l'oppoſition, toucha presque le bord de ♃ mal arrondi et ſcintillant. Des nuages dans le voiſinage de la region de ♃ couvrirent le ciel peu de minutes après et firent tomber la premiere neige de l'automne.			

Temps vrai aſtronomiq. 1797. vieux ſtile.					Obſervations avec leurs circonſtances.	O.	D.	
	jours	heures	′	″		‴	″	′
Septembre.					La Lune preſque pleine n'étoit éloignée que de 15°. et l'Atmoſphère étoit chargée de vapeurs. Obſervation *douteuſe*.	–	+ 1	2
	4	7.	59	11	Emerſion du II. Satellite. Peu de momens après le Satellite disparût de nouveau, à cauſe des vapeurs dans l'Atmoſphère et la ſcintillation de la Planète. Le bord de ♃ pas bien coupé, et les bandes médiocrement diſtinctes. Obſervation *douteuſe* par les dites raiſons et à cauſe de la proximité de l'oppoſition.	–	+ 0	0
Octobre.	11	10	36	47	Emerſion du II. Satellite. Le bord de la Planète bien arrondi, les bandes belles. Bonne obſervation, quoiqu'il y eût des vapeurs volantes dans l'Atmoſphère.	10	+ 0	+5
	28	6	7	24	Immerſion du III. Satellite, Le ciel parſemé de nuages. et l'Atmoſphère remplie de vapeurs Quelques momens après je ſoupçonnois entrevoir encore des veſtiges très foibles du Satellite, ſans pouvoir pourtant			

Temps vrài astronomiq. 1797. vieux stile.					Obſervations avec leurs circonſtances.	O.	D.	
	jours	heures	′	″		‴	′	″
November.					m'en aſſurer avec certitude. La Planète fût alternativement tantôt diſtinctement arrondie, tantôt obſcure et confuſement terminée.	5½	−5	15
	1	6	25	26	Emerſion du I. Satellite. Le ciel étoit parſemé de nuages, mais les bandes de ♃ furent diſtinctes. Bonne obſervation.	9½	−0	4
	1798.							
Août.	1	12	17	39	Immerſion du I. Satellite. Les bandes alternativement diſtinctes et obſcures Vapeurs. Obſervation médiocre.	12	+0	12
					Autres Obſervations.			
	1797.							
Junin.	13	7	40	49	Fin de l'Eclipſe du Soleil, dont le limbe étoit dans un mouvement ondoyant. Mais néanmoins la ſomme de toutes les erreurs de cette obſervation ne ſauroit gueres paſſer 4″. Le commencement étoit arrivé derrière les nuages.			
Oct	20	12	25	6	Immerſion de la 30 des Poiſſons derrière le bord obſcur de la Lune. Cette obſervation eſt exacte à 2 ſecondes près.			

Le 19 Juillet 1798 la Planète de *Mars* ne ſut point eclipſée par la Lune pour l'horizon de *Mitau*. Je méſurai trois fois le Diamètre *vertical* de cette Planète près du Méridien, et je le trouvai avec mon Micromètre objectif = 18,8 parties de l'échelle, qui ſont $21''$. Le diamètre *horizontal* du Soleil, meſuré le lendemain de l'obſervation avec le dit inſtrument, contenoit $3''$, $3\frac{1}{2}'''$ $22,2''''$ en parties de l'échelle, ayant eu égard à l'erreur du *Vernier*, examiné au défaut des étoiles fixes, à cauſe des nuages, tant ſur le disque du Soleil, que ſur celui de *Mars*. En égalant cette quantité au diamètre apparent du Soleil, ſuppoſé = $31'\ 37'',8$, j'obtins la reduction des trois diſtances apparentes ſuivantes des bords les plus prochains de Mars et de la Lune, meſurées avec mon micromètre objectif, adapté à ma lunette de *Dollond* de $3\frac{1}{2}$ pieds à triple objectif et grande ouverture.

Temps vrai astronomique de l'obſervation le 19[me] Juillet 1798. vieux ſtile.			Distance apparente des bords les plus prochains de Mars et de la Lune, corrigée de l'erreur du *Vernier*, en parties de l'échelle.		La même diſtance apparente, en parties du cercle.	
h.	′	″	‴	⁗	′	″
14	59	57	$3\frac{1}{2}$	15,5	3	33,1
13	6	50	$4\frac{1}{2}$	15,5	4	29,1
	12	47	$5\frac{1}{2}$	25,5	5	30,9

Ces diſtances apparentes ſont encore affectées de la réfraction. Pendant l'obſervation la hauteur du Mercure dans le Baromètre étoit de $28'$, $3''$ et le Thermomètre de *Réaumur* avec l'échelle de 90° montra 10½°. J'avertis, que l'échelle de mon Micromètre objectif eſt partagée en pouces, dont chacun

chacun contient 10‴ et *la moitié* d'une telle ligne ſe diviſe moyennant le dernier en 25 parties. Puisqu'en fin cet inſtrument n'eſt pas parfaitement centré, et que l'une des deux images d'une étoile fixe ne couvre pas exactement l'autre, mais en reſte éloignée de 2″ à 3″ quand elles ſont les plus proches; je ne ſaurois donner ces obſervations faites avec mon Micromètre objectif pour rigoureuſement exactes et je juge que la ſomme de toutes les erreurs peut quelques fois monter à environ 8 ſecondes.

OBSERVATIONS
FAITES
AVEC LE QUART-DE-CERCLE MURAL
de l'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg, dans le courant de l'année 1798.

Par Mr. l'Abbé *HENRY.*

Préſenté à l'Académie le 17 Janvier 1799

J'ai l'honneur de préſenter à l'Académie une partie des obſervations aſtronomiques que j'ai faites au quart-de-cercle mural, dans le courant de l'année 1798, avec les résultats de ces obſervations. Ces obſervation ſont les diſtances au zenit de quarante de principales étoiles, d'où j'ai déduites leurs déclinaisons moyennes pour le premier Janvier 1800. Mais je dois prévenir que ces déclinaisons ne sont qu'hypothétiques attendu qu'elles supposent que la latitude de l'obſervatoire 59° 56′ 23″ dont j'ai fait uſage eſt éxacte et l'erreur de l'inſtrument abſolument nulle. Ce qui peut bien n'être pas rigoureuſement vrai.

J'ai déjà eu l'honneur de préſenter à l'Académie un aſſez grand nombre d'obſervations, faites avec soin d'étoiles hautes, dont les diſtances au zenit ne paſſent pas dix dégrés, qui pourront ſervir, à vérifier la latitude de l'obſervatoire; j'en joins encore ici quelques autres qui ont les mêmes conditions et pourront ſervir au même objet Quant à l'erreur de l'inſtrument tout ce que j'ai pu faire jusqu'à préſent a été de m'aſſurer qu'elle eſt aſſez peu conſidérable, mais

mais les moyens que j'ai entre les mains, ſont inſuffiſans pour obtenir une détermination préciſe de cette quantité. La connoiſſance de cette erreur tient à celle qui peut exiſter ſur la haeteur du pole de l'obſervatoire, et reciproquement. En ſuppoſant la hauteur du pole éxacte, l'erreur de l'inſtrument ne paſſeroit pas 3 à 4 ſecondes, comme on peut s'en aſſurer par la comparaiſon des déclinaiſons d'étoiles que m'ont fournies mes obſervations, avec celles des meilleurs catalogues.

OBSERVATIONS
FAITES
AU QUART-DE-CERCLE MURAL
de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg, dans le courant de l'année 1798.

α de la Chevre.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
22	Juillet	14° 9′ 36,″3	15. 1. 10. 7,″8	3[illegible],′6	36,″0
24		- - 37, 4	- - 10. 9, 9	37 7	37, 6
28		- - 39, 5	- - 10. 11, 4	39, 2	39, 3
29		- - 42, 5	- - 10. 12, 6	40, 4	41, 4
30		- - 44, 5	- - 10. 12, 8	40, 6	42, 5
7	Août	- - 42, 3	- - 10. 10, 6	38, 4	40, 4
9		- - 42, 5	- - 10. 12, 8	40, 6	41, 5
10		- - 43, 0	- - 11. 0, 0	41, 0	42, 0
11		- - 44, 5	- - 11. 2, 5	43, 5	44, 0
13		- - 44, 2	- - 11. 0, 3	41, 3	42, 7
26		- - 42, 4	- - 11. 0, 0	41, 0	41, 7
27		- - 43, 5	- - 11. 0, 4	41, 4	42, 5

Regulus.

12	Avril	46° 58′ 21,″0	50. 1. 10. 7,″3	19,″9	20,″5
14		- - 23, 0	- - 10. 8, 7	21, 3	22, 5
23		- - 22, 8	- - 10. 8, 7	21, 3	22, 1
25		- - 24, 6	- - 10. 9, 7	2[illegible], 3	23, 4
26		- - 22, 8	- - 10. 8, 1	20, 7	21, 7

Regulus.

Regulus.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
28	Avril	46° 58′ 22,″8	50° 1. 10. 9,″4	23,″0	22,″9
29		- - 22, 8	- - 10. 7, 4	19, 9	21, 4
30		- - 23, 7	- - 10. 8, 7	21, 3	22, 5
1	May	- - 22, 0	- - 10. 7, 1	21, 7	21, 8
2		- - 23, 5	- - 10. 9, 1	23, 7	23, 6
3		- - 23, 6	- - 10. 8, 9	23, 5	23, 5
5		- - 23, 5	- - 10. 8, 4	23, 0	23, 2
9		- - 23, 5	- - 10. 8, 8	23, 4	23, 4
11		- - 24, 0	- - 10. 9, 9	24, 5	24, 2
12		- - 24, 2	- - 10. 8, 9	23, 5	23, 8
16		- - 23, 6	- - 10. 9, 4	23, 0	23, 3

δ - du Lion.

23	Avril	38° 17′ 54,″1	40 13. 9. 12,″7	53,″5	53,″8
1	May	- - 49, 3	- - 9. 8, 3	49, 1	49, 2
3		- - 50, 3	- - 9. 8, 7	49, 5	49, 9
4		- - 53, 0	- - 9. 9, 5	50, 3	51, 6
5		- - 50, 9	- - 9. 11, 0	51, 8	51, 3
6		- - 50, 7	- - 9. 10, 0	50, 8	50, 7
7		- - 49, 8	- - 9. 7, 3	48, 1	49, 0
9		- - 53, 1	- - 9. 13, 0	53, 8	53, 5
10		- - 49, 3	- - 9. 12, 0	52, 8	51, 0
11		- - 56, 0	- - 10. 0, 6	54, 6	55, 3
12		- - 48, 4	- - 9. 9, 4	50, 2	49, 3
16		- - 53, 1	- - 9. 12, 2	53, 0	53, 0

β du

β du Lion.

Mois et jours.		Division intérieure.			Division extérieure.				réduite.	milieu.
29	Avril.	44°	13′	17,″2	47.	2.	11.	5,″5	17,″4	17,′3
30		-	-	16, 5	-	-	11.	5, 7	17, 6	17, 0
2	May.	-	-	18, 0	.	-	11.	6, 5	18, 4	18, 2
3		-	-	19, 7	-	-	11.	7, 0	18, 9	19, 3
5		-	-	19, 8	-	-	11.	7, 2	19, 1	19, 4
6		-	-	18, 8	-	-	11.	6, 7	18, 6	18, 7
8		-	-	22, 7	-	-	11.	8, 5	20, 4	21, 5
9		-	-	22, 5	-	-	11.	10, 5	22, 4	22, 5
10		-	-	21, 8	-	-	11.	9, 9	21, 8	21, 8
11		-	-	24, 4	-	-	11.	13, 1	25, 1	24, 7
12		-	-	24, 0	-	-	11.	12, 5	24, 4	24, 2
16		-	-	25, 6	-	-	11.	13, 0	24, 9	25, 2
22		-	-	23, 5	-	-	11.	11, 5	23, 4	23, 5
23		-	.	23, 8	-	-	11.	11, 1	23, 0	23, 4

α de la Vierge.

19	May.	70°	0′	5,″2	74.	10.	10.	9,″7	0,″9	3,″0
22		-	-	3, 2	-	-	10.	11, 7	2, 9	3, 0
24		-	-	7, 1	-	-	11.	0, 2	4, 4	5, 7
25		-	-	5, 4	-	-	11.	1, 5	5, 7	5, 5
26		-	-	4, 5	-	-	11.	0, 0	4, 2	4, 4
27		-	-	5, 4	-	-	11.	1, 5	5, 7	5, 6
28		-	-	1, 0	-	-	10.	12, 1	3, 3	2, 1
30		-	-	8, 5	-	-	11.	0, 1	4, 3	6, 4
2		-	-	5, 5	-	-	11.	2, 2	6, 4	5, 9
6		-	-	4, 5	-	-	11.	1, 4	5, 6	5, 0
7		-	-	3, 8	-	-	11.	2, 5	6, 7	5, 3

Arcturus.

Arcturus.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réuite.	milieu.
24	May.	39° 41′ 19,″5	42° 5. 5. 7,″0	18,″2	18,″8
25		- - 12, 5	- - 5. 4, 1	14, 7	18, 6
26		- - 17, 4	- - 5. 7, 3	17, 9	17, 5
27		- - 14, 4	- - 5. 5, 6	16, 2	13, 3
28		- - 16, 4	- - 5. 5, 5	16, 1	16, 3
29		- - 14, 8	- - 5. 4, 8	15, 4	15, 1
30		- - 13, 3	- - 5. 3, 8	14, 4	13, 8
1	Juin.	- - 14, 5	- - 5. 2, 1	12, 7	13, 6
2		- - 13, 8	- - 5. 3, 9	14, 5	14, 2
4		- - 14, 5	- - 5. 2, 7	13, 3	13, 6
5		- - 13, 5	- 5. 3, 1	13, 7	13, 6
6		- - 12, 6	- - 5. 2, 5	13, 1	12, 9
7		- - 12, 5	- - 5. 3, 5	14, 1	13, 3
8		- - 13, 8	- - 5. 2, 9	13, 5	13, 7
9		- - 12, 7	- - 5. 2, 2	12, 8	12, 8
12		- - 12, 9	- - 4. 11, 8	9, 4	11, 2

ζ du Bouvier.

7	Juin.	45° 19′ 16,″8	48° 5. 7. 7,″6	14,″5	45,″6
8		- - 18, 0	- - 7. 9, 5	16, 5	17, 2
9		- - 16, 5	- - 7. 7, 6	14, 6	15, 6
12		- - 19, 5	- - 7. 9, 5	16, 5	18, 7
18		- - 16, 4	- - 7. 8, 5	15, 5	15, 9
21		- - 17, 2	- - 7. 8, 6	15, 6	16, 4

α a

α de la Balance.

Mois et jours.		Division intéreure	Division extérieure.	réduite.	milieu.
2	Juin.	75° 4′ 40,″7	80. 1. 4. 11,″7	[illegible],″4	38,″1
5		- - 37, 9	- - 4. 10, 3	34, 0	35, 9
6		- - 37, 0	- - 4. 10, 5	34, 2	35, 6
7		- - 35, 5	- - 4. 7, 8	31, 5	33, 5
8		- - 38, 6	- - 4. 12, 0	35, 7	37, 1
9		- - 38, 9	- - 4. 13, 0	36, 7	37, 8
12		- - 41, 2	- - 5. 2, 3	38, 9	40, 1
18		- - 40, 7	- - 5. 1, 4	38, 2	39, 5

β de la Balance.

7	Juin.	68° 31′ 46,″3	73. 1. 8. 10,″5	41,″9	44,″1
8		- - 47, 5	- - 9. 0, 0	43, 2	45, 3
9		- - 46, 4	- - 9. 0, 2	43, 4	44, 7
12		- - 49, 6	- - 9. 3, 1	46, 3	47, 9
18		- - 48, 2	- - 9. 1, 7	44, 9	46, 5

α de la Couronne.

7	Juin.	32° 31′ 36,″8	34. 11. 1. 12,″1	35,″6	36,″2
8		- - 35, 8	- - 2. 0, 0	36, 7	36, 2
9		- - 34, 5	- - 1. 11, 8	35, 3	34, 9
18		- - 33, 5	- - 1. 9, 5	33, 0	33, 3
19		- - 31, 8	- - 1. 8, 8	32, 7	32, 2
21		- - 34, 0	- - 1. 10, 4	33, 9	34, 0
22		- - 32, 8	- - 1. 9, 5	33, 0	32, 9
27		- - 34, 5	- - 1. 11, 5	35, 0	24, 7
28		- - 33, 8	- - 1. 10, 4	33, 9	33, 8

α du

α du Serpent.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
7	Juin.	52° 50′ 57,″6	56. 5. 15. 4,″8	57,″2	57,″4
8		- - 58, 1	- - 15. 5, 8	58, 2	58, 2
9		- - 54, 6	- - 15. 2, 5	54, 9	54, 8
18		- - 57, 0	- - 15. 3, 1	55, 5	56, 3
19		- - 58, 3	- - 15. 3, 5	57, 9	58, 1
21		- - 56, 5	- - 15. 3, 8	56, 2	56, 3
22		- - 55, 3	- - 15. 3, 5	55, 9	55, 6
27		- - 56, 4	- - 15. 2, 6	55, 0	55, 7
28		- - 55, 5	- - 15. 1, 8	54, 2	54, 8

δ d'Ophiucus.

21	Juin.	63° 4′ 25,″2	67. 4. 7. 1,″9	22,″9	24,″0
12		- - 25, 5	- - 7. 2, 2	23, 2	24, 3
29		- - 26, 0	- - 7. 2, 0	23, 0	24, 5
30		- - 27, 3	- - 7. 4, 9	25, 9	26, 6
6	Juillet.	- - 25, 5	- - 7. 0, 9	21, 9	23, 6
9		- - 26, 3	- - 7. 2, 8	23, 8	25, 0

γ d'Hercule.

21	Juin.	40° 17′ 24,″3	42. 15. 9. 8″,2	20,″9	22,″6
22		- - 23, 3	- - 9. 9, 0	21, 7	22, 5
24		- - 24, 1	- - 9. 8, 8	21, 5	22, 8
29		- - 23, 0	- - 9. 6, 6	19, 3	21, 2
30		- - 22, 5	- - 9. 6, 8	18, 7	20, 6
6	Juillet.	- - 21, 6	- - 9. 5, 9	18, 4	20, 0

Antarés.

Mois et jours.		Division intérieure.			Division extérieure.				réduite.	milieu.
21	Juin.	85°	43′	50,″0	91.	7.	2.	2,″6	50″,3	50,″1
22		-	-	49, 0	-	-	2.	0, 6	48, 3	48, 7
29		-	-	55, 3	-	-	2.	8, 1	55, 8	55, 5
30		-	-	54, 0	-	-	2.	6, 2	53, 9	54, 0
6	Juillet.	-	-	52, 4	-	-	2.	3, 5	53, 2	52, 8

ε d'Hercule.

6	Juillet.	28°	41′	47,″5	30°	9.	11.	13,″0	46,″5	46,″8
9		-	-	47, 3	-	-	12.	0, 0	46, 7	47, 0
16		-	-	46, 8	-	-	11.	11, 8	45, 3	46, 0
20		-	-	46, 5	-	-	12.	0, 0	46, 7	46, 6
21		-	-	44, 6	-	-	11.	12, 5	46, 0	45, 3
22		-	-	44, 5	-	-	11.	10, 1	44, 6	44, 6

α d'Hercules.

6	Juillet.	45°	17′	32,″2	48°	4′	15.	7,″6	29,″1	30,″6
3		-	-	33, 0	-	-	15.	7, 5	28, 8	30, 9
16		-	-	32, 5	-	-	15.	6, 8	27, 7	30, 1
20		-	-	31, 5	-	-	15.	8, 5	29, 4	30, 5
21		-	-	31, 4	-	-	15.	7, 2	28, 1	29, 7
22		-	-	31, 5	-	-	15.	7, 2	28, 1	29, 8
24		-	-	30, 8	-	-	15.	8, 3	29, 2	30, 0
29		-	-	30, 8	-	-	15.	7, 5	28, 4	29, 6
30		-	-	31, 2	-	-	15.	8, 4	29, 3	30, 3

α d'O-

α d'Ophiucus.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
20	Juillet.	47° 12′ 16,″0	50. 5. 9. 11,″8	15,″1	15,″6
21		- - 14, 5	- - 9. 9, 9	13, 2	13, 7
22		- - 14, 5	- - 9. 9, 8	13, 1	13, 8
24		- - 13, 4	- - 9. 8, 4	11, 7	12, 5
30		- - 18, 4	- - 9. 12, 5	15, 8	17, 0
7	Août.	- - 19, 1	- - 10. 0, 5	17, 0	18, 0
8		- - 20, 0	- - 10. 0, 0	16, 5	18, 2
9		- - 19, 5	- - 10. 0, 0	16, 5	18, 0
13		- - 18, 2	- - 9. 12, 0	15, 3	16, 7
14		- - 17, 9	- - 9. 11, 7	15, 0	16, 5
15		- - 17, 2	- - 9. 10, 5	13, 8	15, 5

Vega.

7	Août.	21° 19′ 39,″5	22. 11. 15. 10,″6	38,″7	39,″1
8		- - 38, 9	- - 15. 9, 2	37, 3	38, 1
9		- - 41, 0	- 12. 0. 0, 5	41, 8	41, 4
11		- - 41, 2	- - 0. 1, 0	42, 3	41, 7
13		- - 41, 5	- - 0. 0, 7	41, 6	41, 6
15		- - 40, 8	- 11. 15. 12, 7	40, 8	40, 8
22		- - 38, 7	- - 15. 9, 5	37, 6	38, 2
24		- - 39, 2	- - 15. 11, 4	39, 5	39, 4
25		- - 37, 4	- - 15. 9, 5	37, 6	37, 5
26		- - 37, 5	- - 15. 8, 4	36, 5	37, 0
27		- - 34, 5	- - 15. 6, 6	3[illegible], 7	34, 6
1	Septembre.	- - 33, 6	- - 15. 5, 5	33, 6	33, 6

Atair.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
8	Août.	51° 34′ 30,″3	55. 0. 3. 2,″5	27,″1	28,′6
11		- - 30,5	- - 3. 3,9	28,5	29,5
13		- - 29,5	- - 3. 2,8	26,8	28,3
14		- - 30,0	- - 3. 3,5	28,1	29,0
21		- - 27,5	- - 3. 1,6	26,2	26,8
22		- - 27,5	- - 3. 0,8	25,4	26,4
24		- - 29,4	- - 3. 2,5	27,1	28,2
26		- - 25,3	- - 3. 11,8	23,1	24,2
8	Septembre.	- - 26,3	- - 2. 12,4	23,7	25,0
21		- - 22,7	- - 2. 9,5	20,8	21,8
1	Octobre.	- - 20,1	- - 2. 7,8	19,1	19,6
3		- - 17,8	- - 2. 5,3	16,6	17,2
4		- - 18,3	- - 2. 4,6	15,9	17,1
13		- - 19,5	- - 2. 5,2	16,5	18,0

α¹ du Capricorne.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
8	Septembre.	73° 0′. 36,″5	77. 14. 0. 7,″5	35,″6	36,″0
28		- - 33,4	- - 0. 4,7	32,8	33,1
1	Octobre.	- - 36,7	- - 0. 6,7	34,8	35,7
2		- - 36,7	- - 0. 6,7	34,8	35,8
3		- - 32,5	- - 0. 3,0	31,1	31,8
4		- - 27,3	- - 0. 0,0	28,1	27,7
5		- - 27,0	- - 0. 1,4	29,5	28,2
13		- - 27,5	- - 0. 0,6	28,7	28,1
17		- - 30,0	- - 0. 4,5	32,6	31,3
18		- - 30,4	- - 0. 3,4	31,5	30,9

α¹ du

α^2 du Capricorne.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
8	Septembre.	73° 2′. 52,″4	77. 14. 10. 8,″5	48,″5	50,″5
28		- - 51, 3	- - 10. 10, 4	50, 4	50, 8
4	Octobre.	- - 52, 4	- - 10. 10, 1	50, 1	51, 2
2		- - 52, 2	- - 10. 8, 1	48, 1	50, 1
3		- - 51, 4	- - 10. 7, 5	47, 5	49, 5
4		- - 49, 6	- - 10. 5, 8	45, 8	47, 7
5		- - 48, 7	- - 10. 6, 6	46, 6	47, 6
13		- - 48, 7	- - 10. 6, 6	46, 6	47, 5
17		- - 45, 4	- - 10. 1, 5	41, 5	43, 4
18		- - 43, 5	- - 10. 0, 5	40, 5	41, 5
19		- - 45, 4	- - 10. 3, 6	43, 6	44, 5

ϑ de l'Aigle.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
8	Septembre.	61° 19′. 15,″7	65. 6. 8. 9,″6	15,″7	15,″7
28		- - 12, 4	- - 8. 3, 5	9, 1	10, 2
1	Octobre.	- - 12, 2	- - 8. 5, 8	11, 9	12, 1
4		- - 10, 3	- - 8. 3, 5	9, 6	10, 0
13		- - 10, 0	- - 8. 3, 0	9, 1	9, 5
18		- - 9, 1	- - 8. 2, 6	8, 7	8, 9
22		- - 9, 3	- - 8. 5, 4	11, 5	10, 4
24		- - 10, 5	- - 8. 1, 4	7, 5	9, 0
25		- - 12, 2	- - 8. 2, 6	8, 7	10, 4

β du Capricorne.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
8	Septembre.	57° 17′ 16,″3	80. 4. 14. 4,″4	12,″7	14,″5
28		- - 18, 5	- - 14. 6, 5	14, 8	16, 6

β du

β du Capricorne.

Mois et jours.	Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
1 Octobre.	75° 17. 17,"2	80. 4. 14. 6,"8	15,"1	16,"1
2	- - 18, 4	- - 14. 8, 5	16, 6	17, 5
3	- - 15, 7	- - 14. 4, 8	13, 1	14, 4
4	- - 14, 3	- - 14. 6, 5	14, 8	14, 5
13	- - 19, 1	- - 14. 8, 6	16, 7	17, 9

γ du Cigne.

8 Septbr.	20° 18'. 40,"5	21. 10. 10. 5,"2	41,"4	40,"9
28	- - 38, 4	- - 10. 3, 1	39, 3	38, 8
1 Octobre.	- - 36, 4	- - 10. 1, 1	37, 3	36, 8
2	- - 37, 5	- - 10. 2, 5	38, 7	38, 1
3	- - 34, 8	- - 10. 2, 0	38, 2	36, 5
4	- - 34, 2	- - 9. 12, 2	35, 2	34, 7
13	- - 35, 1	- - 9. 13. 1	36, 1	35, 6
17	- - 37, 2	- - 10. 2, 0	38, 2	37, 7
18	- - 34, 2	- - 9. 10, 5	33, 5	38, 8
19	- - 36, 1	- - 10. 0, 6	36, 8	36, 5

ζ du Dauphin.

8 Septembre.	45° 56'. 7,"7	45. 15. 15. 5,"8	7,"6	7,"6
1 Octobre.	- - 0, 0	- - 14. 12, 2	0, 8	0, 4
2	- - 0, 0	- - 14. 10, 5	59, 1	59, 5
3	- - 0, 0	- - 14. 12, 4	1, 0	0, 5
4	- - 0, 8	- - 14. 12, 5	1, 1	1, 2
13	- 55. 59, 7	- - 14. 10, 3	58, 9	59, 3
16	- - 59, 9	- - 14. 12, 6	1, 2	0, 6

ζ du Dauphin.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
17	Octobre.	45° 55′ 59,″4	48. 15. 14. 11,″5	0,″1	59,″7
18		- - 59, 5	- - 14. 11, 0	59, 6	59, 6
22		- - 56, 4	- - 14. 9, 8	58, 4	57, 4

β du Dauphin.

8	Septembre.	46° 1′ 13,″1	49. 1. 6. 7,″6	12,″6	12,″8
1	Octobre.	- - 8, 6	- - 6. 1, 5	6, 5	7, 5
2		- - 8, 5	- - 6. 0, 9	5, 9	7, 2
3		- - 7, 2	- - 6. 1, 0	6, 0	6, 6
4		- - 8, 1	- - 6. 2, 0	7, 0	7, 6
13		- - 6, 4	- - 6. 0, 5	5, 5	5, 9
17		- - 8, 4	- - 6. 1, 6	6, 6	7, 5
18		- - 6, 5	- - 5. 12, 7	4, 5	5, 5
22		- - 5, 7	- - 5. 10, 4	2, 2	4, 0
24		- - 7, 4	- - 6. 0, 8	5, 8	6, 6

α du Dauphin.

8	Septbr.	44° 42′ 51,″0	47. 11. 1. 10,″0	48,″5	49,″8
28		- - 46, 0	- - 1. 5, 7	44, 2	45, 1
1	Octobre.	- - 44, 6	- - 1. 4, 1	42, 6	48, 6
2		- - 44, 8	- - 1. 3, 7	42, 2	43, 5
3		- - 45, 3	- - 1. 4, 4	42, 9	44, 1
4		- - 43, 5	- - 1. 3, 2	41, 7	42, 6
13		- - 44, 7	- - 1. 4, 5	43, 0	43, 8
16		- - 42, 8	- - 1. 3, 7	42, 2	42, 5
18		- - 44, 1	- - 1. 3, 6	42, 1	43, 1
22		- - 45, 0	- - 1. 4, 2	42, 7	43, 8

α du

γ du Capricorne.

Mois et jours.		Division intérieure.			Division extérieure.				réduite.	milieu.
16	Octobre.	77°	20′	1,″5	82.	9.	8.	3,″0	57,″6	59,″5
19		-	25	59, 6	-	-	8.	4, 0	58, 0	58, 8
22		-	26	0, 4	-	-	8.	5, 4	59, 3	59, 8

ε de Pégaſe.

28	Août.	50°	57′	43,″6	54.	5.	12.	1,″2	43,″1	43,″3
31		-	-	47, 6	-	-	12.	1, 8	43, 7	45, 6
28	Septembre.	-	-	42, 8	-	-	11.	11, 9	41, 6	42, 2
1	Octobre.	-	-	41, 2	-	-	11.	10, 1	40, 0	40, 6
2		-	-	41, 1	-	-	11.	9, 7	39, 4	40, 3
3		-	-	41, 6	-	-	11.	10, 3	40, 2	40, 9
4		-	-	35, 5	-	-	11.	5, 6	35, 5	35, 5
5		-	-	34, 2	-	-	11.	4, 7	34, 6	34, 4
15		-	-	36, 6	-	-	11.	6, 5	36, 4	36, 5
16		-	-	38, 3	-	-	11.	7, 2	37, 1	37, 7
18		-	-	37, 6	-	-	11.	8, 4	38, 3	37, 9
19		-	-	36, 8	-	-	11.	7, 5	37, 4	37, 2

δ du Capricorne.

1	Octobre.	76°	54′	24,″4	82.	0.	8.	5,″5	21,″1	22,″7
3		-	-	17, 6	-	-	7.	13, 0	15, 3	16, 3
5		-	-	17, 3	-	-	7.	12, 5	14, 8	16, 0
13		-	-	16, 5	-	-	8.	0, 5	16, 0	16, 2
16		-	-	19, 7	-	-	8.	1, 8	17, 3	18, 5
18		-	-	17, 5	-	-	7.	10, 1	12, 4	15, 0
19		-	-	19, 8	-	-	7.	13, 1	15, 4	17, 6

α du

α du Verſeau.

Mois et jours.	Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
30 Août.	62° 12′ 15,″8	65. 4. 8. 11,″5	15,″7	15,″7
31	- - 16, 2	- - 8. 11, 5	15, 7	15, 5
28 Septembre.	- - 15, 2	- - 8. 8, 1	12, 3	14, 3
1 Octobre.	- - 16, 6	- - 8. 11, 5	15, 7	16, 1
2	- - 13, 5	- - 8. 9, 9	14, 1	13, 8
3	- - 14, 7	- - 8. 8, 4	12, 6	13, 7
4	- - 9, 5	- - 8. 4, 8	9, 0	9, 3
5	- - 11, 8	- - 8. 7, 9	12, 1	11, 9
13	- - 12, 2	- - 8. 8, 1	12, 3	12, 2
16	- - 10, 6	- - 8. 5, 9	10, 1	10, 4
17	- - 11, 2	- - 8. 5, 6	9, 8	10, 5
18	- - 12, 2	- - 8. 8, 0	12, 2	12, 2
19	- - 9, 5	- - 8. 4, 8	9, 0	9, 3
22	- - 7, 5	- - 8. 4, 7	8, 9	8, 2
24	- - 7, 0	- - 8. 3, 6	7, 8	7, 4

γ du Verſeau.

Mois et jours.	Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
30 Août.	60° 18′ 30,″1	66. 7. 6. 4, 4	30,″1	30,″1
31	- - 80, 8	- - 6. 3,″1	28, 8	29, 8
28 Septembre.	- - 31, 3	- - 6. 2, 5	28, 2	29, 7
2 Octobre.	- - 22, 8	- - 5. 8, 5	21, 0	21, 9
3	- - 27, 6	- - 5. 10, 7	23, 2	25, 4
4	- - 25, 7	- - 5. 9, 5	22, 0	23, 8
5	- - 19, 8	- - 5. 6, 7	49, 2	19, 5
13	- - 21, 1	- - 5. 5, 5	18, 0	19, 6
16	- - 22, 4	- - 5. 6, 8	19, 3	20, 8
18	- - 19, 8	- - 5. 5, 1	17, 6	19, 7
19	- - 19, 6	- - 5. 5, 8	18, 3	19, 0

γ du Verſeau.

Mois. et jours.		Diviſion intérieure.	Diviſion extérieure.	réduite.	milieu.
22	Octobre.	62° 15. 20,″4	66. 7. 5. 4,″8	17,″5	18,″8
24		- - 25, 3	- - 5. 7, 5	20, 0	22, 6
25		- - 21, 8	- - 5. 7, 8	20, 3	21, 0

ζ du Verſeau.

Mois. et jours.		Diviſion intérieure.	Diviſion extérieure.	réduite.	milieu.
30	Août.	60° 57′ 35,″1	65. 0. 5. 11,″2	33,″1	33,″6
31		- - 29, 5	- - 5. 4, 4	25, 3	27, 4
28	Septbr.	- - 29, 5	- - 5. 7, 3	28, 2	28, 8
2	Octobre.	- - 31, 3	- - 5. 4, 3	25, 2	28, 2
3		- - 26, 6	- - 5. 2, 0	22, 9	24, 8
4		- - 25, 2	- - 5. 2, 8	23, 7	24, 5
5		- - 22, 8	- - 5. 0, 6	21, 9	22, 3
13	Octobre.	- - 25, 1	- - 5. 0, 5	21, 4	23, 3
16		- - 23, 5	- - 5. 1, 3	22, 2	22, 9
17		- - 24, 0	- - 5. 2, 1	23, 0	23, 5
18		- - 24, 5	- - 5. 2, 9	23, 8	24, 2
24		- - 26, 5	- - 5. 4, 9	25, 8	26, 2
26		- - 23, 8	- - 5. 2, 1	23, 0	23, 4
27		- - 24, 6	- - 5. 0, 5	21, 4	23, 0

η du Verſeau.

Mois. et jours.		Diviſion intérieure.	Diviſion extérieure.	réduite.	milieu.
3	Octobre.	61° 3′ 43,″4	65. 2. 1. 10,″4	40, 4	41,″7
4		- - 42, 1	- - 1. 9, 5	39, 5	40, 3
5		- - 39, 2	- - 1. 7, 6	37, 6	38, 4
13		- - 38, 9	- - 1. 6, 4	36, 4	37, 6
16		- - 41, 7	- - 1. 8, 2	32, 9	40, 5
27		- - 42, 0	- - 1. 8, 6	38, 6	40, 3
29		- - 43, 0	- - 1. 10, 4	40, 4	41, 7
30		- - 40, 8	- - 1. 9, 7	39, 7	40, 3

ζ de

ζ de Pégaſe.

Mois et jours.		Division intérieure.			Diviſion extérieure.				réduite.	milieu.
28	Août	50°	8′	16,″5	57.	7.	11.	0,″0	16,″5	16,″5
31		-	-	5, 8	-	-	10.	9, 1	12, 4	14, 1
17	Octobre	-	-	4, 5	-	-	10.	1, 8	4, 6	4, 6
18		-	-	6, 6	-	-	10.	2, 1	4, 9	5, 8
19		-	-	4, 2	-	-	10.	0, 3	3, 1	3, 7
22		-	-	4, 5	-	-	10.	0, 7	3, 5	4, 0
24		-	-	5, 5	-	-	10.	0, 2	3, 0	4, 3
25		-	-	3, 7	-	-	10.	0, 6	3, 4	3, 6
26		-	-	7, 6	-	-	10.	3, 5	3, 3	5, 4
27		-	-	6, 4	-	-	10.	1, 5	4, 3	5, 3
28		-	-	6, 0	-	-	10.	1, 7	4, 5	5, 3
30		-	-	6, 6	-	-	10.	2, 0	4, 8	5, 7

δ du Verſeau.

31	Août.	76°	45′	45,″8	81.	14.	1.	2,″2	43,″5	44,″6
28	Septbr.	-	-	43, 7	-	-	1.	0, 2	41, 5	42, 6
2	Octobre.	-	-	42, 5	-	-	1.	3, 4	44, 7	43, 6
3		-	-	41, 1	-	-	0.	11, 6	38, 7	39, 9
4		-	-	40, 8	-	-	0.	11, 7	38, 8	39, 8
13		-	-	39, 4	-	-	0.	9, 5	36, 6	38, 0
16		-	-	36, 7	-	-	0.	6, 8	33, 9	35, 3
17		-	-	37, 5	-	-	0.	7, 4	34, 5	36, 0
18		-	-	35, 7	-	-	0.	5, 4	32, 5	34, 1
19		-	-	34, 8	-	-	0.	4, 3	31, 4	33, 1
22		-	-	35, 5	-	-	0.	6, 1	33, 0	34, 4
24		-	-	34, 7	-	-	0.	3, 8	29, 9	32, 3

Markab.

Markab.

Mois et jours.	Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
28 Septbr.	45° 47. 53,"2	48. 13. 9. 8,"2	49,"0	51,"1
2 Octobre.	- - 51, 8	- - 9. 10, 5	51, 3	51, 5
3	- - 56, 0	- - 9. 11, 7	52, 6	54, 3
4	- - 53, 5	- - 9. 9, 8.	50, 5	52, 0
5	- - 51, 6	- - 9. 9, 7	50, 5	51, 1
13	- - 49, 8	- - 9. 8, 4	50, 2	50, 0
16	- - 50, 7	- - 9. 8, 6	50, 4	50, 5
17	- - 48, 5	- - 9. 8, 8	50, 6	49, 6
18	- - 48, 5	- - 9. 7, 2	48, 0	48, 3
19	- - 50, 1	- - 9. 10, 0	50, 8	50, 4
22	- - 49, 1	- - 9. 7, 7	48, 5	48, 8
24	- - 49, 6	- - 9. 8, 3	50, 1	49, 8
25	- - 50, 1	- - 9. 9, 5	50, 3	50, 6
26	- - 51, 6	- - 9. 7, 9	48, 7	50, 1
27	- - 50, 5	- - 9. 7, 3	48, 1	49, 3
29	- - 49, 8	- - 9. 7, 0	47, 8	48, 8
30	- - 51, 4	- - 9. 7, 9	48, 7	50, 0

DECLI-

DECLINAISONS MOYENNES
DE QUARANTE ÉTOILES
pour le 1[er] de Janvier 1800.

Noms des étoiles.	Déclinaisons moyennes.	Variations annuelles.
α de la Chévre .	45° 46′ 38,″5	+ 4″, 57.
Regulus . . .	12. 56. 23, 6	— 17, 24.
δ du Lion . . .	21. 37. 5, 4	— 19, 43.
β du Lion . . .	15. 41. 26, 2	— 19, 96.
α de la Vierge .	10. 6. 47, 3	+ 19, 01.
Arcturus . . .	20. 13. 44, 8	+ 19, 18.
ζ du Bouvier . .	14. 35. 39, 7	— 15, 85.
α de la Balance .	15. 12. 5, 1	+ 15, 40.
β de la Balance .	8. 38. 5, 0	+ 13, 82.
α de la Couronne .	27. 23. 49, 0	— 12, 50.
α du Serpent . .	7. 3. 52, 7	— 11, 94.
δ d'Ophiucus . .	3. 9. 57, 7	+ 9, 77.
γ d'Hercule . .	19. 37. 56, 9	— 9, 05.
Antarès . . .	25. 58. 39, 3	+ 8, 75.
ε d'Hercule . . .	81. 14. 4, 0	— 5, 86.
α d'Hercule . . .	14. 37. 43, 3	— 4, 75.
α d'Ophiucus . .	12. 42. 57, 0	— 3, 05.
Vega	38° 36′ 19,″3	+ 2, 59.

Noms des étoiles.	Déclinaiſons moyennes.	Variations annuelles.
Atair	8.° 20.′ 55,″ 3	+ 8″, 51.
ϑ de l'Aigle . .	1. 24. 10, 8	— 10, 05.
α^1 du Capricorne .	13. 7. 5, 3	— 10, 47.
α^2 du Capricorne .	13. 9. 23, 4	— 10, 67.
β du Capricorne .	15. 24. 3, 5	— 10, 71.
γ du Cygne . .	39. 38. 33, 6	+ 10, 92.
ζ du Dauphin . .	13. 59. 26, 5	+ 11, 79.
β du Dauphin . .	13. 54. 24, 0	+ 12, 05.
α du Dauphin . .	15. 12. 49, 8	+ 12, 21.
α du Cygne . . .	44. 34. 20, 2	+ 12, 50.
α du petit Cheval .	4. 25. 36, 0	+ 14, 42.
β du Verſeau . .	6. 26. 43, 7	— 15, 39.
γ du Capricorne .	17. 33. 39, 6	— 15, 82.
ε de Pégaſe . . .	8. 57. 47, 0	+ 16, 10.
δ du Capricorne .	17. 1. 46, 2	— 10, 05.
α du Verſeau . .	1. 17. 14, 9	— 17, 15.
γ du Verſeau . .	2. 23. 32, 8	— 17, 81.
ζ du Verſeau . .	1. 2. 28, 6	— 18, 02.
η du Verſeau . .	1. 8. 41, 9	— 18, 32.
ζ de Pégaſe . . .	9. 47. 22, 9	+ 18, 46.
δ du Verſeau . .	16. 53. 3, 6	— 18, 85.
Markab . . .	14. 7. 51, 0	+ 19, 22.

OBSER-

OBSERVATIONS
DE QUELQUES ETOILES

qui culminent à peu de diſtance du zenit de St. Petersbourg, et qui peuvent ſervir à vérifier la hauteur du pôle.

Année M. DCC. XC. VIII.

Diſtances au zenit.

γ du Dragon.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
21	Juillet	8° 24′ 54,″0	8. 15. 9. 8,″7	51,″4	52,″7
22		- - 54, 5	- - 9. 9, 8	52, 5	53, 5
26		- - 53, 8	- - 9. 8, 9	51, 6	52, 7
7	Août	- - 56, 4	- - 10. 0, 0	55, 9	56, 1
8		- - 57, 0	- - 10. 1, 0	56, 9	56, 9
9		- - 58, 5	- - 10. 1, 0	57, 3	57, 9
10		- - 57, 5	- - 10. 0, 5	56, 4	56, 9
13		- - 58, 5	- - 10. 2, 2	58, 1	58, 3
16		- - 57, 7	- - 10. 0, 5	56, 4	57, 0
20		- - 56, 5	- - 10. 0, 3	56, 2	56, 3
25		- - 57, 8	- - 10. 0, 4	56, 3	57, 0
27		- - 56, 4	- - 10. 0, 0	55, 9	56, 1
29		- - 55, 6	- - 9. 12, 9	55, 6	55, 6

β du Dragon.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
21	Juillet	7° 28′ 37,″2	7. 15. 9. 8,″3	36,″0	36,″6
22		- - 37, 5	- - 9. 8, 1	35, 8	36, 6
26		- - 35, 5	- - 9. 6, 4	34, 1	34, 8
8	Août.	- - 36, 8	- - 9. 7, 6	35, 3	3[illegible], 0
10		- - 38, 0	- - 9. 9, 5	37, 2	37, 6
23		- - 38, 5	- - 9. 10, 4	38, 1	38, 3
24		- - 37, 5	- - 9. 8, 8	36, 5	37, 0
25		- - 36, 8	- - 9. 8, 1	35, 8	36, 3
26		- - 36, 0	- - 9. 10, 1	37, 8	36, 9
27		- - 35, 8	- - 9. 8, 6	36, 3	36, 1

a du Dragon.

8	Août.	0° 47′ 30,″5	0. 13. 8. 1,″4	29,″1	29,″8
9		- - 30, 7	- - 8. 1, 3	29, 0	29, 8
11		- - 30, 5	- - 8. 0, 1	27, 8	29, 2
13		- - 31, 4	- - 8. 3, 2	31, 1	31, 2
22		- - 30, 9	- - 8. 2, 7	34, 0	30, 6
24		- - 29, 5	- - 8. 0, 1	27, 8	28, 6
25		- - 28, 8	- - 8. 0, 0	27, 7	28, 3
26		- - 27, 5	- - 8. 0, 5	28, 2	27, 8

7 du Lézard.

28	Septembre.	10° 40′ 55″0	11. 6. 4. 9,″3	52,″7	53,″9
2	Octobre.	- - 53, 5	- - 4. 9, 1	52, 5	53, 0
3		- - 53, 0	- - 4. 8, 8	52, 2	52, 6

7 du

7 du Lezard.

Mois et jours.		Division intérieure.	Division extérieure.	réduite.	milieu.
4	Octobre.	10° 40′ 54,″5	11. 6. 4. 11,″8	55,″2	54,″8
5		- - 51,5	- - 4. 8,3	51,7	52,5
13		- - 53,5	- - 4. 9,3	52,7	53,0
16		- - 54,5	- - 4. 10,5	53,9	54,2
17		- - 53,7	- - 4. 11,5	54,9	54,3
18		- - 54,1	- - 4. 10,6	54,0	54,0
22		- - 49,7	- - 4. 6,4	49,8	49,6
24		- - 54,5	- - 4. 10,4	53,8	54,1
25		- - 51,2	- - 4. 7,7	51,1	51,1
26		- - 52,5	- - 4. 8,3	51,7	52,1
27		- - 53,5	- - 4. 9,1	52,5	53,0
29		- - 52,3	- - 4. 8,6	52,0	52,1

β de Caſſiopé.

19	Octobre.	4° 53′ 45,″7	2. 0. 5. 7,″3	43,″2	44,″5
24		- - 45,4	- - 5. 6,6	42,5	43,9
25		- - 46,3	- - 5. 7,5	43,4	44,8
26		- - 46,8	- - 5. 8,2	44,1	45,4
27		- - 45,8	- - 5. 9,2	45,1	45,4
29		- - 46,5	- - 5. 9,5	45,4	45,9
30		- - 46,2	- - 5. 9,4	45,3	45,7

DÉCLINAISONS MOYENNES

au commencement de Janvier 1800.

Étoiles.	Déclinaisons.	Variations annuelles.
γ du Dragon	51° 31′ 7″, 4	— 0″, 71
β du Dragon	52 27 22, 5	— 2, 79
o du Dragon	59 8 51, 1	+ 4, 18
7 du Lézard	49 15 32, 9	+ 18, 27
β de Caſſiopée	58 3 51, 9	+ 20, 03

OBSER-

OBSERVATIO TRANSITUS MERCURII PER DISCUM SOLIS,

habita in obſervatorio Petropolitano anno 1799 die $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$ tempore civili.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conventui exhib. die 31 Octob. 1799.

Praecedentibus transitum Mercurii diebus pro cognoſcendo motu horologii aſtronomici ope quadrantis bipedalis, quoties coeli facies permiſit, captae ſunt altitudines ſolis correſpondentes, ex quibus prodiit

die $\frac{6}{17}$ Aprilis meridies verus	1^h.	$16'$.	$28,''6$
- $\frac{11}{22}$ Aprilis - - - -	1.	29.	1,7
- $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$ - - - -	2.	8.	4,7.

Hinc acceleratio horologii ſupra diem ſolarem medium a die 6 ad 11 Aprilis colligitur $2'$. $43,''8$ et a die 11 April. ad diem obſervationis $2'$. 44, 3.

Die $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$.

Contactus limborum ☉ et ☿ I.	1^h	$20'$.	$12''$.	t. h.
II.	1.	22.	26.	
III.	8.	42.	23.	
IV.	8.	44.	42.	

Momenta

Momenta contractuum in introitu obſervata ſunt tubo Gregoriano 24 pollicum a *Schort* elaborato, in exitu vero tubo achromatico Dollondiano, vi amplificandi aequali quam proxime praeditis. Momenta contractuum in exitu tubo Gregoriano a Socio obſervata ſunt.

Contactus limborum ☉ et ☿ III. 8^h 42′ 29″ ſ. h.
IV. 8. 40. 52.

Plano quadrantis tripedalis ad planum meridiani diebus antecedentibus quam proxime deducto obſervavi ad filum verticale micrometri

Appulſum limbi ☉lis occid.	2^h.	6′	46″ t. h.
- - centri ☿rii		8.	47.
- - limbi ☉lis orient.	2.	9.	0.
Hinc appulſus centri ☉lis	2.	7.	53.
Altitudinem limbi ☉lis borealem	47°	13′	55,″8
- - centri ☿rii -	47.	58.	12, 7.
Altitudo Centri ☉lis - -	46.	56.	36, 9.
Semidiametro ☉lis exiſtente		15.	51, 9.

Aſſumta igitur acceleratione horologii 2′ 44,″3. Momenta contactuum et appulſuum ad filum verticale micrometri in tempus verum converſa habebuntur:

Contactus I. die 25 Aprilis / 6 Maji	$23.^h$	12′	12,″6 t. v.
II. - - -	23.	14.	26, 3
III. - 26 Aprilis / 7 Maji	6.	33.	34, 5
Socii		33.	40
IV. - - -	6.	35.	53,3
Socii	6.	36.	6.
Appulſus limbi ☉lis occident.	23^h	58′	41,″4 t. v.
Centri ☿rii - -	24.	0.	42,2
limbi ☉lis orient.	24.	0.	52,2,

Hinc

Hinc appulſus Centri ☉lis 23^h. 59′. 43,″7,
qui per aequationem temporis ad meridiem Petropolitanum
per Tabulas ſolares Cel *Zach* computatam — 3′. 44,″27
in tempus medium converſi prodeunt

Appulſus Centri ☉lis ad fil. vert. 23^h. 56′. 4,″07 t. m.
- - Centri ☿rii 23. 56. 59, 93.

Cum igitur filum verticale micrometri a plano meridiani deviaverit 11,″7, prodit tempus medium
culminationis ☉lis 23^h. 56′. 15,″73
☿rii 23. 57. 9, 63.

Hinc die $\frac{\text{27 Aprilis}}{\text{6 Maji}}$ pro 23^h. 56′. 15″73 t. m. tempus ſydereum five aſcenſio ☉lis recta prodit 2^h. 57′. 12,″74, atque in partibus aequatoris 1^s. 14°. 18′. 14″,
Mercurii pro momento culminationis 23^h. 57′. 9,″ 63,
obtinetur aſcenſio recta 2^h. 58′. 6,″7
in partibus aequatoris 1^s. 14°. 31′. 38,″8.
Unde aſſumta obliquitate Eclipticae 23° 28′. 10,″reperitur
Longitudo ☉lis apparens - 1^s. 46°. 46′. 34,″8
affecta ſcilicet aberratione luminis.

Jam vero adhibitis Tabulis ſolaribus Cel. *Zach*, quarum Epochae mediae Longitudinis Solis pro initio cujusvis anni aberrationem a propagatione luminis oriundam jam includunt, pro momento culminationis 23^h. 56′. 15,″73 reperitur
Longitudo ☉lis ab aequinoctio medio 1^s. 46°. 46′. 43,″8.
et ab aequinoctio vero - - - - 1. 46. 46. 31.
Declinatio ☉lis borealis - - - - 16. 32. 15$\frac{1}{2}$.
unde ſequitur correctio Tabularum - - - — 11,″.

Alti-

Altitudo Centri ☉lis momento tranſitus per meridianum obſervata eſt 46′. 56′. 39,″9, quae refractione — 53,″3 et parallaxi + 5,″75 correcta fit 46°. 55′. 49,″1, unde declinatio ☉lis 16°. 52′. 12″, quae a tabulari differt 3½′.

Pari modo altitudo ☿rii momento culminationis obſervata eſt 46°. 46′. 45,″7. Statuta parallaxi ☉lis 8,″45, parallaxis horizontalis ☿rii fit 15,″18, atque parallaxis altitudini illius competens 10,″36; unde altitudo refractione et parallaxi correcta evadit 46°. 56′. 2″, atque declinatio illius 15°. 52′. 25″.

Datis igitur aſcenſione ☿rii momento culminationis 44°. 52′. 25″ reperitur Longitudo ☿rii geocentrica ab aequinoctio medio numerata 1ˢ. 16°. 58′. 57″ et aberratione luminis — 6,″8 correcta 1ˢ. 16°. 58′. 50,″2, Latitudo autem geocentrica 3′. 28″, quae applicata aberratione luminis + 3,″ fit 3′ 31,″2 auſtr. Pro eodem autem temporis momento Tabulae Cel. *de la Lande* Longitudinem ☿rii geocentricam dant 1ˢ, 16°. 58′. 34″, et Latitudinem 3′. 36′,8, unde ſequeretur Tabulas illius pro tempore tranſitus requirere correctionem in Longitudinem + 16,″2, in Latitudinem vero — 5,″6.

Conſectaria a momentis contactuum obſervatis deducenda in proximam occaſionem reſervo.

SUM-

SUMMARIUM OBSERVATIONUM METEOROLOGICARUM,

in urbe KAMYSCHIN ad Wolgam,

ſub latitudine 50°. 5′. 6″ et longitudine 63°. 4′,

ab Octobri 1770 ad Auguſtum 1774 inſtitutarum,

et cum reſpondentibus Petropolitanis collatarum

a *P. INOCHODZOW.*

Conventui exhibitum die 5 Decembris 1799.

Altitudines Thermometri maximae (T) et minimae (t) pro quolibet menſe.

Menſes.	D. H.	Therm. de l'Isle.	Barometrum in menſura Pariſienſi.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. Thermomet.	Calor medius.	
							Kamyſch.	Petropol.
				1770.				
Octbr.	7. 3. p. 11. 6¾ m.	T. 127°,5 t. 158,5	28″. 4,‴3 28. 7, 9	NW levis. idem.	ſerena. eadem.	31°	143°	139°,5
Novbr.	11. 2½ p. 22. 8 m.	T. 135 t. 168	28. 8, 2 28. 7.	S levis. O levis.	nubes ſparſ. nubila.	33	151,5	154,5
Decbr.	23. 3½ p. 19. 8½ m.	T. 142 t. 164	28. 1. 27. 11,7	W mediocris. WNW med.	nubes. ſerena.	22.	153	160,5
				1771.				
Januar.	11. 1.1. m. 21. 7½ m.	T. 146,5 t. 189.	27. 8,7 28. 2,5	W levis. WNW. fort.	nubila. ſerena.	42,5	167,7	171,5
Febr.	28. 4. p. 21. 7. m.	T. 146. t. 194.	28. 3,3 28. 3.	SSO levis. NW levis.	nubila. ſerena.	48	170	175,5
Mart.	21. 4. p. 6. 6. m.	T. 138. t. 169,5	27. 7,7 28. 7.	W levis. NNW levis.	nubila. ſerena.	31,5	153,7	169,5

Menſes.	D. H.	Therm. de l'Iſle.	Barometr. in menſura Pariſienſi.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. Thermomet	Calor medius. Kamyſc.	Calor medius. Petropol.
				1771.				
Aprilis.	18. 1½ p. 3. 7 m.	T. 118°,5 t. 154	28." 2,"7 28. 3.	malacia. NO levis.	ſerena. eadem.	35°,5	136°,2	145°
Majus.	30. 5½ m. 3. 7 m.	T. 105 t. 144.	28. 2,3 28. 2,8	malacia. ONO fortis.	ſerena. nubila.	36	126	136
Junius.	30. 12 m. 6. 5¼ m.	T. 105 t. 133	28. 1,3 27. 11.	SSW levis. W levis.	nubila. ſerena.	28	119	124,5
Julius.	9. 3 p. 23. 6 m.	T. 100 t. 129	28. 2,9 27. 9,8	malacia. S levis.	ſerena. eadem.	29	114,5	120,5
Aug.	18. 6 p. 28. 6¼ m.	T. 101 t. 140,5	28. 2,3 28. 3,6	O levis. malacia.	ſerena. eadem.	39,5	120,7	130,5
Sept.	4. 1½ p. 27. 6½ m.	T. 117,5 t. 148	28. 3,5 28. 2,3	O fortis. NW levis.	nubes. nubes.	30,5	132,7	133
Oct.	3. 2 p. 21. 7 m.	T. 129,5 t. 155	28. 3,6 27. 11,6	O levis. NW levis.	nubes. nubila.	25,5	142,2	143,5
Nov.	12. 5 p. 17. 6 m.	T. 141 t. 177	27. 8,4 28. 5,6	SSW levis. NW medioc.	pluvia. nebula.	36	159	161.
Dec.	5. 1 p. 29. 8¼ m.	T. 147,5 t 196	28. 0,0 28. 5,2	SW levis. NW medioc.	nix. ſerena.	48,5	171,7	168
tot. ann. 1771.		T. 100 t. 196	Jul. Dec.			96	142,8	148,2
				1772.				
Januar.	25. 2¼ p. 11. 7½ p.	T. 147,5 t. 195	28. 0,3 28. 11,7	SSW levis. NNW levis.	nebula. ſerena.	47,5	171,2	175,5
Febr.	17. 1¼ p. 5. 7 m.	T. 146 t. 189,5	27. 9. 28. 6,7	W mediocris. NW levis.	nubes ſpar. idem.	43,5	167,7	177
Mart.	31. 5 p. 1. 7½ m.	T. 138 t. 174	28. 0,1 28. 5,6	NW levis. SO levis.	nubila. nix.	36	156	158
April.	30. 3 p. 2. 6 m.	T. 118 t. 154	28. 3. 28. 4,3	NO levis. NNW levis.	ſerena. eadem.	36	136	143

Menſes.	D. H.	Therm. de l'Iſle.	Barometr. in menſura Pariſienſi.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. Thermomet.	Calor medius. Kamyſc.	Petropol.
				1772.				
Mai.	23. 3¾ p. 5. 6 m.	T. 112 t. 142	28″. 0‴. 28. 4.	NW levis. W levis.	nubes ſpar. ſerena.	30°	127°	133°
Junius.	20. 1 p. 14. 4⅔ m.	T. 106 t. 139	27. 11,9 28. 1,	malac. NW levis.	nubes ſpar. ſerena.	33	122,5	127,5
Julius.	30. 0½ p. 25. 5¾ m.	T. 107 t. 131	28. 2,5 28. 3,	malac. N levis.	ſerena. eadem.	24	119	120
Aug.	15. 3 p. 26. 6½ m.	T. 105,5 t. 141	28. 1, 28. 4,2	malac. WNW levis.	ſerena. eadem.	35,5	123,2	123
Sept.	17. 2½ p. 28. 7½ m.	T. 110,7 t. 154,2	28. 5,9 28. 8,9	malac. WNW levis.	ſerena. nubes ſpar.	43,5	132,5	130,5
Oct.	20. 2½ p. 5. 7 m.	T. 131,5 t. 164,5	28. 8, 28. 7,7	WNW levis. NW levis.	ſerena. eadem.	32,5	147,7	133,5
Nov.	4. 2 p. 25. 8½ m.	T. 141,5 t. 179,5	28. 5, 28. 10,9	S levis. O leviſſimus.	nubila. eadem.	38	160,5	144,5
Dec.	11. 10 m. 27. 9½ m.	T. 148 t. 184,5	28. 2,9 29. 4,2	NW levis. idem.	nubila. nubes ſpar.	36,5	166,2	159,5
tot. ann. 1772.		T. 105,5 t. 195	Aug. Januar.			89,5	144,1	143,75
				1773.				
Januar.	11. 2 p. 20. 7 m.	T. 149 t. 192	27. 8,3 28. 0,	W levis. NW levis.	nubes ſpar. ſerena.	43	160,5	173,5
Febr.	18. 1½ p. 3. 12 m.	T. 157 t. 196,5	28. 6,3 28. 4,5	O med. NW levis.	nubila. ſerena.	39,5	171,7	181
Mart.	30. 3 p. 13. 6 m.	T. 137 t. 177	28. 6,4 28, 7,2	malac. NW levis.	ſerena. eadem.	40	157	161
April.	21. 2½ p. 1. 5½ m.	T. 115 t. 156	28. 3,1 28. 6,4	malac. NO levis.	} ſerena.	41	135,5	140
Mai.	28. 1½ p. 15 7 m.	T. 105,5 t. 148	28. 0,2 28. 1,2	O levis. NNW levis.	ſerena. pluvia, nix	42,5	126,7	133
Junius.	1. 3½ p. 27. 7 m.	T. 99,5 t. 132	27. 11,2 27. 9,	malac. NW med.	} nubes ſp.	32,5	115,7	123

Menſes.	D. H.	Therm. de l'Iſle.	Barometr. in menſura Pariſienſi.	Ventus.	Coeli facies	Variat. Thermomet.	Calor medius. Kamyſc.	Calor medius. Petropol.
				1773.				
Julius.	21. 3¹ p. 23. 6 m.	T. 101° t. 127	28″.0,‴9 28. 2	NW levis. idem.	ſerena. nubes ſpar.	26°	114°	120°
Aug.	10. 4. p. 8. 5 m.	100 139,5	28. 3,9 28. 4,1	NNO levis. WNW levis.	nubila. ſerena.	39,5	119,7	120,5
Sept.	13. 2, p. 18. 6 m.	112 150,5	28. 7,2 28. 6	S levis. NNW levis.	ſerena.	38,5	131,2	142
Oct.	5. 0¼ p. 21. 7¼ m	120 166,5	28. 4 28. 6,7	S levis. malac.	nubila. nubes.	46,5	143,2	142
Nov.	3. 3 p. 14. 8¹ m.	145 184,5	28. 8,7 28. 7,6	malac. eadem.	nubes ſpar. ſerena.	39,5	164,7	154
Dec.	12. 1¹ p. 15. 8 m.	148 187	27. 9,6 28, 6,8	SW levis. NW levis.	nubila. ſerena.	39	167,5	163,5
tot. ann. 1773.		T. 99,5 t. 196,5	Jun. Febr.			97	143	145,4
				1774.				
Januar.	16. 3½ p. 2. 9¾ m	T. 145,5 t. 180	28. 5,2 28. 0,8	NW levis. idem.	nubes ſp.	34,5	162,7	169,5
Febr.	27. 10¹ m. 6. 7⅓ m.	132,5 179	27. 9,3 28. 6,0	W fort. malac.	nubes ſpar. ſerena.	46,5	155,7	167,5
Mart.	27. 4 p. 14. 6 m.	128 186	27. 11 28. 0	W med. NW fort.	nubila. ſerena.	58	157	162
April.	25. 3 p. 1. 5½ m.	99 161	28. 3,6 28. 8,1	NO med. O med.	nubes. ſerena.	62	130	147,5
Mai.	31. 3 p. 2. 4 m.	93 153	28. 0,3 28. 2,7	SO levis. N fort.	nubila. ſerena.	60	123	127,5
Junius.	1. 4 p. 9. 3¹ m.	94,5 139	27. 11 27. 7,7	malac. NW med.	nubes ſp.	44,5	116,7	123
Julius.	11. 4 p. 27. 4, m.	84 134	28. 0 27. 11,3	SO levis. NW levis.	nubes. nubila.	50	109	118
		Medium ex 46 menſibus - -				38,6	142,45	146,2

Calor maximus hoc temporis intervallo erat	84°	Jul. 1774 (*)	
— minimus, ſeu ſrigus maximum	196,5	Febr. 1773	
differentia	112,5		
Media variatio inter calorem et frigus annua	94°		
Variatio thermometri menſtrua maxima	62	April. 1774	
et minima - - - - - - - -	22	Dec. 1770	
differentia	40		

Calor medius in Kamyſchin ſuperat calorem medium Petropolitanum $3\frac{3}{4}$ gr. Delil.

Eodem tempore Petropoli calor maximus	104°	Julii	1772 / 1773
et minimus - - - - - -	208	Febr.	1772
differentia	104°		

*) In thermometris Petropoli factis hucusque notari ſolet calor in urbe Aſtrachan obſervatus 92 gr. Delilianorum ut maximus, at in Kamyſchin adhuc major a nobis obſervatus est.

Altitudines barometri maximae (B) et minimae (b) quotmenſibus obſervatae.

Menſes.	D. H.	Alt. barom. in digitis et lineis Pariſinis.	Therm. de l'Isle.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. barom.	Medium. Kamyſc.	Medium. Petropol.
				1770.				
		″ ‴				′ ″	″ ‴	′ p. c.
Octbr.	15. 4½ p. 2. 7½ m.	B. 28. 10,6 b. 1. 28,3	134,7 138	S levis. NNO med.	ſerena. eadem.	0. 7,1	28. 7	28. 00
Novbr.	22. 12 m. 7. 7 m.	28. 7,3 27. 7,3	156,6 155	OSO med. W fort.	nubila. ſerena.	1. 0,0	28. 1,3	27, 85
Decbr.	12. 8 m. 29. 9½ p.	28. 7,3 27. 9,4	150,5 148,3	NO leviſſ. SSO levis.	nubila. pluvia.	0. 9,9	28. 2,3	27, 49
				1771.				
Januar.	4. 12 m. 13. 7¼ m.	B. 28. 4. b. 27. 5,6	158,5 148,3	SSW fortis. NNW fort.	nubes ſp. idem.	0. 10,4	27. 10,8	27, 81
Febr.	25. 2 p. 10. 11¼ m.	28. 7. 27. 9,7	158 153	O levis. NO med.	ſerena. nubila.	0. 9,3	28. 2,3	28, 14
Mart.	8. 1½ p. 21. 3⅔ m.	28. 8,3 27. 7,2	146 146	O levis. N levis.	ſerena. nubila.	1. 1,1	28. 1,7	28, 07
April.	8. 2⅓ p. 22. 10 p.	28. 7,6 27. 9.	127 147	O med. W fortis.	ſerena. pluvia.	0. 10,6	28. 2,3	28, 21
Mai.	1. 11 m. 8. 5 m.	28. 4. 27. 11.	127 137	WSW fortis. N fort.	ſerena. pluvia.	0. 5,0	28. 1,5	28, 18
Junius.	12. 3 p. 4. 6¼ m.	28. 4,5 27. 10,6	111,5 126	malac. WSW med.	ſerena.	0. 5,9	28. 1,5	28, 04
Julius.	7. 4 p. 22. 8½ m.	28. 3,2 27. 6,8	101 124	ONO levis. S levis.	ſerena. nubes ſpar.	0. 8,4	27. 11,4	28, 13
Aug.	27. 2 p. 12. 3 p.	28. 4,7 27. 10,2	114 120	malac. NW med.	ſerena. pluvia.	0. 6,5	28. 1,4	27, 70
Sept.	8. 2½ p. [illegible]	28. 5,6 [illegible]	120 [illegible]	malac. W [illegible]	nubes [illegible]	0. 10,[illegible]	28. 1,6	27. 95

Altitudines barometricae.

Menſes.	D. H.	Altitudines barometr.	Therm. de l'Isle.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. barom.	Medium. Kamyſc.	Medium. Petropol.
				1771.				
		″ ‴				″ ‴	′ ‴	″ p c.
Oct.	24. 3 p. 1. $7\frac{1}{3}$ p.	B. 28. 8,9 b. 27. 10,7	144° 137	NNW levis. idem fort.	nubila. ſerena.	0.10,2	28. 3,8	27, 83
Nov.	3. $3\frac{1}{4}$ p. 22. 5 p.	28. 8, 8 27. 8, 7	146 154	NW med. idem.	ſerena. nubila.	1. 0, 1	28. 2,8	27, 83
Dec.	19. 10 m. 24. 9 m.	28. 7, 1 27. 7, 2	173 127	NW levis. ONO levis.	nubila. nix.	0.11,9	28. 1,1	27, 68
tot. ann. 1771.		B. 28. 8,9 b. 27. 5,6	Oct. Januar.			1. 3, 3	28. 1,6	″ ‴ 27.11,56
				1772.				
Januar.	9. 4 p. 30. 9^{1} m.	B. 29. 2 b. 27. 9, 4	185 155	O levis. SO levis.	ſerena. nubila.	1. 4, 6	28. 5,7	28, 04
Febr.	5. 12 m. 2. $7\frac{1}{2}$ m.	28. 7, 9 27. 7, 9	174 155	NW levis. W fortis.	ſerena. nix.	1. 0, 0	28. 1,9	27, 79
Mart.	16. 12 m. 24. 1 p.	28. 7, 3 27. 10. 4	154 144	O levis. malacia:	ſerena. nubila.	0. 8, 9	28. 2,8	28, 06
April.	9. 7 m. 16. $8\frac{1}{3}$ p.	28. 7, 2 27. 8, 7	145 134	O levis. malacia.	ſerena. pluvia.	0.10,5	28. 2,0	27, 84
Mai.	5. 10 m. 30. 4 p.	28. 4, 6 27. 11,	132, 7 123	S levis. NW med.	ſerena. nubes ſpar.	0. 5, 6	28. 1,8	27, 96
Junius.	3. $7\frac{1}{2}$ m. 27. 9 m.	28. 4, 27. 8, 4	184 124, 7	NW levis. SO med.	nubes. pluvia.	0. 7, 6	28. 0,2	28, 03
Julius.	26. 7 m. 17. 8 m.	28. 3, 5 27. 10, 1	127, 5 127, 7	NW levis. idem. med.	ſerena. nubila.	0. 5, 4	28. 0,8	27, 34
Aug.	27. $8\frac{1}{2}$ m. 24. 9 m.	28. 5, 3 27. 9, 2	128, 5 123	W med. W fortis.	ſerena. nubila.	0. 8, 1	28. 1,2	27, 83

Altitudines barometricae.

Menſes.	D. H.	Altitudines barometr.	Thermometrum.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. Barom.	Medium. Kamyſc.	Medium. Petropol.
		'' '''		1772.		' '	'' '	' c.
Sept.	24. 9 m. 2. 9 m.	B. 28. 9, b. 28. 1, 2	144°,5 134	malacia NO levis.	ſerena nubila	0. 7,8	28. 5,1	28, 04
Oct.	20. 5⅔ m. 10. 10 p.	28. 8, 2 27. 10, 3	137 148,5	malacia SW mediocr.	ſerena nubila	0. 9,9	28. 3,2	28, 03
Nov.	25. 8' m. 5. 7½ p.	28. 10, 9 28. 1, 7	179,6 143	malacia NW levis.	ſerena pluvia	0. 9,2	28. 6,3	28, 12
Dec.	8. 8⅓ m. 29. 5 p.	28. 8, 1 27. 5, 2	169,2 153	SO levis W levis	nubila nix	1. 2,9	28. 0,6	28, 09
tot. ann. 1772.		29. 2 27. 5, 2	B. Jan. b. Dec.			1. 8,8	28. 2,6	27,11,67
				1773				
Januar.	30. 1 p. 12. 10. p.	B. 28. 7,1 b. 27. 6,3	167 152,5	NO levis SW medioc	nubila ningit	1 0,8	28. 0,7	27, 67
Febr.	22. 9½ m. 1. 9¾ m.	28. 11. 28. 1,2	179,5 171	ONO levis O levis	ſerena	0. 9,8	28. 6,1	28, 27
Mart.	13. 12 m. 8. 5½ p.	28. 8. 27. 7,5	164,7 149,7	malacia OSO levis	ſerena nubila	1. 0,5	28. 1,7	27, 81
Aprilis.	8. 10 m. 23. 3 p.	28. 9,1 28. 0,1	142 119	ONO levis SW levis	ſerena nubila	0. 9,0	28. 4,6	28, 31
Maiu.	4. 10' m. 22. 5 p.	28. 3,4 27. 8,4	116,7 128	malacia NW fortis	ſerena pluvia	0. 7,0	27 11,9	28, 23
Junius.	12. 8¼ m. 26. 3, p.	28. 3,8 27. 7,6	125 122,5	NW levis WNW levis	ſerena pluvia	0. 8,2	27. 11,7	28, 00
Julius.	14. 6 m. 13. 11' m.	28. 5. 27. 11,1	118 118,6	O levis NW levis	nubila nubes ſp.	0. 5,9	28. 2.	28, 05
Aug.	31. 6 m. 17. 7 m.	28. 7,5 27. 11,7	134,5 125	W levis SW [illegible]	ſerena [illegible] ſp	[illegible] 7,[illegible]	28. 3,6	28, 06

Altitudines barometricae.

Menſes.	D. H.	Altitud. barom. ′ ″	Thermometrum.	Ventus.	Coeli facies.	Variat. barom.	Medium. Kamyſch.	Medium. Petropol.
Sept.	28. $1\frac{3}{4}$ p 3. $7\frac{1}{4}$ m.	B. 28. 8,7 b. 28. 2.	125°,5 126	O levis NW med.	ſerena nubes	′ ″ 0. 6,7	′ ″ 28. 5,3	p. c. 28, 07
Oct.	21. $4\frac{3}{4}$ p. 11. 12 m.	28. 8,3 27. 7,9	144,7 137	SSO levis S fortiſſ.	nubila	1. 0,4	28. 2,1	28, 04
Nov.	5. 10 m. 23. $1\frac{1}{2}$ p.	29. 2,9 28. 0,6	177 149	O fortis W fortiſſ.	ſerena nubila	1. 2,3	28. 7,7	28, 43
Dec.	2 10 m 13 $5\frac{3}{4}$ m.	29. 0,5 27. 5,9	168 156	O levis NNW fort.	ſerena nubila	1. 6,6	28. 3,2	27, 82
tot. ann. 1773		B. 29. 2,9 b. 27. 5,9	Nov. Dec.			1. 9,0	28. 3,0	″ ‴ 28, 0,7
				1774.				
Januar.	15. 9^{1} m. 28 8. p.	B. 28. 5,4 b. 27. 8,0	147 152	malac. WSW med.	nubila ningit	0. 9,4	28. 0,7	27, 61
Febr.	5. 8 p 27. $0\frac{1}{2}$ p.	28. 6,4 27. 9,2	163,7 137	malac. W fort.	ſerena nubila	0. 9,2	28. 1,8	27, 87
Mart.	31. $8\frac{3}{4}$ p. 4. $5\frac{1}{3}$ m.	28. 7,9 27. 2,9	154,5 159	SO fort. WNW fort.	ſerena ningit	1. 5,0	27. 11,4	28, 15
April.	1 $11\frac{1}{3}$ m. 30 $8\frac{1}{2}$ p.	28. 9 27. 10	147 128	SO fortiſſ. N fortiſſ.	ſerena	0. 11,0	28: 3,5	28, 22
Maius	13. $11\frac{1}{4}$ m. 21. 2^{1} p.	28. 4,6 27 9,1	106 102,3	SO fort. NW fort.	nubes, pluvia et tonitru	0. 7,5	28. 0,8	28, 20
Junius	3. $9\frac{5}{4}$ m. 26. $3\frac{1}{2}$ p.	28. 3,7 27. 6,7	114 128,7	NW levis malac.	nubes nubila	0. 9,0	27. 11,2	28, 04
Julius	17. $6\frac{1}{4}$ m. 25. 2 p.	28. 4. 27. 6,9	111,[illegible] 96,5	ONO fort. W fortiſſ.	nubes, pluvia [illegible]	0. 9,1	27. 11,4	28, 18
			Medium ex ſingulis 46 menſibus				28′. 2,24	27, 11″ 83

Spatio 46 menſium erat altitudo barometri

maxima - - - -	29″.	2,‴9		Novembri 1773.
et minima - - -	27.	2,	9	Martio 1774.
unde differentia - -	2.	0,	0.	

Variatio barometri media annua

ex tribus annis completis -	1.	7,	0.	
Eadem menſtrua maxima -	1.	6,	0.	Decembri 1778.
- - - minima -	0.	5,	0.	Maio 1771.
differ.	1.	1,	6.	
et media e ſingulis 46 menſibus	0.	9,	76.	

Comparatis altitudinibus barometricis ac thermometricis mediis Petropoli et Kamyſchini obſervatis periculum feci et computavi diſcrimen ſoli harum urbium, atque reperi 171 pedes Pariſinos, aequivalentes 182 pedibus Londinenſibus, adeoque 26 perticis Ruſſicis, quibus Petropolis elevatior Kamyſchino. D. Chriſtian. Mayer in Expoſitione de tranſitu Veneris ante diſcum ſolis, pag. 316. invenit ex obſervationibus Lerchianis diſcrimen inter Petropolin et Aſtrachan 101 pedum Pariſinorum, quibus Petropolis altior, quod cum noſtro calculo non congruit; nam e curſu Wolgae ſequitur Aſtrachanum depreſſius eſſe debere Kamyſchino. Methodus altitudines montium ope barometri menſurandi, applicata correctione a calore orta, ſatis exacta eſſe videtur in diſtantia modica, ubi conſtitutio atmoſphaerae proxime eadem; at in locis valde diſſitis ob ingens diſcrimen climatis (*), inſignem

(*) Diſtantia breviſſima ſeu geographica Kamyſchini a Petropoli eſt 1360 Werſtarum et differentia latitudinum fere 10 graduum; Aſtrachanum diſtat a Petropoli 1787 Werſtis, et diſcrimen latitudinum 13⅔ graduum.

ſignem barometri mutationem et caloris frigorisque alternationem vix tuto adhiberi poteſt. Praeterea licet barometra accuratiſſime ſint facta, omnibus non erit mercurius in pari altitudine; diſcrimen interdum eſſe poteſt unius lineae, quia non omne genus vitri mercurium aequaliter repellit, ut docet Muſchenbroekius; variam vitri fabricam diſcrimen altitudini mercurii inferre didicit ab experientia Hollmannus. Idem D. Mayer loco citato non dubitat, littus maris Caſpii 130 pedibus elevatum eſſe ſupra littus maris Peruani et Africani. Ex circumſtantiis locorum veriſimile videtur, mare Caſpium depreſſius eſſe Palude Meotide et Ponto Euxino, nam Tanaïs viſibiliter plus quam 10 orgyis elevatior eſt Wolga (*). Quamvis affirmo ſuperficiem maris Caſpii depreſſiorem eſſe ſuperficiebus marium Azovienſis et Nigri; probare tamen nolo temerari aſſertionem cujusdam Ehrlich, canditati miniſterii Rigenſis, qui ſtatuit ſinum Finnicum ad oſtium Newae plus quam ſesqui milliario germanico elevatiorem eſſe oſtio Wolgae, quo in Caspium exoneratur mare. (Büſchings wöchentliche Nachrichten 1780. 22ſtes Stück.)

(*) Conf. Celeb. Pallas Reiſe, III. Th. S. 57 ſqq.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES à ST. PETERSBOURG
ANNÉE MDCCXCIV.

d'après le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 19 Janvier 1795.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu; & la hauteur moyenne du Baromètre pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Au plus haut P. cent.	Au plus haut jour & heure	Au plus bas P. cent.	Au plus bas jour & heure	Variation. cent.	Milieu P. cent.	Hauteur moyenne P. millièm.
Janvier	28. 68	le 4 à 3 h. s.	26. 78	le 24 à 2 h. m.	190	27 73	28. 044
Février	28. 81	le 5 à 8 h. m.	27. 48	le 22 à 8 h. m.	133	28 14	28. 047
Mars	28. 84	le 8 à 2 h. s.	27. 92	le 27 à 6 h. s.	92	28. 38	28. 423
Avril	28 78	le 13 à 6 h. m.	27. 32	le 29 à 11 h. s.	146	28. 05	28. 340
Mai	28. 59	le 15 à 2 h. s.	27. 53	le 7 à 2 h. s	106	28 06	28. 159
Juin	28. 62	le 30 à 7 h. m.	27. 72	le 10 à 3 h. s.	90	28. 17	28. 108
Juillet	28. 47	le 2 à 3 h. s.	27. 56	le 29 à 12 h. m.	91	28. 02	28. 001
Août	28 25	le 27 à 1 h. m.	27. 70	le 30 à 6 h. m	55	27. 99	28. 013
Septembr.	28 67	le 30 à 12 h. m.	27. 61	le 13 à 12 h. s.	106	28. 14	28. 066
Octobre	28. 82	le 17 à 12 h. m.	27. 69	le 26 à 6 h. m.	113	28. 25	28. 246
Novembre	28. 69	le 20 à 3 h. m.	27. 76	le 13 à 6 h m.	93	28. 22	28. 250
Décembre	29. 23	le 22 à 12 h. s	27. 53	le 29 à 12 h s.	170	28. 38	28. 554

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *après-midi*.

2.)

2.) Nombre des jours auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

	Au deſſus de					un demi mois au dessus de
	27. 80	27. 90	28. 0	28. 10	28. 20	
Mois	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	Pouces milliem.
Janvier	24. 8	20. 10	16. 23	15. 13	12. 10	28. 101
Février	19. 12	16. 17	15. 11	12. 5	10. 15	28. 049
Mars	31. 0	31. 0	30. 3	28. 15	25. 3	28. 424
Avril	28. 8	27. 13	26. 10	25. 1	22. 23	28. 425
Mai	27. 0	25. 20	23. 13	18. 14	12. 17	28. 158
Juin	28. 22	25. 16	19. 18	15. 16	9. 19	28. 103
Juillet	26. 2	23. 9	18. 7	8. 7	3. 13	28. 002
Août	28. 13	23. 3	17. 6	11. 5	2. 14	28. 014
Septembre	27. 18	23. 13	17. 22	11. 0	5. 13	28. 079
Octobre	30. 3	28. 9	24. 22	19. 15	16. 10	28. 242
Novembre	29. 3	28. 14	26. 6	22. 16	17. 4	28. 255
Décembre	29 14	28. 8	26. 16	24. 22	22. 8	28. 645

3.) Variations conſidérables & ſubites.

Mois	Temps. jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouces & Cent.	Variatio Centièmes	Therm. Degrés	Vent.	Atmoſphère.
Janvier.	le 10 à 10 h. m.	26	27. 72	+ 62	152	NOu.	Ciel en grande partie ſerein.
	- 11 à 12 h. m.		28. 34		162	NOu.	Ciel ſerein.
	le 15 à 12 h. m.	30	28. 38	— 51	171	SE.	C. ſerein, enſuite nuages.
	- 16 à 6 h. s.		27. 87		149	Oueſt.	Neige & ciel couvert.
	le 20 à 2 h. s.	34	27. 55	+ 76	152	NOu.	Ciel couvert.
	- 21 à 12 h. s.		28. 31		167	NOu.	Ciel ſerein enſuite couvert.
	- 22 à 12 h. s.	51	27. 68	— 154	150	Oueſt.	C. couvert, brouillard, pluie.
	- 24 à 3 h. m.		26. 77		148	SOu. f.	Ciel couvert.
	le 24 à 3 h. s.	32	26. 98	+ 91	149	SOu.fort	Ciel couvert, neige.
	- 25 à 11 h. s.		27. 89		157	Oueſt.	Ciel ſerein.
Fevrier.	le 9 à 9 h. s.	33	28. 08	— 55	149	Calme.	C.couv., enſuite neige & pluie.
	- 11 à 6 h. m.		27. 53		147	SOu.fort	Ciel couvert.
	le 19 à 12 h. s.	55	28. 38	— 90	171	Sud.	C. ſerein enſuite couvert.
	- 20 à 12 h. s.		27. 94		156	SOu.fort	C. couvert enſuite neige.
	- 22 à 7 h. m.		27. 48		156	Sud.	C. couv. beaucoup de neige.
	le 22 à 12 h. m.	24	27. 49	+ 63	152	Sud.	C. couv. beaucoup de neige.
	- 23 à 12 h. m.		28. 12		165	Calme S.	Ciel ſerein.
	le 23 à 12 h. s.	16	28. 08	— 56	167	SOu.	Nuages.
	- 24 à 4 h. s.		27. 52		151	SOu.	Pluie, Ciel couvert.
Mars.	le 26 à 3 h. s.	27	28. 55	— 63	151	Eſt fort.	Ciel ſerein.
	- 27 à 6 h. s.	18	27. 92	+ 42	147	NOu.	Ciel couvert.
	- 28 à 12 h. m.		28. 34		150	Oueſt.	Ciel ſerein.
Avril.	le 10 à 3 h. m.	29	27. 88	+ 64	146	NE fort	Pluie, C. couv. enſuite ſerein.
	- 11 à 8 h. m.		28. 52		155	E. fort.	Ciel ſerein.
	le 26 à 1 h. m.	36	28. 13	— 91	142	Calme.	C. en partie ſerein.
	- 2[illegible] à 1[illegible] h. [illegible]	22	27. 3[illegible]	+ 55	144	NOu.	beaucoup de pluie, C. couvert.
	- 3[illegible] à 3 h. [illegible]		27. 87		145	NOu.	pluie, nuages.

Mois

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heures	Baromètr. Pouces. Cent.	Variatio Centièmes.	Therm. Dégrés.	Vent.	Atmoſphère.
May.	le 1 à 6 h. m.	10	27. 92	— 21	145	Oueſt.	C. couvert, pluie à verſe.
	- 1 à 4 h. s.		27. 71		141	SOu. ff.	nuages, debordement de la Neva
	- 2 à 12 h. m.	20	28. 18	+ 47	137	NE fort.	Ciel en partie ſerein.
	- 3 à 10 h. m.	22	27. 58	— 60	145	N fort.	C. couv. pluie à verſe, neige.
	- 4 à 10 h. m.	24	28. 20	+ 62	146	NOu.	nuages enſuite C. ſerein.
	le 5 à 10 h. m.	34	28. 25	— 67	141	Oueſt.	nuages, enſuite C. couv. & pluie
	- 6 à 8 h. s.		27. 58		135	SOu. fort	pluie variable.
	le 7 à 2 h. s.	46	27. 53	+ 76	136	SOu. fort	nuages, pluie à verſe.
	- 9 à 12 h. m.		28. 29		129	SOu.	C. ſerein.
Juillet.	le 4 à 7 h. m.	23	28. 24	— 45	120	Ou. Sud.	C. ser., ens. c. Orage, grêle, pluie
	- 5 à 6 h. m.		27. 79		126	Ou. fort.	C. couv. pluie à verſe.
Nov.	le 17 à 3 h. m.	72	27. 91	+ 78	154	Nord fort	C. couvert enſuite neige.
	- 20 à 3 h. m.		28. 69		163	Eſt calme	C. couvert, brouillard.
Décembre.	le 4 à 3 h. s.	37	27. 87	+ 53	141	S. Ou.	C. couvert, pluie.
	- 6 à 4 h. m.		28. 40		152	Ou.	C. couvert.
	le 14 à 6 h. s.	44	28. 71	+ 51	162	SE. fort.	Neige, C. couvert.
	- 16 à 2 h. s.		29. 22		176	SE.	C. ſerein.
	le 22 à 12 h. s.		29. 23		164	E. fort.	C. couv. enſuite neige.
	- 25 à 12 h. m.		28. 86		175	SE.	C. ſerein.
	- 27 à 9 h. m.	45	28. 02	— 84	159	SE. fort	neige, C. couv. enſuite ſerein.
	le 28 à 9 h. m.	39	28. 38	— 85	167	S. fort.	C. couvert, neige.
	- 29 à 12 h. s.		27. 53		161	SOu.	C. couvert.

ff. indique que le vent a été très fort.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence et l'état moyen du froid et de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas. Degré.	Au plus bas. Jour et heure.	Au plus haut. Degré.	Au plus haut. Jour et heure.	Différence. Degrés.	État moyen. Froid moyen. Degré.	État moyen. Chaleur moyenne. Degré.
Janvier	173	le 15 à 7 h. m.	146	le 9 à 9 h. m. et le 27 à 10 h. s.	27	157,2	152,4
Février	183	le 26 à 7 h. m.	144	le 2 à 2 h. s.	39	159,7	153,8
Mars	167	le 31 à 6 h. m.	139	le 20 à 2 h. s.	28	156,3	148,0
Avril	165	le 1 à 6 h. m.	130	le 16 à 2 h. s.	35	149,3	138,5
May	151	le 4 à 6 h. m.	108	le 14 à 2 h. s.	43	137,0	127,5
Juin	142	le 6 à 6 h. m.	106	le 27 à 2 h. s.	36	130,9	122,3
Juillet	140	le 6 à 11 h. s.	111	le 4 à 2 h. s.	29	127,8	120,1
Août	138	le 27 à 6 h. m.	117	le 9 à 2 h. s. et le 17 à 2 h. s.	21	130,7	123,0
Septbr.	148	le 15 à 6 h. m.	122	le 20 à 2 h. s.	26	137,3	130,9
Octbr.	150	le 18 à 10 h. s. et le 20 à 7 h. m.	126	le 8 à 2 h. s.	24	142,9	136,9
Novbr.	163	le 20 à 7 h. m.	136	le 7 à 11 h. m.	27	152,0	148,6
Décbr.	180	le 16 avant midi	141	le 4 à 2 h. s.	39	162,7	159,2

2.) Nombre

2.) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de *Délisle*.

Mois.	Le froid a été plus grand que						Le chaleur a été plus grande que					
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.
Janvier . .		1	8	29	31	31					11	28
Fevrier .	1	6	12	23	28	28					7	22
Mars . .			10	25	31	31				1	21	31
Avril . .			3	13	29	30				17	29	30
Mai . .				2	9	27	1	6	19	29	31	31
Juin . .					2	17	3	11	27	30	30	30
Juillet . .						9		17	29	31	31	31
Août . .						19		5	31	31	31	31
Septbr. . .					14	30			14	30	30	30
Octbr. . .					23	31			3	21	31	31
Novbr. . .			3	17	29	30				2	16	30
Decbr. . .	1	9	20	24	31	31					8	14

III.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force et de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Calme.	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord	N E	Eſt	S E	Sud	S Ou	Oueſt	N Ou
	Jours.	Jours.	Jours.	J urs.	Jours.	Jours.	Jours	Jours.	Jours.	Jours.	J urs	J urs.
Janvier .	3	17	9	2	0	0	2	4	3	8	5	9
Février .	5	15	8	0	3	3	3	3	4	6	1	5
Mars . .	3	23	5	0	1	1	3	4	3	8	6	5
Avril . .	8	15	7	0	5	1	4	7	1	0	6	6
Mai . .	8	9	12	2	1	2	3	1	5	8	4	7
Juin . .	9	15	6	0	0	5	4	1	2	4	10	4
Juillet .	7	16	7	1	3	6	3	0	1	2	9	7
Août . .	5	17	8	1	0	4	6	5	4	6	2	4
Septembre	11	14	5	0	5	4	3	2	4	2	3	7
Octobre .	7	17	7	0	3	1	4	1	9	9	4	0
Novembre	8	14	7	1	2	2	7	3	7	6	2	1
Décembre	4	18	8	1	0	0	3	12	6	6	2	2

3.) Va-

2.) Rapport de la force des vents et des quatre plages, tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Degré de Force	Rapport des quatre plages.			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt
Janvier .	287	5	4	9	13
Février .	239	7	6	9	6
Mars . .	222	4	5	9	13
Avril . .	220	8	8	5	9
Mai . .	290	5	5	9	12
Juin . .	210	4	7	5	14
Juillet .	242	10	6	2	13
Août . .	255	4	10	10	7
Septembre	197	11	6	6	7
Octobre .	222	4	5	14	8
Novembre	240	4	9	12	5
Décembre	258	1	9	15	6

3.) Di-

Direction des vents ſorts.

Direct.	Jours et mois.	Nombre des jours.
Nord	Le 22 Février, le 31 Mars, le 3 Avril et le 15. 17 Novembre	5
NE.	Le 10 Avril, le 2 Mai, le 15 Juin, le 19 Juillet, le 14 Août et le 16 Novembre - - - - - - -	6
Eſt.	Le 14 Février, le 26 Mars, le 20 Avril, le 6 Juin, le 2. 6 Juillet, le 15. 18. 22 Août, le 21 Novembre et le 23. 24 Décembre - - - - -	12
SE.	Le 13. 14. Janvier, le 25 Février, le 5 Avril, le 16 Août, le 26. 27 Septembre, le 4 Novembre et le 11. 12. 14. 27 Décembre - - - - - - - -	12
Sud	Le 28. 29 Janvier, le 1 Février, le 10. 21. 22 Mai, le 11 Août, le 13. 25 Septembre, le 6. 8. 9. 10 Octobre, le 5. 12 Novembre et le 29 Décembre - - -	16
SOu.	Le 5. 19 23. 24 Janvier, le 10. 11. 20. 21 Février, le 16. 20 Mars, le 1. 6. 7. 17. 23 Mai, le 29 Juillet, le 9. 30 Août, le 25 Octobre, le 6 Novembre et le 3. 4 Décembre - - - - - - - - -	22
Oueſt	Le 7. 12. 18 Janvier, le 17. 18. 26 Avril, le 3. 18. 19 Mai, le 12 Juin, le 5 Juillet et le 23. 24 Octobre -	13
NOu.	Le 30 Mars, le 15. 16 Mai, le 9. 22. 23 Juin, le 13. 14. 30 Juillet, le 2 Août et le 17 Septembre - -	11
	Somme	97
	Parmi le 97 jours de vents ſorts, ont été les plus orageux, ceux	
NE.	du 14 Août et du 16 Novembre - - - - -	2
SOu.	du 23. 24 Janvier, du 1 Mai et du 3 Décembre -	4
Oueſt	du 18 Mai - - - - - - - -	1
NOu.	du 30 Juillet - - - - - - - - -	1

IV.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel			Brouil-lard.	Pluie		Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert		forte.	petite.	forte.	petite.
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.
Janvier . .	1	12	18	1		3	1	13
Février . .	4	6	18	2		4	1	13
Mars . . .	12	15	4	2		5		7
Avril . .	16	10	4	1	3	3		0
Mai . . .	5	19	7	1	10	9		2
Juin . . .	14	12	4	1	4	4		
Juillet . .	11	17	3	0	10	5		
Août . .	2	23	6	2	10	13		
Septembre .	6	17	7	3	8	10		
Octobre .	1	13	17	6	2	15		
Novembre .	0	7	23	6	0	10		11
Décembre .	4	10	17	2	1	4		10

Concluſions.

Comme, en rapportant le réſumé de mes obſervations météorologiques, je diſtingue trois intervalles de temps, qui ſont: 1.) l'année complette; 2.) les ſix mois d'hyver et 3.) les ſix mois d'été, je marquerai pour éviter toutes les répétitions ennuyeuſes, par

A. L'intervalle de l'année complette, depuis le 1 Janvier 1794 jusqu'au 1 Janvier 1795, qui comprend conſéquemment 365 jours.

H. L'intervalle des ſix mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1793 jusqu'au 1 Mai 1794, qui comprend 181 jours: et par

E. L'intervalle des ſix mois d'été, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1794, qui comprend 184 jours.

Après cette convention je diſtribue mes réſultats comme je l'ai fait jusqu'ici, en quatre claſſes, dont la première contient les obſervations du Baromètre; la ſeconde celles du Thermomètre ou du froid et de la chaleur; la troiſième celles du vent, de ſa force et de ſa direction; enfin la quatrième celles de l'Atmoſphère et des Phénomènes qui y ont lieu.

I. Baromètre.

1.) Sa plus grande élévation

A. 29. 23 le 22 Décembre à 12 heures minuit. Thermomètre 164°. Vent de l'Eſt fort. Ciel couvert.

H. 28. 34 le 8 Mars, à 2 heures après midi. Thermomètre 152°. Vent médiocre du NOu. Ciel ſerein.

E. 28. 82 le 17 Octobre, à 12 heures midi. Thermomètre 143°. Vent du Nord médiocre. Ciel couvert.

2.) Sa plus petite élévation

A. 26. 78 le 24 Janvier à 2 heures matin. Thermomètre 148°. Vent très fort du SOu Ciel couvert.

H. 26. 78 le 24 Janvier &c. comme ci-deſſus A.

E. 27. 53 le 7 Mai, à 2 heures après midi. Thermomètre 136°. Vent de l'Oueſt fort. Ciel en partie couvert et beaucoup de pluie.

3.) Sa

3.) Sa variation totale A. 2,45. H. 2,06 et E. 1,29 pouces.

4.) Le milieu arithmétique entre les deux extrêmes A. 28,005. H. 27,810 et E. 28,175 p.

5.) La hauteur moyenne A. 28,202. H. 28,207 et E. 28,099 p.

6.) La hauteur du Baromètre a été deſſus de

27.80	en A.	330 jours:	en H.	159 jours:	en E.	168 jours.
27.90	—	302 —	—	147 —	—	150 —
28.00	—	264 —	—	134 —	—	122 —
28.10	—	213 —	—	118 —	—	84 —
28.20	—	161 —	—	98 —	—	51 —

7.) La hauteur du Baromètre a été en

A. $182\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28.141.
H. $90\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28.237.
E. 92 jours au deſſus de 28.082.

La variation totale a été la plus grande en Janvier de 1,90 et la plus petite en Août de 0,58 pouces.

La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande en Décembre de 28,554 et la plus petite en Juillet de 28,001 pouces.

La déſcente la plus conſidérable et la plus ſubite a été de $1\frac{54}{100}$ pouces en 51 heures le 22 Janvier. La montée la plus conſidérable et la plus ſubite du Baromètre a été de $\frac{91}{100}$ pouces en 32 heures le 24 Janvier.

II. Thermometre.

1.) Sa plus petite hauteur ou le plus grand froid:
A. 183°, d'après Reaumur $17^d, 6$, le 26 Février à 7 h. du matin. Baromètre 27,94. Vent du Nord mediocre. Ciel ſerein.

H. 155°, d'après Réaumur 20^d,3 le 10 Décembre 1793 à 6 heures du ſoir. Baromètre 28, 38. Vent du SE trés ſort. Ciel ſerein enſuite couvert.

E. 151°, d'après Réaumur 0^d,5 le 4 Mai à 6 heures du matin. Baromètre 28. 16. Vent du NOu. Ciel couvert, neige.

2.) Sa plus grande hauteur, ou la plus grande chaleur.

A. 106°, d'après Réaumur 23^d,5 le 27 Juin à 2 heures après midi. Baromètre 28. 25. Calme et ciel ſerein.

H. 130° d'après Réaumur 10^d.7 le 16 Avril à 2 heures après midi. Baromètre 28. 57. Vent médicocre du SE. Ciel ſerein.

E. 106°, d'après Réaumur 23^d,5 le 27 Juin, comme cideſſus A.

3.) La variation totale en A. 77. en H. 58. et en E. 45° de Deliſle. La variation totale a été la plus grande en Mai de 43°, et la plus petite en Août de 21°.

4.) Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 6 heures du matin et à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Décembre de 162°,7. et le plus petit en Juillet de 127°,8. Ce froid moyen s'est trouvé en

A. 142°,7, d'après Réaumur 3^d, 8 de chaleur.

H. 156, 8 — — — 3,6 de froid.

E. 134, 8 — — — 8,1 de chaleur.

5.) La chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques, obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet de 120°,1 et la plus petite en Décembre de 159°,2. Cette chaleur moyenne s'eſt trouvée en

A.

A. 138,°3, d'après Réaumur 6,°2 de chaleur.
H. 150, 3 — — — 0, 1 de froid.
E. 126, 7 — — — 12, 5 de chaleur.

6.) Le froid a ſurpaſſé

	180	170	160	150	140	130	120	110	degrés.
en A.	2	16	56	133	227	314	363	365	jours.
en H.	8	22	57	133	180	181	-	-	—
en E.	-	-	-	2	48	133	182	184	—

7.) La chaleur a ſurpaſſée

	110	120	130	140	150	160	170	180	degrés.
en A.	4	39	123	192	270	339	361	365	jours.
en H.	-	--	-	21	95	153	171	180	—
en E.	4	39	123	172	184	-	-	-	—

8.) Enumération détaillée des froids en H, ou depuis le le 1 Novembre 1793 jusqu'au 1 Mai 1794.

Le froid a ſurpaſſé 180° en 8 jours, le 5. 6. 8. 9. 10. 11. 15 Décembre et le 26 Février. Le froid a été entre

170 et 180°	Le 1. 2. 3. 7. 12. 13. 14. 16 Décbr. 1793, le 15 Janv. et le 19. 20. 23. 25. 27 Fevr.	jours. 14
160 et 170.	Le 20. 29 Novbr., le 4. 17. 25 — 29 Décbr., le 1. 11. 13. 14. 20. 21. 22 Janvier, le 5. 14. 15. 17. 18. 24 Février, le 1 — 4. 8. 10. 11. 24. 30. 31 Mars et le 1. 2. 3 Avr.	35
150 et 160.	Le 8. 9. 16 — 19. 21 — 28. 30 Nov., le 23. 24. 30. 31 Déc., le 2 — 5. 7 — 10. 12. 16 – 19. 24 – 31 Janvier, le 1. 4. 6 – 9. 13. 16. 21. 22. 28 Février, le 5. 6. 7. 9. 12. 13. 14. 19. 21. 22. 23. 26 – 29 Mars et le 4 – 8. 10 – 14 Avril - - -	76

Il n'a donc gelé qu'en 133 jours, et en 48 jours il n'a gélé point du tout, mais il avoit déjà gélé avant le 1 Novembre 1703 en 5 jours, ſavoir le 22 Septembre et le 21. 22. 23. 24 Octobre: enſuite il y a eu encore des gelées au mois de Mai en 2 jours, ſavoir le 3 et 4. L'intervalle entre la premiére gelée du 22 Septembre 1793 et la derniére gelée du 4 Mai 1794 eſt de 224 jours.

9.) Enumération détaillée des chaleurs en E, ou depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1794.

La chaleur a ſurpaſſé 110° en 4 jours, le 14 Mai, le le 26. 27 et 28 Juin. La chaleur a été entre

		jours.
120 et 110°	Le 11. 12. 13. 15. 21 Mai, le 14. 16. 21. 22. 24. 25. 29. 30 Juin, le 1. 3. 4. 15 – 28 Juillet et le 9. 10. 16. 17. 18 Août	35
130 et 120	Le 6. 9. 10. 16. 20. 22. 23. 25 – 30 Mai, le 2. 3. 4. 7–13. 15. 17 – 20. 23 Juin, le 2. 5. 7. 9–14. 29. 30. 31 Juillet, le 2–8. 11–15. 19–31 Août, le 1. 2. 5. 6. 19–25. 27. 28. 29 Septembre et le 7. 8. 9 Octobre	84
140 et 130	Le 1. 2. 5. 7. 8. 17. 18. 19. 24. 31 Mai, le 1. 5. 6 Juin, le 6. 8 Juillet, le 3. 4. 7 – 18. 26. 30 Septembre et le 1 – 6. 10 – 15. 22. 23. 24. 28. 29. 30 Octobre	49
150 et 140	Le 3. 4 Mai, le 16 – 21. 25. 26. 27 et 31 Octobre. - - - - - - - -	12

Il n'a donc eu aucun jour où il eut gelé, et déjà en Mars et en Avril il y a eu 18 jours, où la chaleur, à 2 heures après midi, a ſurpaſſé 140°.

La

La derniere gelée de 151° a été obſervé le 4 Mai matin. Baromètre 28. 16, vent médiocre du NOu, ciel couvert avec un peu de neige. Il recommença à geler le 1 Novembre matin, & le Thermomètre fut à 151°: Baromètre 28. 15. Vent de l'Eſt médiocre Ciel ſerein. Brouillard. L'Intervalle entre la derniere gelée & la premiere eſt donc de 181 jours, & par conſéquent conſidérablement plus long qu'à l'ordinaire.

III. Vent.

	en A.	en H.	en E.
Calme parfait -	78 jours	34 jours	47 jours
Vent médiocre -	— 190 —	— 101 —	— 88 —
Vent fort - -	— 89 —	— 42 —	— 45 —
Vent trés fort -	— 8 —	— 4 —	— 4 —
La force des Vents	— 241 —	— 241 —	— 236 —
Vent du Nord -	— 23 jours	— 17 jours	— 12 jours
NE - -	— 29 —	— 14 —	— 22 —
Eſt - -	— 45 —	— 16 —	— 23 —
SE - -	— 43 —	— 20 —	— 10 —
Sud - -	— 49 —	— 28 —	— 25 —
SOu -	— 65 —	— 28 —	— 31 —
Oueſt -	— 54 —	— 28 —	— 32 —
NOu -	— 57 —	— 30 —	— 29 —

Rapport des quatre plages	Nord	Eſt	Sud	Oueſt
en A.	66	81	103	115
en H.	78	66	104	114
en E.	74	78	92	124

Le mois de Mai a été le plus venteux, & le mois d'Octobre le plus calme. L'hyver de 1793 à 1794 a été plus

plus venteux que l'été de 1794. Le vent dominant a été encore celui de l'Oueſt, & ſpécialement celui du SOu.

IV. Atmoſphère.

	en A.	en H.	en E.
Ciel entièrement ſerein -	76 j.	33 j.	39 j.
Ciel en partie ſer., & nuages	— 161 –	— 65 –	— 101 –
Ciel entièrement couvert	— 128 –	— 78 –	— 44 –
Brouillards, ou nébuleux -	— 27 –	— 11 –	— 13 –
Pluie forte - - -	— 48 –	— 7 –	— 44 –
—— petite - - -	— 85 –	— 27 –	— 56 –
	133 j.	34 j.	100.j.
Neige copieuſe - -	— 2 –	— 3 –	— 0 –
—— mediocre - -	— 56 –	— 52 –	— 2 –
	58 j.	55 j.	2 j.

La derniere neige tomba le 4 Mai & il ne recommença à neiger qu'au 15 Novembre, après un intervalle de 194 jours.

Il ne gréla que trois ſois, le 22 de Mars, le 4 de Juillet & le 11 Septembre.

Le nombre des orages ne monta qu'à 5: le 11. 13 Mai, le 13. 29 Juin & le 4 Juillet, dont aucun n'a été très fort. Il tonna de loin en 5 Jours, le 5. 21. 22. 30 Juillet & le 2 Septembre. Il faiſoit des éclairs le 15 Août au Soir. Il n'y eut que 2 aurores boréales d'obſervées le 2 & 3 Avril.

La Néva débacla le 10 Avril après-midi, n'ayant été priſe que pendant 130 Jours. Baromètre 28. 02 à 28.

28. 22. Thermomètre 147° à 153'. Vent ſort du NE. Ciel à demi ſerein. La riviere continua enſuite à charier des glaces le 12. 14. 15. 16. 18. & pour la derniere fois le 19 en grande abondance.

La Néva recommença à former & à charier des glaces le 20 Novembre: le 22 les glaçons vinrent en plus grande abondance, & le 25 la riviere fut priſe, 229 jours après ſon débacle. Baromètre 28. 42 à 28. 46. Thermomètre 155. Calme. Ciel couvert & neige. Mais elle ne reſta dans cet état de ſolidité que jusqu'au 4 Décembre, où elle débacla de nouveau. Baromètre 27. 95. Thermomètre 142°. Vent médiocre du SOu, pluie abondante & ciel couvert. Le 10 Décembre la riviere recommença à charier beaucoup de glaces, & dans la nuit du 13 au 14 elle ſe trouva priſe pour la ſeconde fois, 247 jours après ſon débacle en Avril & 18 jours après ſa premiere priſe en Novembre. Baromètre 28. 93. Thermomètre 162°. Vent ſort du SE & ciel couvert.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES

faites en MDCCXCIV. d'après le nouveau ſtile par Mr. le Conſeiller de Collèges et Chevalier *Stritter* à Moscou.

Préſenté à l'Académie le 24 Août 1795.

I. Baromètre.

Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour & heure	P. cent.	jour & heure	cent.	P. cent.	P. cent.
Janvier	27. 96	le 4 ſoir, le 5.	26. 96	le 20 et le 24	100	27 46	27. 49
Février	27. 92	le 3 à 6 h. m.	26. 75	le 26 matin.	117	27. 33	27. 41
Mars	28. 04	le 5. 6. 7.	27. 17	le 22 et le 27.	87	27. 60	27. 71
Avril	28 00	le 14 à 6 h. m.	27. 00	le 3 matin.	100	27. 50	27. 58
Mai	27. 83	le 15 à 2 h. s.	27. 17	le 3 à 2 h. s	66	27. 50	27. 54
Juin	27. 71	le 28 à 6 h. m.	27. 13	le 6 et le 11.	58	27. 42	27. 37
Juillet	27. 71	le 3 à 6 h. m.	26. 75	le 21. 22 et 23.	96	27. 23	27. 14
Août	27. 04	le 3 à 2 h. s. le 17 à 2 h. s. et le 27. 28. 29.	26. 67	le 14 à 6 h. m. et à 2 h s.	37	26. 85	26. 93
Septembr.	27. 50	le 30 à 10 h. s.	26. 58	le 11 à 2 h. s.	92	27. 04	27. 03
Octobre	27. 63	le 18.19. à 2 h. s.	27. 00	le 28 et 29.	63	27. 31	27. 26
Novembre	27. 54	le 9 à 6 h. m.	26. 83	le 16.	71	27. 18	27. 24
Décembre	28. 04	le 16 à 2 h. s.	26. 88	le 30 à 2 h s. et le 31.	116	24. 46	27. 58

II. Ther-

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence et l'état moyen du froid et de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	Degrés.	Degré.	Degré.
Janvier	184	le 16 à 6 h. m.	148	le 26 à 10 h. s.	36	162,4	156,5
Février	184	le 20 à 6 h. m.	145	le 25 à 2 h. s.	39	164,5	156,3
Mars	177	le 4 à 6 h. m.	141	le 17 à 2 h. s.	36	161,5	150,2
Avril	174	le 1 à 6 h. m.	126	le 23 à 2 h. s.	48	152,7	140,0
May	145	le 1 et 5 à 6 h. m.	103	le 27 à 2 h. s.	42	133,7	118,6
Juin	138	le 8 à 10 h. s.	104	le 28 et 29 à 2 h. s.	34	130,3	118,3
Juillet	138	le 7 à 6 h. m.	106	le 4 à 2 h. s.	32	130,0	119,0
Août	135	le 25. 26 et 31 à 6 h. m.	109	le 6 à 2 h. s.	26	130,1	120,9
Septbr.	148	le 16 et 17 à 6 h. m.	120	le 22 et 23 à 2 h. s.	28	138,6	127,7
Octbr.	156	le 18 à 6 h. m.	126	le 8 à 2 h. s.	30	143,2	136,1
Novbr.	154	le 27 à 6 h. m.	136	le 16 à 6 h. m.	18	148,2	144,2
Décbr.	184	le 13 à 10 h. s. le 14 et 15 à 6 h. m.	143	le 4 à 10 h. s.	41	168,2	162,5

2.) Nombre

2.) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de *Déliſle*.

Mois.	Le froid a été plus grand que.						La chaleur a été plus grande que						
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours	150 Jours.	140 Jours	130 Jours.	110 Jours	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.	170 Jours.
Janvier .	2	3	19	31	31	31					1	22	31
Février .	3	6	16	28	28	28					4	27	27
Mars .		4	16	31	31	31					11	31	31
Avril .		2	6	19	30	30			4	14	26	30	30
Mai .					7	21	4	18	28	31	31	31	31
Juin .						18	4	12	30	30	30	30	30
Juillet .						16	2	16	31	31	31	31	31
Août .						17	1	9	29	31	31	31	31
Septbr. .					14	30			19	30	30	30	30
Octbr. .				8	17	31			6	20	31	31	31
Novbr .				12	28	30				4	27	30	30
Décbr. .	7	20	22	27	31	31					6	11	21

III. Vent.

III. Vent.

Tableau général de la force et de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1794.

Mois.	Calme. Jours.	Vent doux Jours.	Vent fort Jours.	Vent très fort Jours.	Degré de Force	Rapport des quatre plages. Nord	Eſt	Sud	Oueſt
Janvier ..	1	4	17	9	481	8	6	11	6
Février ..	4	2	19	3	385	8	1	9	10
Mars	2	3	22	4	412	16	2	5	8
Avril	1	1	21	7	477	17	3	5	5
Mai	2	4	19	6	492	5	6	11	9
Juin . ..	0	0	20	10	533	12	4	5	9
Juillet ..	1	3	19	8	474	12	2	6	11
Août	0	3	22	6	458	6	11	8	6
Septembre	2	6	18	4	393	5	5	10	10
Octobre ..	1	10	16	4	377	5	7	10	9
Novembre .	5	15	10	0	250	7	7	10	6
Décembre .	2	16	13	0	277	10	9	8	4

IV. At-

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel ſerein.	Ciel nuages.	Ciel couvert	Brouillard.	Pluie forte.	Pluie petite.	Neige forte.	Neige petite.
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.
Janvier . .	1	3	27	2	0	0	1	19
Février . .	1	5	22	2	0	5	2	15
Mars . . .	2	14	15	4	0	2	1	8
Avril . .	8	9	13	0	0	8	0	1
Mai . . .	4	12	15	0	1	13		
Juin . . .	4	6	20	3	7	10		
Juillet . .	3	2	26	1	8	13		
Août . .	1	9	21	4	6	16		
Septembre .	2	9	19	2	5	9		
Octobre .	3	6	22	8	1	10	0	1
Novembre .	0	1	29	7	0	7	1	7
Décembre .	3	7	21	0	0	1	1	14

Concluſions.

En marquant par:

A. l'intervalle de toute l'année. depuis le 1 Janvier 1794 jusqu'au 1 Janvier 1795, qui eſt de 365 jours.

H· L'intervalle des ſix mois de l'hiver, depuis le 1 Novembre 1793 jusqu'au 1 Mai 1794, comprenant 181 jours; et par

E. L'in-

E. L'intervalle des ſix mois de l'été ſuivant depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1794, qui eſt de 184 jours.

Il en réſultera la réſumé ſuivant.

I. Baromètre.

1.) Sa plus grande élévation: en

A. 28. 04 le 5. 6. et 7 de Mars et le 16 Décembre, à 2 h. après midi

E. 27. 83 le 15 Mai, à 2 heures après midi. Thermomètre 119°. Vent fort du Nord, ciel ſérein.

H. 28. 04 le 5. 6 et 7 de Mars.

2.) Sa plus petite élevation en

A. 26. 58 le 11 Septembre, à 2 h. après midi. Thermomètre 138°. Vent fort du NO. v. Oe. Ciel en partie ſérein.

H. 26. 67 le 12 Décembre 1793.

E. 26. 58 le 11 Septembre.

3.) Sa variation totole en A. 1.46, en H. 1. 37, en E. 1.25.

4.) Le milieu arithmétique entre ces hauteurs extrêmes: en A. 17. 31 en H. 27. 355, en E. 27. 205.

5.) La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs du Baromètre diviſée par leur nombre, en A. 27. 36, en H. 27. 54 et en E. 27. 21.

6.) La variation totale a été la plus grande en Février de 1. 17, et la plus petite en Août de 0.37 pouces.

7.) La

7.) La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande en Mars de 27. 71 et la plus petite en Août de 26. 93 pouces.

II. Thermomètre.

1.) Sa plus petite hauteur ou le plus grand froid

A. 184°, d'après Réaumur 15°, 1, le 16 Janvier à 6 h. matin. Baromètre 27, 71. Vent médiocre du NE. Ciel en partie ſérein. Enſuite le 20 Février à 6 h. matin. Baromètre 27, 63. Calme. Ciel en partie ſérein. Enfin le 13, 14 et 15 Décembre. Baromètre 28. 00 à 27. 92. Vent du SE, NE et calme. Ciel pour la plûpart ſérein.

H. 194°, d'après Réaumur 23°. 5, le 11 Décembre 1793 à 6 heures matin.

E. 176°, d'après Réaumur 3°, 2, le 18 Octobre à 6 h. mat. Baromètre 27. 59. Vent médiocre du Nord. Ciel ſérein.

2.) Sa plus grande hauteur, ou la grande chaleur

A. 103°, d'après Réaumur 25°. 1, le 27 Mai à 2 heures après midi Baromètre 27. 50. Vent violent du Sud. Nuages épars, éclairs vers le ſoir.

H. 126°, d'après Réaumur 14°, 4, le 23 Avril à 2 heures après midi.

E. 103° le 27 Mai &c.

3.) La différence totale en A. 81, en H. 68, en E. 53 degrés de Deliſle. Cette différence entre les termes extrêmes a été la plus grande en Avril de 45°, et la plus petite en Novembre de 18°.

4.) Le

4.) Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques, obſervées à 6 heures du matin et à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Décembre de 168°, 2, ou de $9\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur, et il a été le plus petit en Juillet de 130°, 0, ou de $10\frac{3}{4}$ degrés de chaleur d'après Réaumur. Le froid moyen s'eſt trouvé en

A. 146°, 9, d'après Réaumur, 1,° 7 de chaleur.

H. 161, 3 – – – – 6, 1 de froid.

E. 134, 3 – – – – 8, 3 de chaleur.

5.) La chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques, obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juin de 118°, 3 ou de 16°, 9 de Réaumur, et elle a été la plus petite en Décembre de 162°, 5, ou de 6°, 6 de froid, d'après Réaumur. Cette chaleur moyenne a été en

A. 137°, 4, d'après Réaumur, 6°, 7 de chaleur.

H. 152, 8 – – – – , 15 de froid.

E. 123, 4 – – – – 14, 2 de chaleur.

6.) Le froid a ſurpaſſé

	180	170	160	150	140	130	120	110	degrés.
en A.	11	35	79	150	217	314	364	365	jours.
en H.	23	35	87	157	181	181	181	181	—
en E.	-	-	-	8	38	133	183	184	—

7.) La chaleur a ſurpaſſé

	110	120	130	140	150	160	170	180	degrés.
en A.	11	55	147	191	259	335	355	365	jours.
en H.	-	-	4	14	64	151	167	176	—
en E.	11	55	143	173	184	-	-	-	—

8.) Il a gelé ſans interruption en 106 jours en A, en 121 jours en H. et en 0 jour en E.

Il n'a gelé point du tout en 209 jours en A, en 11 jours en H. et en 176 jours en E.

En H. la premiere gelée a été le 19 Septembre 1793 et la derniere le 7 Avril, après un intervalle de 200 jours.

En A. et en E. la derniere a été le 7 Avril et la premiere le 20 Octobre, après un intervalle de 196 jours.

III. Vent.

	En A.	En H.	En E.
Calme parfait . . .	18 jours.	18 jours.	6 jours.
Vent médiocre . . .	67 —	23 —	26 —
Vent fort	216 —	110 —	114 —
Vent très fort . . .	61 —	30 —	38 —
Force des vents . . .	413	401	444

Rapport des quatre plages.		Nord	Eſt	Sud	Oueſt
	En A.	111	63	98	93
	En H.	69	23	48	41
	En E.	45	35	50	54

Le

Le mois de Juin a été le plus venteux et le mois de Novembre le plus calme. L'été de 1794 a été plus orageux que l'hyver de 1793 à 94. Le vent dominant a été celui du Nord.

IV. Atmoſphère.

		En A.	En H.	En E.
Ciel entièrement ſérein -		32 jours.	17 jours.	17 jours.
Ciel en partie ſérein et nuages		83 —	42 —	44 —
Ciel entièrement couvert -		250 —	122 —	123 —
Brouillard - - - -		33 —	14 —	18 —
Pluie	forte - - -	28 —	4 —	28 —
	médiocre - -	94 —	24 —	71 —
		122 jours.	28 jours.	99 jours.
Neige	copieuſe - -	6 jours.	10 jours.	9 jours.
	médiocre - -	65 —	64 —	1 —
		71 jours.	74 jours.	1 jour.

La derniere neige tomba le 7 Avril, et il recommença à neiger le 20 Octobre après un intervalle de 186 jours.

Il grela 5 fois, en Avril, Mai, Juin, Juillet et Septembre, ſavoir une fois en chacun de ces mois.

Le nombre des orages monte à 20: le 3. 14. 25. 26. 29 Mai, le 2. 7. 10. 11. 23. 29 Juin, le 5. 17. 18. 23. 26. 27. 31 Juillet, le 5 Août et le 2 Septembre. Il

 fit

ſit des éclairs de nuit le 27 Mai, le 2. 21 Juin, le 21 Juillet, le 29 Août et le 5 Septembre.

Enfin on a obſervé deux paraſélènes, en Février et Décembre.

HISTO-

Errata.

Page 4, ligne 7 d'en bas au lieu de Z liſez z

— 16 — 9 d'en haut - — - $\frac{\partial q}{1-q^3}$ liſez — $\frac{\partial q}{1-q^3}$

— — — 13 - - - — - $\frac{-\partial p}{1-p}$ - — $\frac{\partial p}{1-p^3}$

— 92 — 4 d'en bas - — XY = y = a + etc. - - y = u + etc.

— 192 — 8 d'en haut - — - ſolutio - - ſolutu

— 465 — 9 - - - — - montre - - monter

— 497 (l. 467) 4 - - - — - haeteur - - hauteur

— 494 — 7 - - - — - 8, 40′, 52′ - - 8^h, 44′, 52″

Histoire de l'Académie pour l'année 1794 Tab. A



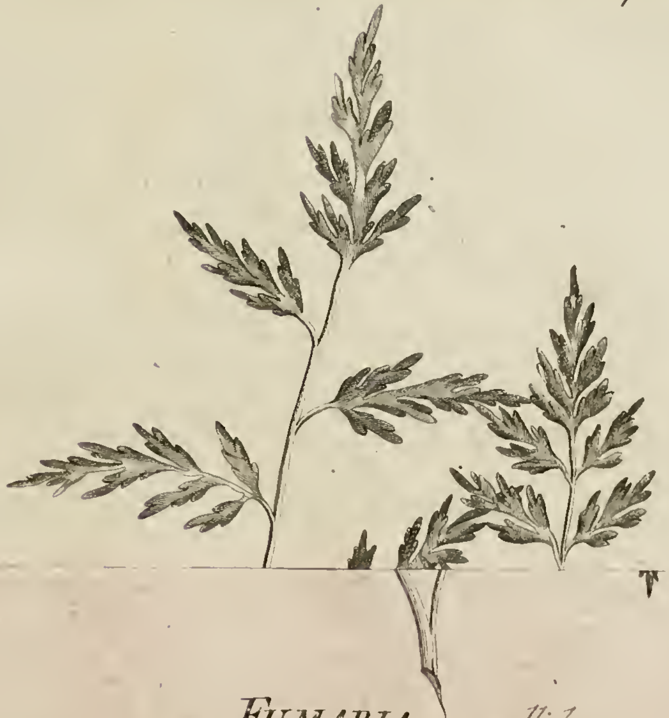


FUMARIA *decumbens*





FUMARIA *racemosa*.



FUMARIA *pallida.*



FUMARIA *palliad*



FUMARIA . *incisa.*



FUMARIA . . incisa

Fig. 1.

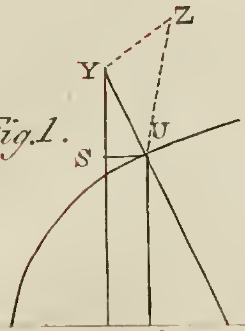


Fig. 2.

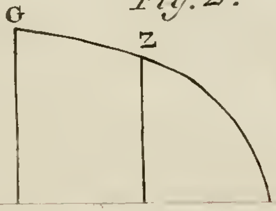


Fig. 3.

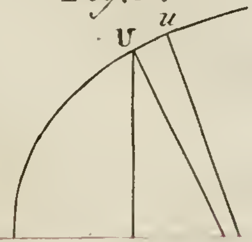


Fig. 1.

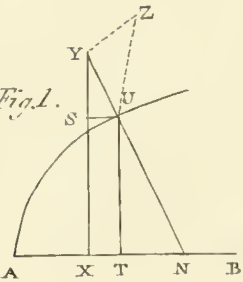


Fig. 2.

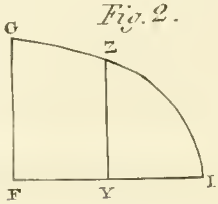


Fig. 3.

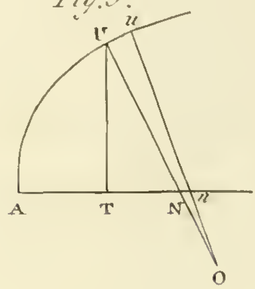


Fig. 4.

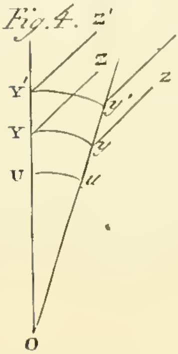


Fig. 5.

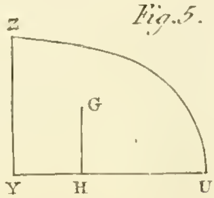


Fig. 6.

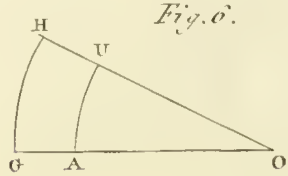


Fig. 7.

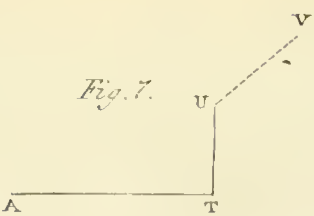
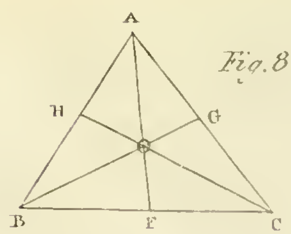


Fig. 8.



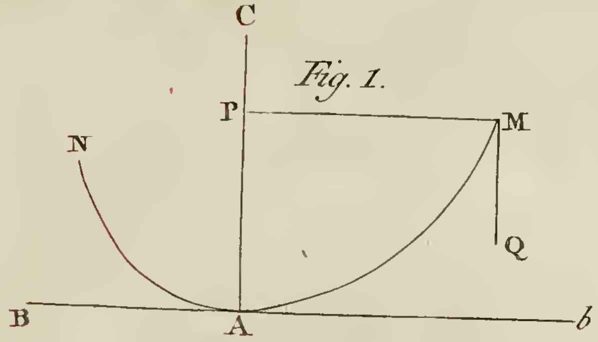


Fig. 1.

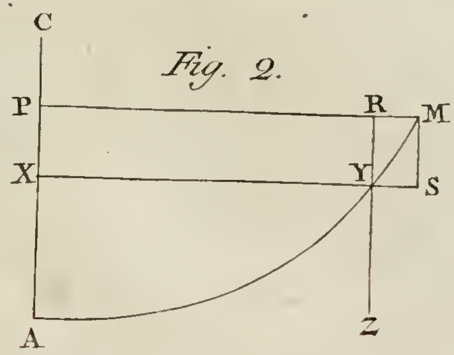
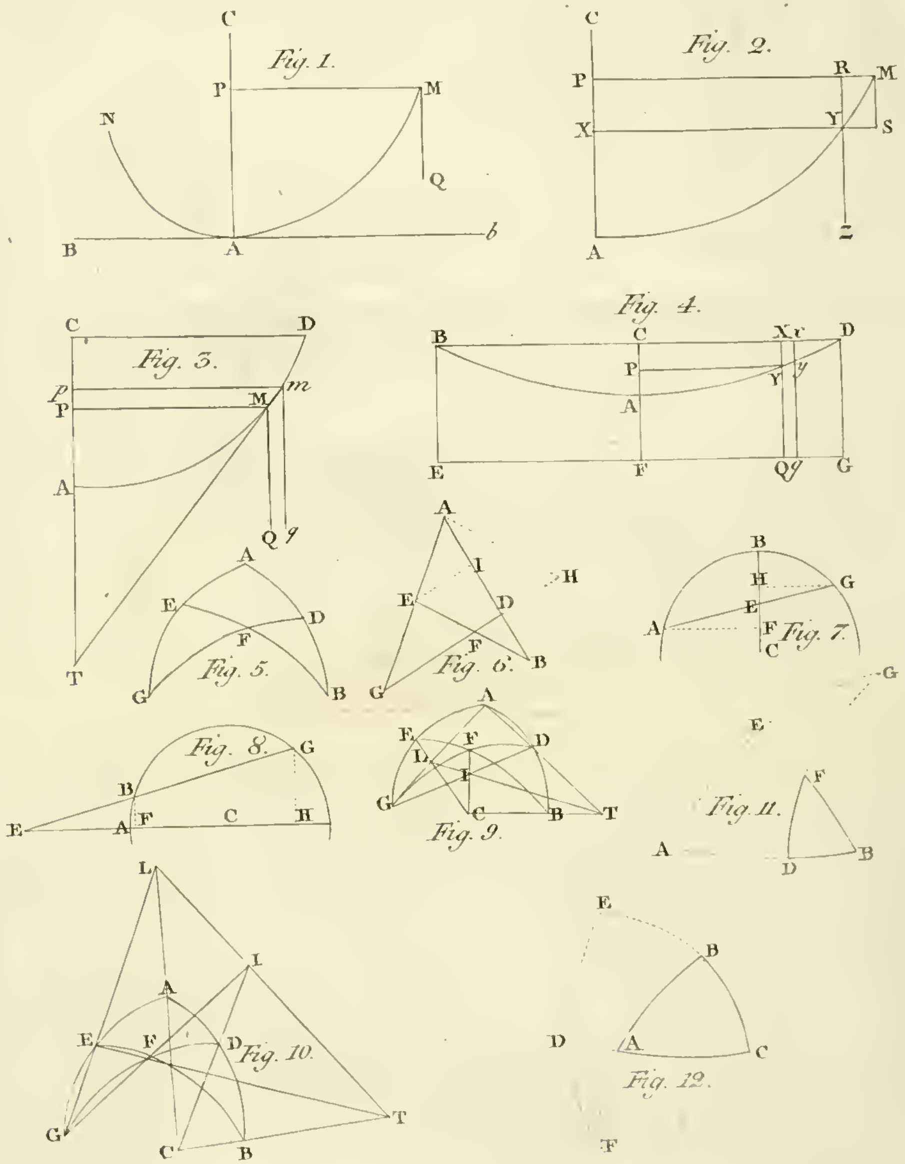
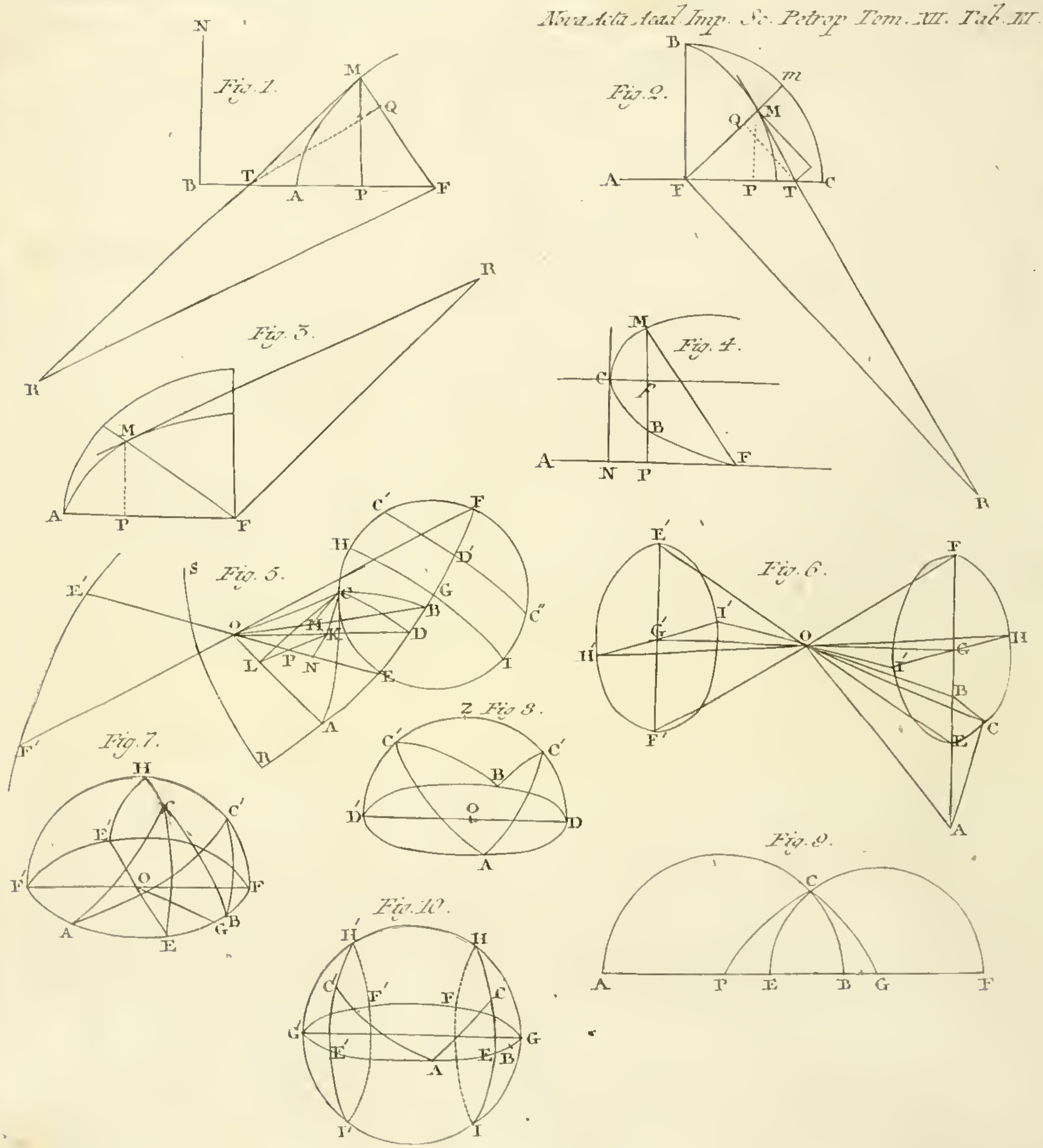
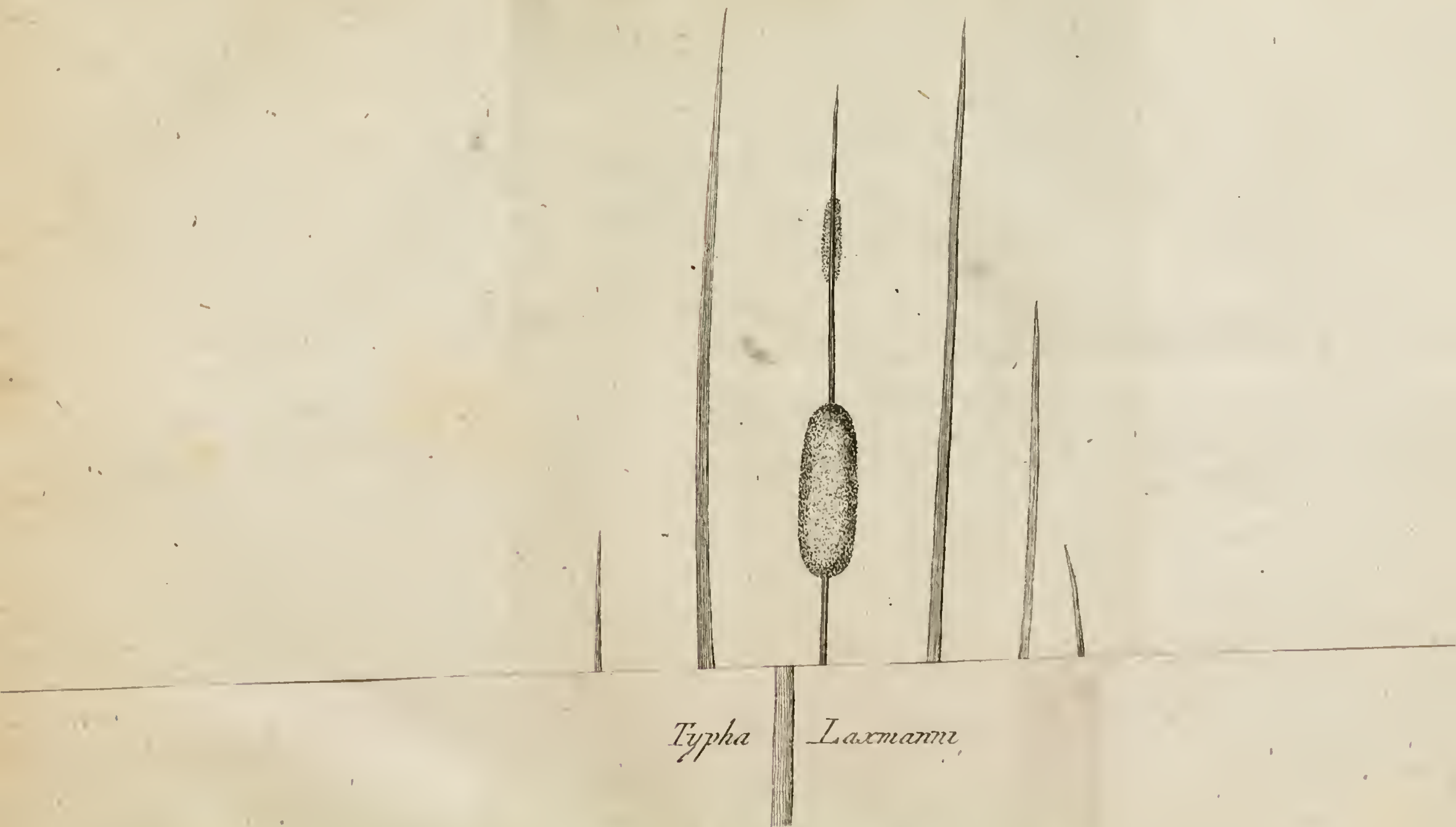


Fig. 2.

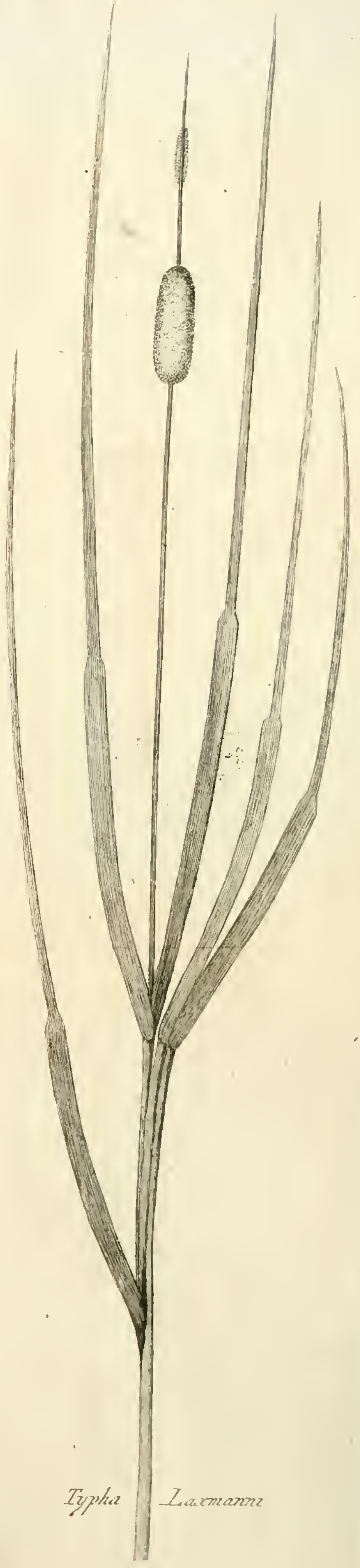



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

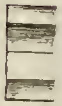


Typha Laxmanni

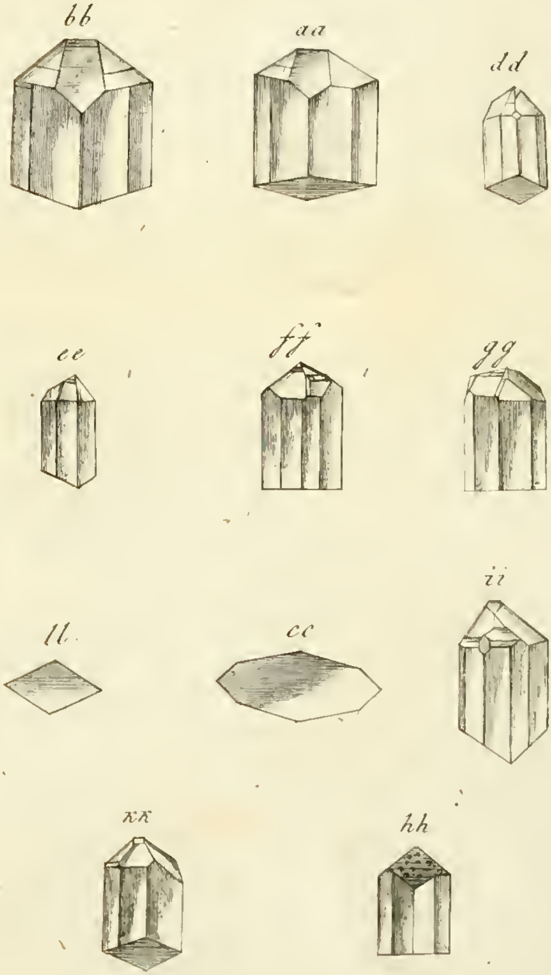


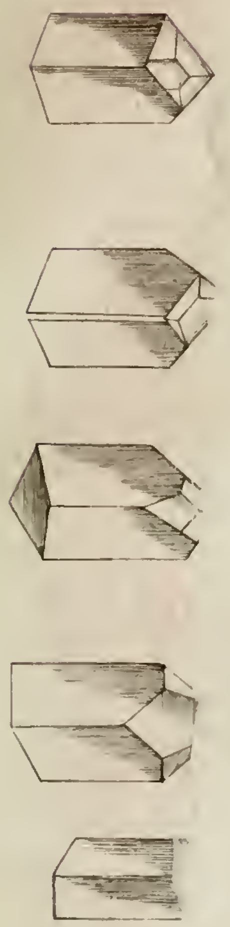
Typha Laxmanni

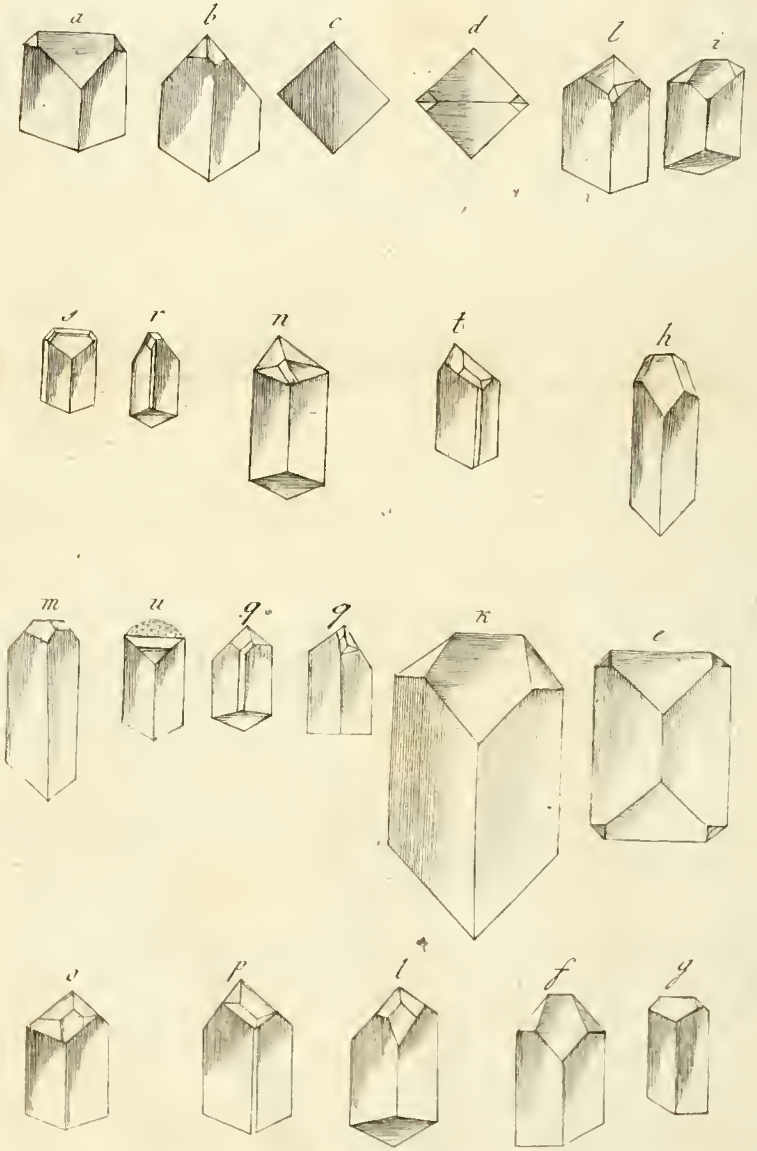




ad. Tab. V.






a
b
c
d
l
i
s
r
n
t
h
m
u
q
q
x
e
o
p
l
f
g

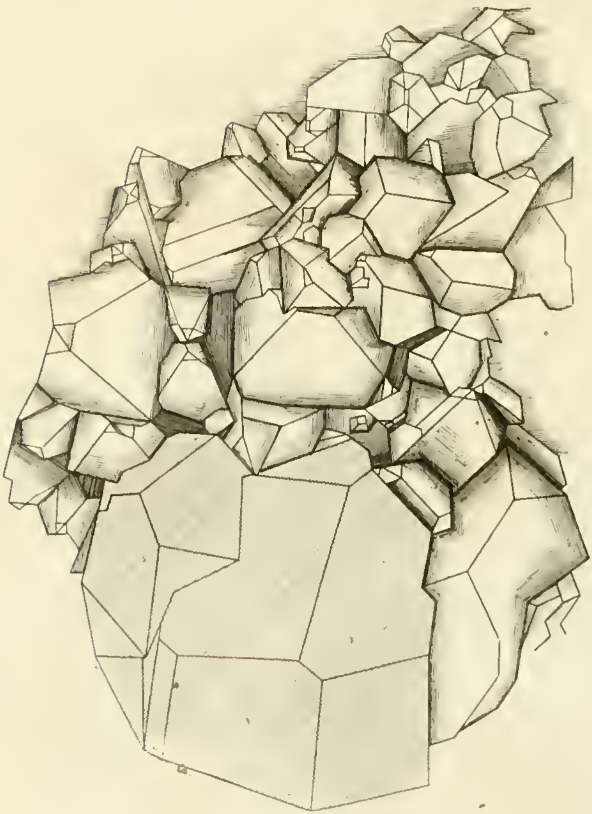




Fig. c.



Fig. e.



Fig. b.

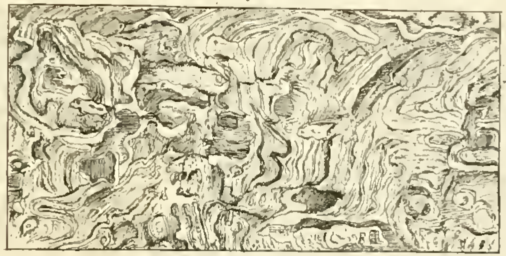
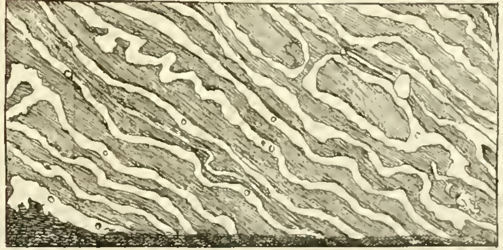
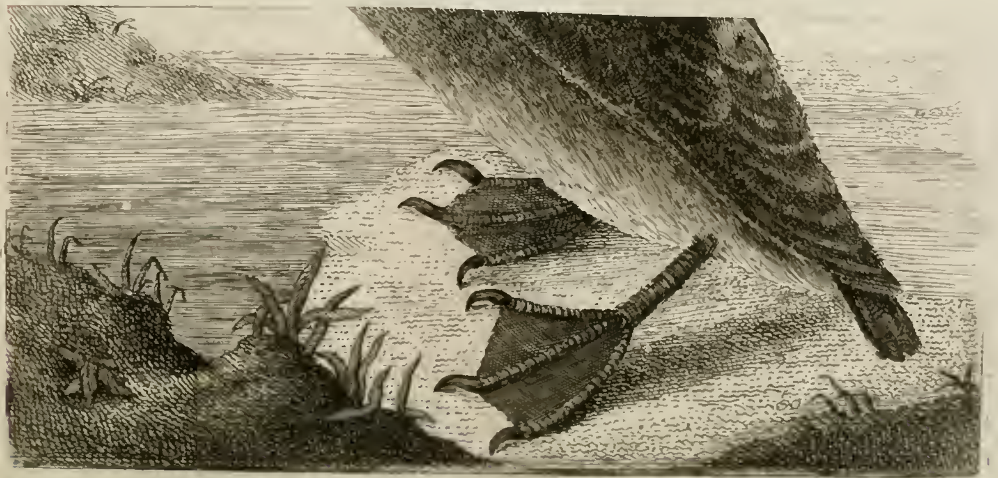


Fig. d.



Fig. a.

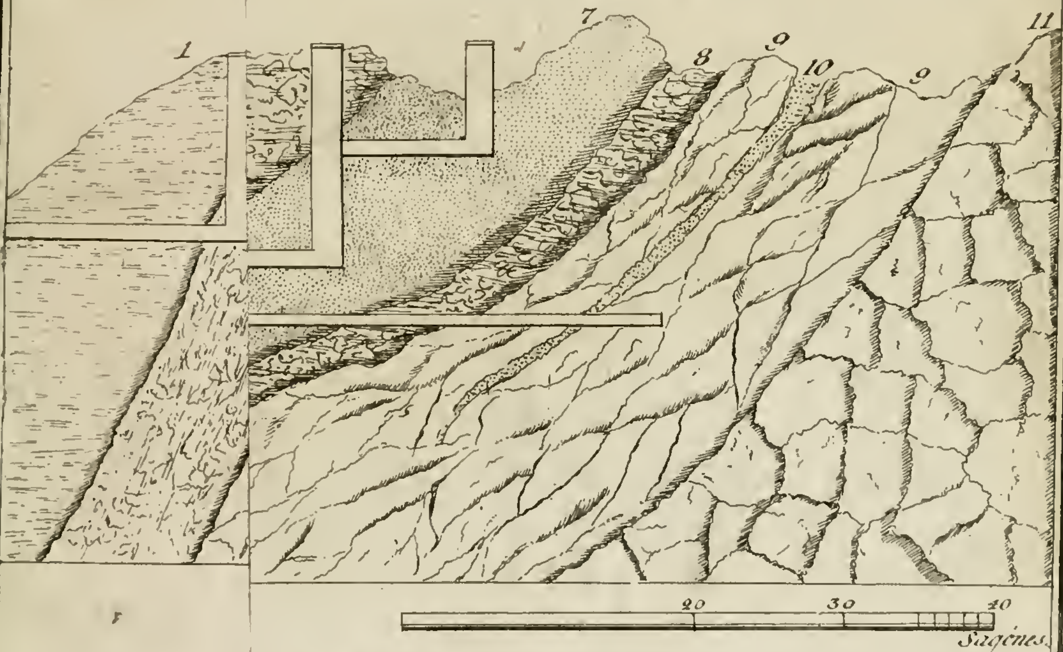




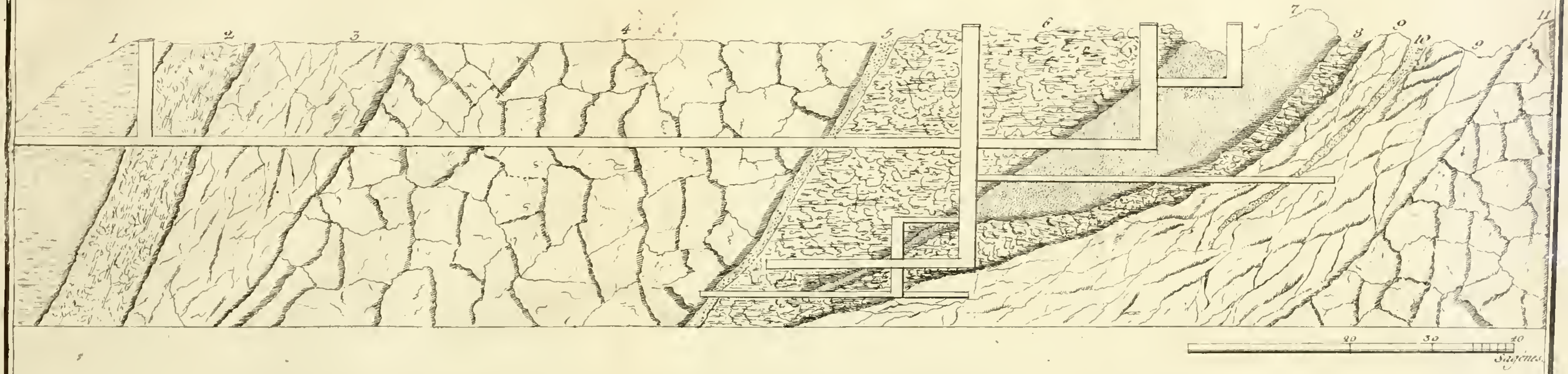
Alca Kamtschatica



Alca Kamtschatica



d'Altaï.



Miniére de Plomb et d'Argent de Nicolaeſskoi aux monts d'Altaï.

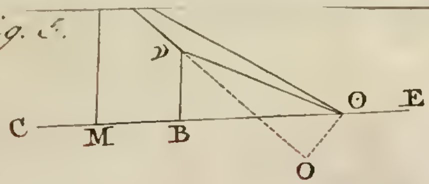


Fig. 5.

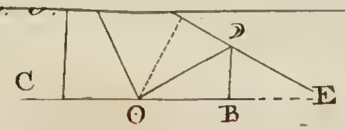


Fig. 6.

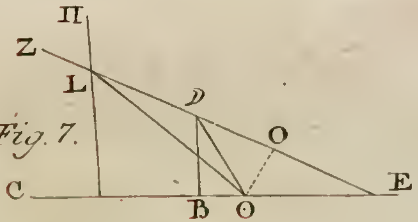


Fig. 7.

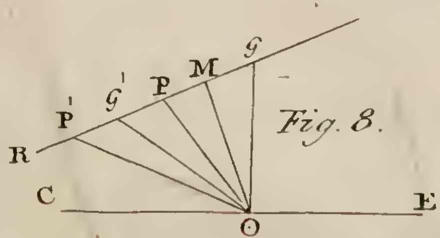


Fig. 8.

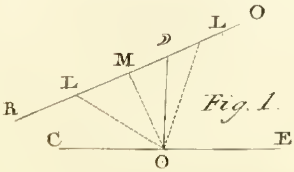


Fig. 1.

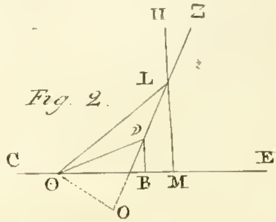


Fig. 2.

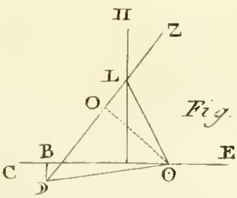


Fig. 3.

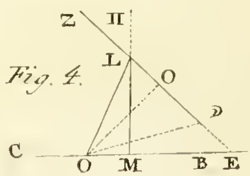


Fig. 4.

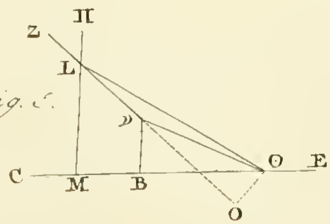


Fig. 5.

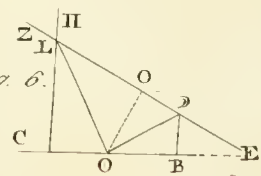


Fig. 6.

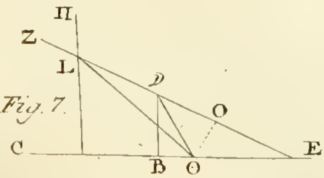


Fig. 7.

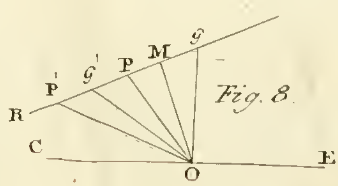


Fig. 8.

AMNH LIBRARY
100127223